Francesc Pozo, Núria Parés, Yolanda Vidal
*http://bibliotecnica.upc.es/gimel*

# Derivació

**Objectius:**
- **Usar el Maple en el càlcul de derivades i les seves aplicacions**

## Definició de derivada

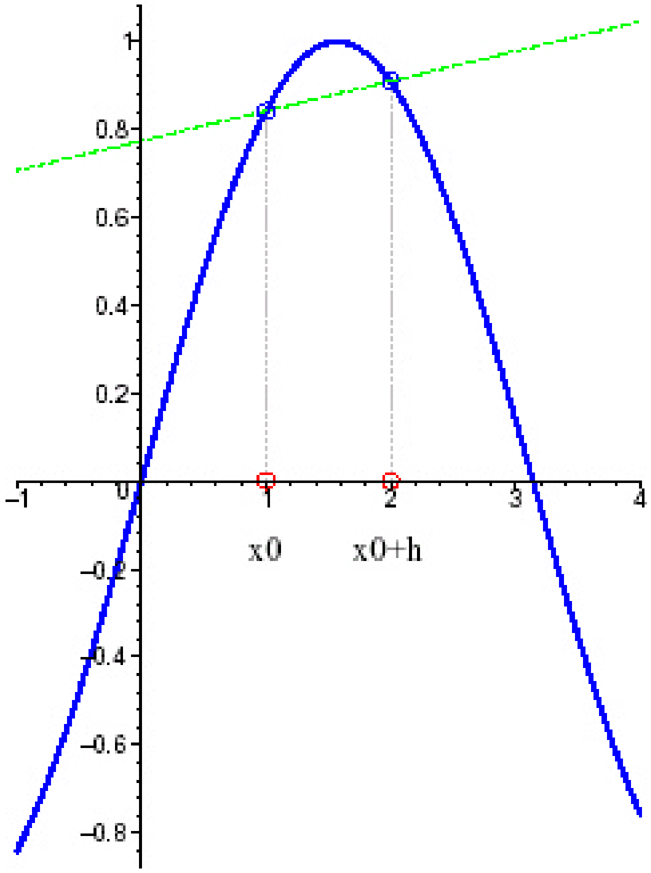
La derivada d'una funció donada $f(x)$ en un punt $x_0$ és el pendent de la recta tangent a la corba $y = f(x)$ en el punt $(x_0, f(x_0))$.

La forma de les rectes que passen pel punt $(x_0, f(x_0))$ és

$$y = m(x - x_0) + f(x_0).$$

Per determinar de totes aquestes rectes quina és la recta tangent, el que es fa és intentar aproximar el pendent $m$. Per això

considerem un punt proper, $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, al punt $(x_0, f(x_0))$ i calculem la recta secant que passa per aquests dos punts.




La recta secant té pendent

$$m_h = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Si fem cada cop la $h$ més petita (fem tendir $h$ a zero), la recta secant aproxima millor la recta tangent i per tant, el pendent de la recta secant aproxima millor el pendent de la recta tangent.

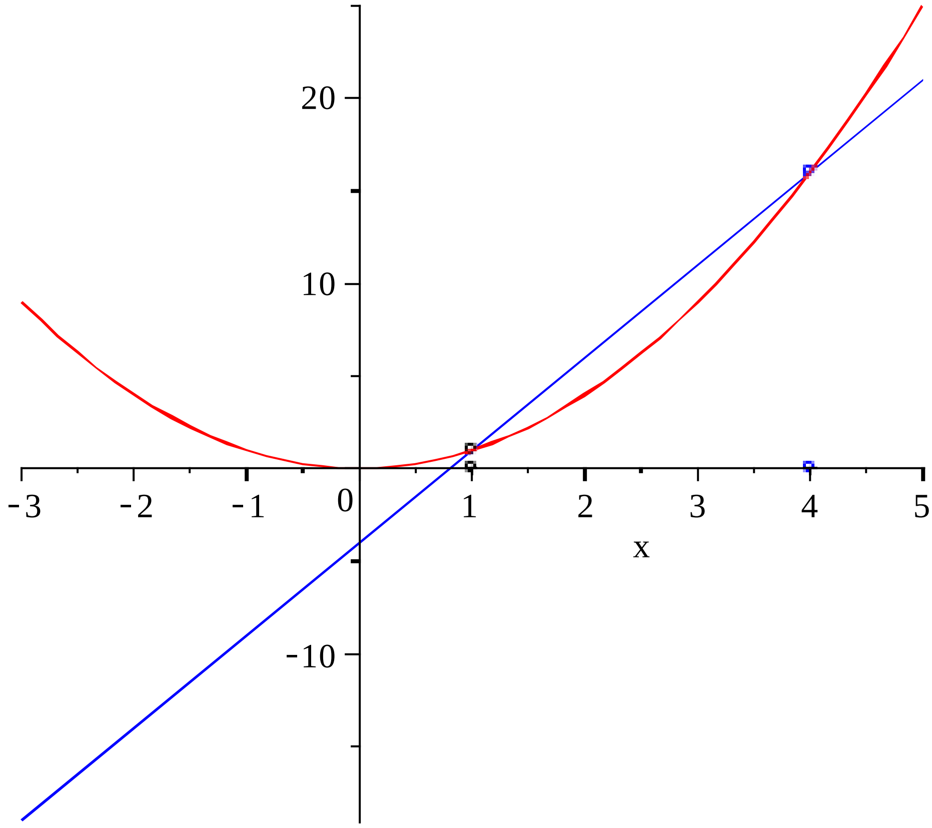
Per tant, en el límit (quan h → 0), trobarem el pendent de la recta tangent a la funció en el punt $x_0$, és a dir, la derivada de la funció $f$ en el punt $x_0$:

$$f'(x_0) = m = \lim_{h \to 0} m_h = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Exemple: Anem a veure una animació on les rectes secants es van aproximant a la recta tangent:

```
> restart;
> animateSecant:=proc(f,a,h)
    local n,Backround,Mover,Secants;
    n:=30;
    Backround:=plots[display](plots[pointplot]({[a,f(a)],[a,0]},
  symbol=circle),
              plot(f(x),x=(a-(h+signum(h)*1))..(a+(h+signum(h)*1)))):
    Mover:=plots[display](seq(plots[pointplot]({[a+(n-i)/(n/h),f(a+(n-
  i)/(n/h))],
           [a+(n-i)/(n/h),0]},symbol=circle,color=blue),i=0..n-1),
           insequence=true):
    Secants:=plots[display](seq(
       plot((f(a+(n-i)/(n/h))-f(a))/(n-i)*(n/h)*(x-a)+f(a),
       x=(a-(h+signum(h)*1))..(a+(h+signum(h)*1)),color=blue),i=0..
```

```
n-1),
     insequence=true):
  plots[display](Secants,Backround,Mover);
end proc:
> f:=x->x^2:
animateSecant(f,1,3);
```




### Maplets Secants i Tangents

Per visualitzar animacions on les rectes secants es van aproximant a la recta tangent, existeixen dues Maplets anomenades **Secants** i **Tangents** (ambdues fan el mateix). La manera més ràpida d'accedir-h és anar al menú:

Tools →Tutors→Calculus - Single Variable→Secants
Tools →Tutors→Calculus - Single Variable→Tangents

Exemple: Utilitzar qualsevol de les Maplets mencionades i introduir les dades necessàries per tal que la visualització sigui igual a la mostrada a la subsecció anterior, és a dir, considerar la funció $f(x) = x^2$, el punt $x = 1$ i la primera recta secant a una distància d' $h = 3$.

## Càlcul de la derivada d'una funció i derivades successives

Existeixen diferents formes de realitzar el càlcul de derivades amb el Maple:

1. Mitjançant les següents comandes:

- **diff** : **diff ( f(x) , x )**

- **D** : **D (f) (x)**

2. Un cop definida la funció, es pot clicar amb el botó dret sobre d'aquesta i indicar l'opció **Differentiate**.

3. Mitjançant les paletes: $\frac{d}{dx} f$ i $\frac{\partial}{\partial x} f$.

Per avaluar la derivada d'una funció *f* en un determinat punt, s'utilitza la comanda **D(f)(x)**, on es pot substituir el valor de x pel punt en qüestió. Una manera alternativa és calcular primer la derivada i després utilitzar les comandes **subs** i **eval** en l'expressió calculada de la derivada.

Les derivades successives, també anomenades derivades d'ordre superior, són la sèrie de funcions derivades que s'obtenen de derivar la seva anterior funció derivada. El seu càlcul es pot fer utilitzant successivament la comanda **diff** o bé utilitzant l'operador **(D@@n)**, on n és el nombre de derivada. També es pot fer clicant successivament el botó dret i l'opció **Differentiate**.

Exemple: Donada la funció $f(x) = a\ x^3 + b\ x^2 - c\ x - d$, calculeu les seves derivades successives i avalueu la derivada segona en x=-1.

## Maplet Differentiation Methods

La Maplet **Differentiation Methods** serveix per fer càlculs de derivades pas a pas. Dóna la possibilitat de que l'usuari apliqui les regles que cregui convenients (permet demanar ajudes en cada pas), que sigui el Maple qui ho vagi solucionant pas a pas (**Next Step**) o bé que ho solucioni tot de cop, tot i que ens mostrarà totes les passes realitzades (**All Steps**). No permet resoldre directament derivades successives; caldria copiar el resultat obtingut d'una derivada a la finestra de la funció a derivar, calcular la derivada, i així successivament. La manera més ràpida d'accedir a aquesta Maple és la següent:

Tools →Tutors→Calculus - Single Variable→Differentiation Methods

Exemple: Calcular la derivada de la següent funció mitjançant la Maplet i mitjançant la comanda de la paleta

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

# Extrems

Una de les aplicacions de les derivades és el càlcul dels extrems i punts d'inflexió d'una funció en un interval.

Per determinar els extrems d'una funció en un interval $[a, b]$ cal estudiar els següents punts:

• Estudi dels punts en què la funció no és derivable

• Estudi dels punts crítics allà on la funció és derivable

• Estudi dels extrems de l'interval en el qual la funció està definida ( $x = a$ i $x = b$ )

Un punt crític d'$f$ és tot punt pel qual la seva derivada és 0. És a dir: $x_0$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Un cop determinats els candidats a extrems cal mirar si en aquests punts hi ha un màxim relatiu, un mínim relatiu o si no hi ha res o no podem assegurar res. Per això la manera més segura és fer un estudi del creixement i decreixement de la funció al voltant d'aquest punt, és a dir, mirar el signe de la derivada primera al voltant del punt:
- creixent a l'esquerra (f'>0) i decreixent a la dreta (f'<0) ⇒ màxim
- decreixent a l'esquerra (f'<0) i creixent a la dreta (f'>0) → mínim
- creixent a dreta i esquerra / decreixent a esquerra i dreta ⇒ punt d'inflexió

Recordeu que per calcular els extrems podem utilitzar la Maplet

Tools →Tutors→Calculus - Single Variable→Curve Analysis

Exemple: Considereu la funció $f(x) = \sqrt[3]{x^2(6-x)}$ . Estudieu els màxims i mínims relatius de la funció en l'interval $[-6, 8]$. Recordeu que per determinar la continuitat i derivabilitat d'una funció podeu utilitzar la comanda iscont. Feu un dibuix de la funció per comprovar els resultats.

# Taylor

El desenvolupament en sèrie de Taylor d'una funció $f(x)$ al voltant d'un punt arbitrari $x_0 \in \mathbb{R}$ ve donat per

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

La comanda del Maple que ens permet calcular aquest polinomi de manera immediata és **taylor (expressió, x=a, n)**, la qual calcula el desenvolupament en sèrie de Taylor d'ordre n-1 d'una expressió respecte la variable x, al voltant del punt a. Per tant, cal introduir l'expressió, la variable (x) i el valor del punt (a) i l'ordre (n), que ha de ser un enter positiu.

## Maplet Taylor Approximation

La Maplet **Taylor Approximation** serveix per calcular el polinomi de Taylor d'una funció en el punt a i mostra gràficament el comportament del polinomi de Taylor al voltant d'un punt a mesura que anem augmentant el grau del polinomi. La manera més ràpida d'accedir a aquesta Maplet és la següent:

Tools →Tutors→Calculus - Single Variable→Taylor Approximation

Exemple: Considerar la funció $f(x) = \frac{1}{x}$. Calcular el polinomi de Taylor d'ordre 3 en x=1, tant manualment com amb la comanda Taylor, com amb la Maplet.

## Exercicis autoavaluació

**Exercici proposat 1:**

- Calcular el pendent de la recta tangent a $f(x) = x^4$ en $x_0 = 1$ , mitjançant el límit i mitjançant la derivada i comprovar que el resultat és el mateix.

**COMANDES: limit, D**

**Exercici proposat 2:**

- Calcular la segona derivada de les funcions:

a) $f(x) = e^{x^2}$

b) $g(x) = \ln\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)$

**COMANDES: diff, D@@2**

**Exercici proposat 3:**

- Calcular la derivada de la següent funció utilitzant la Maplet corresponent:

$$h(x) = \left(x + \cos^6(x) + \sin^6(x)\right)^5$$

**COMANDES: Differentiation Methods**

**Exercici proposat 4:**

- Calcular la derivada primera i la derivada desena de la funció:

$$f(x) = \pi \cdot sin\left(x - e^{10}\right)$$

**COMANDES: diff, D**

**Exercici proposat 5:**

- Trobar l'equació de la paràbola que millor aproxima la corba $f(x) = e^x \ln(x+1)$ en el punt (0,0).

**COMANDES: taylor**

**Exercici proposat 6:**

- Utilitzant el càlcul de derivades (regla de l'Hopital) calculeu el següent límit:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

- Calculeu el següent límit considerant el desenvolupament de Taylor del numerador i també aplicant l'Hopital successivament:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \sin(x) - \left(x^2 - \frac{1}{6} \cdot x^4 + \frac{1}{120} \cdot x^6\right)}{x^8}$$

**COMANDES: diff, taylor**

**Exercici proposat 7:**

• Calculeu els extrems de la funció $f(x) = x \ln(x)$ a l'interval $[0.1, 3]$.

**COMANDES: diff, subs, eval, D, iscont**