Ejercicios sobre series

Curso de Cálculo y métodos numéricos

Edoardo Provenzi

1. Demostrar la fórmula de Gauss
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
con consideraciones elementales de simétria y comprobarla con la técnica de inducción;

2. Demostrar que vale
$$2^n \geq 1 + n$$
para cada $n \geq 1$ con la técnica de inducción;

3. Demostrar que vale la fórmula:
$$\sum_{i=1}^{n} q^{i-1} = \begin{cases} n & \text{si } q = 1 \\ \frac{1-q^n}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$
para cada $q \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ y sus corolarios:
$$\sum_{i=1}^{n} q^{i} = \begin{cases} n & \text{si } q = 1 \\ \frac{q-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} q^{i} = \begin{cases} n & \text{si } q = 1 \\ \frac{1-q^n}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

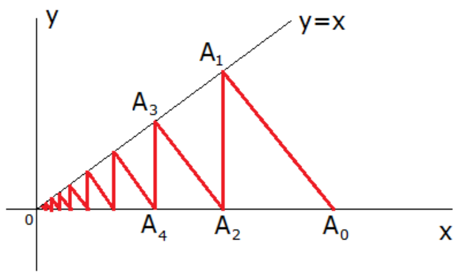
4. Calcular, de forma aproximada, la sumatoria
$$\sum_{k=2}^{100} 3^{2-k}.$$

5. Demostrar que
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^{k} = \begin{cases} +\infty & \text{si } q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & \text{si } -1 < q < 1 \\ \nexists & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$$
y que
$$\sum_{k=n_0}^{\infty} q^{k} = \begin{cases} +\infty & \text{si } q \geq 1 \\ \frac{q^{n_0}}{1-q} & \text{si } -1 < q < 1 \\ \nexists & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$$

6. Calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n .$$

7. Una particula se mueve a lo largo de la trayectoria dibujada en la figura siguiente:



Calcular la longitud del recorrido A_0, A_1, A_2, A_3 y del recorrido completo.