Sistemes d'equacions lineals

1.1 Definició i concepte de solució

Un sistema de p equacions i n incògnites és de la forma

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{array}\right. \tag{1.1}$$

La solució d'aquest sistema és un vector $\vec{S} = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$, tal que al substituïr cada x_i per s_i, per $\forall i \leq n$, es cumpleixen totes les equacions del sistema (1.1)

Aquest sistema serà **compatible determinat** si només té una solució, **compatible indeterminat** si té infinites solucions i **incompatible** si no té solució.

1.2 Matriu associada a un sistema d'equacions lineals

Seguint les regles del producte de matrius podem escriure el sistema (1.1) en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Anomenen matriu associada al sistema A a la primera matriu de l'equació (1.2), o sigui a la matriu dels coeficients, i matriu ampliada A' a la matriu A més la columna dels termes independents

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} ; \quad A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} & b_p \end{array}\right)$$

1.3 Teorema de Rouché Frobenius

Teorema 1.1 *Sigui A la matriu d'un sistema, A' la seva matriu ampliada i n el nombre d'incògnites llavors:*

- *Si $rang(A) = rang(A') = r$ el sistema és **compatible***
  - *$r = n$ el sistema és **compatible determinat**, ja que tenim el mateix nombre d'incògnites que d'equacions linealment independents*
  - *$s < n$ el sistema és **compatible indeterminat**, ja que tenim més incògnites que equacions linealment independents*
- *Si $rang(A) \neq rang(A') = r$ el sistema és **incompatible***

Exemple

De quin tipus és el sistema $\left.\begin{array}{ccccc} x & -y & -z & -t & =5 \\ 2x & +y & & & =3 \\ x & +3y & & -t & =1 \\ x & -y & -z & -t & =1 \end{array}\right\}$

En aquest cas tenim

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \; ; \; A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & a-1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

on $rang(A) = 3 \neq 4 = rang(A')$ per tant el sistema és incompatible

Exercici

1) De quin tipus és el sistema $\left.\begin{array}{ccccc} x & -y & -z & -t & =5 \\ 2x & +y & +3z & & =3 \\ x & +3y & & -t & =1 \\ x & +4y & -z & +2t & =1 \end{array}\right\}$ *Resp. Compatible determinat*

2) De quin tipus és el sistema $\left.\begin{array}{ccccc} x & +y & +z & +t & =1 \\ x & +y & +z & +t & =1 \\ 2x & +2y & +2z & +2t & =2 \end{array}\right\}$ *Resp. Compatible indeterminat*