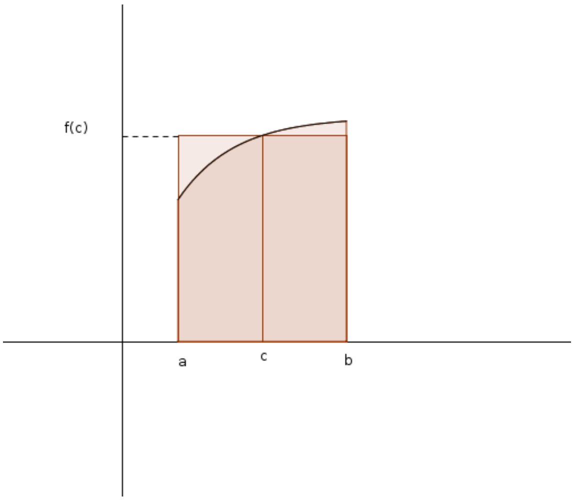
Teorema de la mitja. Teorema fonamental del càlcul. Regla de Barrow

Teorema de la mitja

Tenim una funció contínua, i per tant integrable, a l'interval [a,b], llavors $\exists c \in [a,b]$ on

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

Geomètricament significa que hi ha un punt c on l'àrea sota la constant f(c) entre a i b val el mateix que l'àrea sota la corba f(x)



Demostració

Per el teorema de weierstrass f(x) té un mínim m i un màxim M en [a,b], per tant

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx = M(b-a)$$

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

al ser contínua $\exists c \in [a,b] \quad on \quad m \le f(c) \le M$ i que $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$

Teorema fonamental del càlcul. Regla de Barrow

Sigui f(x) integrable en [a,b] i g(x) contínua en [a,b] i derivable en (a,b) tal que g'(x) = f(x) llavors per a tot x que pertanyi a (a,b) tenim

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$$

Aquest resultat es coneix com a regla de Barrow i ens diu que per calcular una integral definida ho farem igual que en el cas de les integrals indefinides, i restant el valor numèric del límit superior menys el del límit inferior

Demostració

utilitzant el teorema del valor mig

$$g(b)-g(a)=\sum_{i=1}^{n}(g(x_i)-g(x_{i-1}))=\sum_{i=1}^{n}g'(c_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}f(c_i)(x_i-x_{i-1})$$

on c_i pertany a l'interval (x_{i-1} , x_i)

com f(c_i) és més gran o igual que el mínim que agafa la funció en (x_{i-1} , x_i) i , anàlogament, f(c_i) és més petit o igual que el màxim que agafa la funció en (x_{i-1} , x_i)

$$\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})\leq g(b)-g(a)\leq\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})$$

i com f(x) és integrable els dos sumatoris són iguals a la integral definida en el límit de n molt gran, i per tant

$$\int_a^b f(x)\,dx=g(b)-g(a)$$

Exemple

Calcula $\int_{-2}^{1}x^2\,dx$

$$\int_{-2}^{1}x^2\,dx=[\frac{x^3}{3}]_{-2}^{1}=\frac{1}{3}-\frac{-8}{3}=3$$

Exercicis

- Calcula $\int_2^3\frac{1}{1-x}dx$. *Resp -ln(2)*
- Calcula $\int_0^{\pi}(x^3-x^2\cos x)\,dx$. *Resp* $\frac{\pi^4}{4}+2\pi$
- Calcula $\int_1^2\ln x\,dx$. *Resp* $2\,ln2-1$