Operacions amb matrius

1.1 Suma de matrius

Només es poden sumar (restar) matrius que tinguin els mateixos nombres de files i de columnes. La suma (resta) es fa sumand (restant) element a element, és a dir, sumand (restant) els elements que es troben en la mateixa posició de la matriu.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

o expressat d'una altra manera $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$

1.2 Producte d'una matriu per un escalar

Per fer aquest producte multiplicarem tots els elements de la matriu per l'escalar

$$k \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ ka_{m1} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

o expressat d'una altra manera $k(a_{ij}) = (ka_{ij})$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 8 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 5 & -1 & 6 \\ 7 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 11 \\ 13 & 2 & 4 \\ 9 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple
No és pot realitzar la següent operació

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 8 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -1 & 6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

per no ser matrius del mateix tipus

Exemple
Realitza la següent operació

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 35 \\ -15 & 10 \\ 20 & 5 \end{pmatrix}$$

1.3 Producte de matrius

Volem realitzar operacions del tipus

$$A \cdot B = C$$

Només es poden realitzar productes quan el nombre de columnes de la primera matriu A és igual al nombre de files de la segona B. Cadascun dels elements resultants serà el resultat de multiplicar element a element una fila de la matriu A per una columna de B i sumar de la següent manera:

$$c_{lq} = a_{l1}b_{1q} + a_{l2}b_{2q} + \cdots + a_{lr}b_{rq} = \sum_{i=1}^{r} a_{li}b_{iq}$$

L'element resultant estarà posicionat al mateix nombre de fila que la que hàgim utilitzat en la matriu A i al mateix nombre de columna que hàgim utilitzat en la matriu B

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) & 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \\ (-2) \cdot 1 + 2 \cdot (-3) & (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 1 & (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 \\ 6 & -1 & 3 \\ -8 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

propietats del producte de matrius

1) No és commutatiu $A \cdot B \neq B \cdot A$
2) És associatiu $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
3) És distributiu respecte la suma $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

cas particular
Un cas interessant és el producte d'una matriu fila per una matriu columna

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \end{pmatrix}$$

Aquest cas ens dona la mateixa definició que el producte escalar de dos vectors, així doncs podem entendre els vectors com matrius columna i el seu producte escalar com el producte del trasposat d'un per l'altre.

Exercicis

1) comprova que $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 6 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2) comprova que $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ on

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$