1. Estudiar la derivabilitat de les funcions que s'indiquen, calculant el seu camp de derivabilitat. Escriure l'expressió de la funció derivada corresponent, en el cas de que existeixi.

(a) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$; (b) $f(x) = x|x|$;

2. Es considera la funció $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} 2ax+3, & \text{si } x < 1 \\ 3, & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{x^2 - bx}{x+5}, & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Estudiar la continuïtat i derivabilitat d'aquesta funció segons els valors dels paràmetres $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Sigui la funció $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(a) Estudiar la continuïtat de la funció en $\mathbb{R}$.

(b) Estudiar la derivabilitat de la funció en $\mathbb{R}$. Calculeu la funció derivada Df.

(c) Aplicant la definició de derivada d'una funció en un punt, calculeu $Df(-3)$.

(d) Estudieu l'existència de la derivada segona de f.

4. Estudiar la continuïtat i derivabilitat de les funcions $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definides per: $f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

segons els valors de $n \in \mathbb{N}$.

Núria Parés, Francesc Pozo, Yolanda Vidal

5. Calcular les derivades laterals de les funcions següents en els punts que s'indiquen:

(a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{si } x\neq 0\\ 0, & \text{si } x=0\end{cases}$ en el punt $a=0$

(b) $f(x)=\begin{cases}(x-2)\arctan\frac{1}{x-2}, & \text{si } x\neq 2\\ 0, & \text{si } x=2\end{cases}$ en $a=2$.

6. Calcular les funcions derivades de les següents funcions:

(a) $(x^2+1)\sqrt{x^3-1}$;

(b) $\dfrac{(x-1)^3}{\sqrt{x}}$;

(c) $\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$;

(d) $\dfrac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x$;

(e) $\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$;

(f) $e^{\cos x^2}$;

(g) $e^{\cos^2 x}$;

(h) $\cot x-\tan x$;

(i) $\dfrac{x^2}{\ln x}$;

(j) $\ln x\log x-\ln a\log_a x$;

(k) $\sqrt{\cos x}a^{\sqrt{\cos x}}$;

(l) $\dfrac{1}{3\cos^2 x}-\dfrac{1}{\cos x}$;

(m) $\cos\left(x+\dfrac{1}{\ln(x^2+1)}\right)$;

(n) $(x+\cos^6 x+\sin^6 x)^5$;

(o) $\operatorname{argtanh}(\sin^2 e^x)$;

(p) $\arctan(\ln x)+\ln(\arctan x)$;

(q) $\ln^2\left(\arctan\dfrac{2x+1}{3x}\right)$;

(r) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

7. Si $a,b>0$, provar les següents igualtats:

(a) $D\left(-\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right)=\dfrac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}$;

(b) $D\left(-\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(x\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)\right)=\dfrac{1}{ax^2+b}$;

8. Provar que en la paràbola d'equació $y = Ax^2 + Bx + C$, la corda que uneix als punts d'abcissa $x = a$ i $x = b$, és paral·lela a la recta tangent a la paràbola en el punt d'abcissa $x = \dfrac{a+b}{2}$.

9. Calcular la segona derivada de les funcions:

(a) $f(x) = e^{x^2}$; (b) $h(x) = (1 + x^2) \arctan x$;

(c) $g(x) = \ln \sqrt[3]{1 + x^2}$; (d) $i(x) = a \cosh \dfrac{x}{a}$.

10. Estudieu la derivabilitat i calculeu la derivada de les següents funcions:

(a) $f(x) = |x| + x$ (b) $f(x) = e^{-x^2} + \sqrt{x}$

(c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ (d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

(h) $f(t) = \begin{cases} e^t & , t \leq 0 \\ 1 & , 0 < t < 1 \\ \ln t & , t \geq 1 \end{cases}$ (g) $f(t) = \begin{cases} |t| & , t \leq 1 \\ -(t-1)^2 & , t > 1 \end{cases}$

(e) $f(x) = \cos^2 x + \sin(2x) + \arctan x$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + \ln\left(x^2 + 1\right)$

11. Trobeu els punts en els que la recta tangent a la corba $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ és paral·lela a l'eix d'abcisses.

12. Trobeu els punts en que la recta tangent a la corba $y = x - \dfrac{1}{x}$ és paral·lela a la recta $2x - y = 5$.

13. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és funció derivable, calculeu les derivades de les funcions:

(a) $g(x) = f(x^2 + 1)$;

(b) $g(x) = \dfrac{f(x) + 1}{x^2 + 1}$;

(c) $g(x) = f(\sin^2 x) + \cos(f(x))$;

(d) $g(x) = e^{f(x)} + x^2 f(x) + f(f(x))$;

14. En quins punts la pendent de la recta tangent a $f(x) = x^3 - 6x$ és paral·lela al segment que uneix $P_1(0,0)$ i $P_2(2,-4)$?

15. Calcula la pendent de les tangents a la paràbola $y = -x^2 - 4x + 1$ en els seus punts d'intersecció amb l'eix OX.

16. Sigui f la funció real definida per

$$f(x) = 5 - (x^2+1)\cdot \ln(x^2+1) - x^2 \qquad \forall x \in [0,e]$$

Determineu, si és possible, el nombre d'arrels en $[0,e]$.

17. Trobeu els extrems relatius de

$$f(x) = x + \sqrt{x^3}$$

18. Trobeu l'equació de la paràbola que millor aproxima en el punt (0,0) a la corba $f(x) = e^x \ln(x+1)$.

19. Calculeu cos(1) amb un error inferior a 0.001 aplicant la fórmula de Taylor.

20. Trobeu els extrems absoluts de la funció $f(x) = x^3 - 3x$ a l'interval $[0,2]$.

21. a) Expresseu el teorema de Taylor per a la funció exponencial en $x_0 = 0$.

b) Calculeu e amb un error inferior a 10^{-8}.

22. Estudieu els límits:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(ax)}{\ln(1+bx)} \quad (b \neq 0)$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)+\sin(2x)}{2x}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x-1}$;

(e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$;

(f) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$;

(g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sin(x)}{x-\sin(x)}$;

(h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$;

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\tan(2x-2)-2(x-1)}{(x-1)^3}$;

23. Calculeu els extrems de la funció $f(x) = x\sin(x)$ a l'interval $[0, 6]$.

24. Calculeu els extrems de la funció $f(x) = x\ln(x)$ a l'interval $[0.1, 3]$.

25. Trobeu els extrems absoluts de la funció $f(x) = x^3 - 3x$ a l'interval $[0, 2]$.

26. Trobeu l'equació de la paràbola que millor aproxima en el punt (0,0) a la corba $f(x) = e^x\ln(x + 1)$.

27. D'un mirall rectangular de 2m de llargària i 1m d'alçada se n'ha trencat, en un dels vèrtexs, un triangle rectangle que té 30cm de llargària i 20cm d'altura. Com s'haurà de tallar un altre mirall de costats paral.lels al mirall inicial de manera que l'àrea d'aquest nou mirall sigui màxima.

28. Disposem d'un filferro d'1m de llargària. De quina manera s'haurà de repartir per tal de construir una circumferència i un quadrat de manera que la suma de l'àrea del cercle que determina la circumferènca i l'àrea del quadrat sigui mínima.

29. Determinar l'altura del cilindre circular recte de volum màxim que es pot inscriure en un con circular recte d'un metre d'altura.

30. Un col.leccionista, entre segells i monedes, en té 50. Si un altre col.leccionista li dóna tres segells a canvi d'una moneda, el producte del nombre de monedes que li queden pel de segells és màxim. Quants segells i monedes tenia inicialment.

31. Troba dos nombres positius que sumant 30 tinguin mínima la suma dels seus quadrats.

32. Es vol construir un recipient cilíndric, amb tapa, de volum $100m^3$. Quines han de ser les seves dimensions perquè s'utilitzi la mínima quantitat de material?

33. Una persona transporta un vidre molt prim per un carrer en forma de L, de manera que una de les parts del carrer té 4m d'amplada i l'altra, 3m. Quina serà la longitud màxima que podrà tenir el vidre per poder passar-hi?

34. Hem de construir un parterre en forma de sector circular amb perímetre de 20m. Calcula el radi del sector per tal d'obtenir-lo d'àrea màxima.

35. Troba els punts de la gràfica de la funció $y^2 = 4x$, tals que la distància al punt $(4, 0)$ sigui mínima. Calcula aquesta distància.

36. Troba el punt de la paràbola $y = 2x^2$ que està més a prop del punt $(9, 0)$.

37. Calcula els punts de la gràfica de la funció $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en què la tangent té pendent màxim.