Matriu inversa d'una matriu quadrada

1.1 Definició

Una matriu A té inversa A^{-1} si $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ on I és la matriu identitat. Com que hem de poder multiplicar $A \cdot A^{-1}$ i $A^{-1} \cdot A$ només té sentit parlar de matrius inverses de matrius quadrades perquè el nombre de files de A ha de coincidir amb el nombre de columnes de A^{-1} i viceversa.

No totes les matrius quadrades tenen inversa, és pot comprovar fàcilment que una matriu tipus

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

no té inversa, ja que no existeix cap altra matriu que multiplicada per aquesta doni I. De fet les condicions que ha de complir una matriu per tenir inversa són:

1) Que sigui quadrada

2) Que el seu determinant sigui diferent de zero

Mètode de Gauss-Jordan

Suposem tenim una matriu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Formem A' afegint la matriu I

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots\cdots\cdots & & & & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

Fem transformacions elementals mitjançant combinacions lineals de les files fins aconseguir que la part esquerra de A' sigui I

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ & \cdots\cdots\cdots & & & & \cdots\cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & * & \cdots & * \end{array} \right)$$

La matriu que ens ha quedat a la part dreta de A' és la matriu inversa de A

Exemple

Calcula la matriu inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \to f_2 - 2f_1 \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \to$$

$$2f_3 \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \to f_3 - 5f_2 \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 10 & -5 & 2 \end{array} \right) \to$$

$$27f_2, 27f_1 \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 27 & 0 & 81 & 27 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & -135 & -54 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 10 & -5 & 2 \end{array} \right) \to f_2 - 5f_3, f_1 - 3f_2 \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 27 & 0 & 0 & -3 & 15 & -6 \\ 0 & 54 & 0 & -4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 27 & 10 & -5 & 2 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-3}{27} & \frac{15}{27} & \frac{-6}{27} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-4}{54} & \frac{2}{54} & \frac{10}{54} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{27} & \frac{-5}{27} & \frac{2}{27} \end{array} \right)$$

Així

$$A^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -3 & 15 & -6 \\ -2 & 1 & 5 \\ 10 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercici

1) Calcula la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.*Resp.* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$