Determinant d'una matriu quadrada

A cada matriu quadrada se li pot associar un número que anomenarem determinant i l'escriurem:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow Det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.1 Càlcul de determinants de segon ordre

Donada la matriu quadrada de segon ordre

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

llavors

$$Det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

1.2 Càlcul de determinants de tercer ordre. Regla de Sarrus

Si la matriu és de tercer ordre apliquem la regla de Sarrus, que consisteix a fer sis productes, tres de positius format pels elements de la diagonal principal i els de les dues diagonals paral·leles, amb el seu corresponent vertex oposat i tres negatius que és formen de manara semblant, però prenent com a referència la diagonal secundaria.

Donada la matriu quadrada de tercer ordre

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

llavors

$$Det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{21}a_{12}a_{33})$$

Exemple

Calcula el determinant de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$Det(A) = -8 + 0 + 3 - (-9 + 4 + 0) = 0$$

1.3 Menor complementari i adjunt d'un element a_{ij}

Suposem un element a_{ij} d'una matriu quadrada. El seu menor complementari M_{ij} és el determinant que resulta d'eliminar la fila i i la columna j. L'adjunt d'aquest element, A_{ij}, és el nombre que resulta de fer $(-1)^{i+j}M_{ij}$

Exemple

Si $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & 8 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ llavors el menor complementari i l'adjunt de l'element 8 és

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}; A_{32} = -1 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

1.4 Càlcul de determinants d'ordre > 3

Per calcular el determinat d'una matriu d'ordre més gran que 3 farem servir les següents propietats:

1) El determinat d'una matriu quadrada és igual a la suma dels elements d'una fila o columna multiplicats pels seus adjunts corresponents.
2) El valor del determinant és independent de la fila o columna escollida pel seu desenvolupament.

Així per calcular un determinat d'una matriu d'ordre més gran que 3 farem el desenvolupament per una fila o columna i repetirem el procés fins que els determinants corresponents als adjunts siguin d'ordre 3, que ja podrem calcular aplicant la regla de Sarrus.

$$Det(A) = a_{l1}A_{l1} + a_{l2}A_{21} + \cdots + a_{ln}A_{ln}$$

Exemple

Calcula el determinant de $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & 8 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Tenim

$$2\begin{vmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 8 & 6 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 1 & 8 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$2 \cdot (-88) - 3 \cdot (-14) - 1 \cdot 10 = -176 + 42 - 10 = -144$

Exercici

1) Calcula el determinant de $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ *Resp.* -792