Mètodes elementals d'integració. Funcions trigonomètriques

a) Integrals del tipus $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, *on* $m, n \in N$

- Si l'exponent m és senar farem el canvi de variable t = cos x
- Si l'exponent n és senar farem el canvi de variable t = sin x
- Si m i n són parells aplicarem les fórmules:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2\mathrm{x}) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2\mathrm{x}) \qquad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2\mathrm{x}$$

Exemple

Calcula $\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx$

$$\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx = \int \sin^2 x (\sin x \cos x)^2 dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2\mathrm{x})\frac{1}{4}\sin^2 2\mathrm{x}\, dx = \frac{1}{8}\left(\int \sin^2 2\mathrm{x}\, dx - \int \sin^2 2\mathrm{x} \cos 2\mathrm{x}\, dx\right)$$

fem el canvi t = sin 2x, dx = 2 cos 2x dx, així

$$\frac{1}{8}\left(\int \frac{1}{2}(1-\cos 4\mathrm{x})dx - \int u^2 \frac{du}{2}\right) = \frac{1}{16}\int (1-\cos 4\mathrm{x})\, dx - \frac{1}{16}\frac{u^3}{3} + C =$$

$$\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4\mathrm{x} - \frac{1}{48}\sin^3 2\mathrm{x} + C$$

Exercicis

- Calcula $\int \sin^3 x \cos^5 x\, dx$. *Resp.* $\frac{-\cos^6 x}{6} + \frac{\cos^8 x}{8} + C$
- Calcula $\int \sin^3 x\, dx$. *Resp* $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$
- Calcula $\int tg^3 x\, sec^3 x\, dx$. *Resp.* $\frac{-1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{5\cos^5 x} + C$

b) Integrals del tipus $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ **, on R és una funció racional**

Per aquestes integrals sempre es pot fer el canvi de variable t = tg (x/2), on resulta

$$\sin x = \frac{2\mathrm{t}}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx = \frac{1}{1+t^2}dt$$

Tot i que el canvi anterior és general a vegades és més convenient realitzar algun d'aquests altres canvis:

- Si R(sin x, -cos x) = -R(sin x, cos x), per tant R és senar en cos x, farem el canvi t = sin x
- Si R(-sin x, cos x) = - R(sin x, cos x), per tant R és senar en sin x, farem el canvi t = cos x
- Si R(-sin x, - cos x) = R(sin x, cos x), per tant R és parell, llavors farem el canvi t = tg x

Exemple

Calcula $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} dx$

fem el canvi t = tg x, on $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ i $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, per tant

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} dx = \int t^2 (1+t^2) \frac{dt}{(1+t^2)} = \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{1}{3} tg^3 x + C$$

Exercicis

- Calcula $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$. *Resp.* $\cos x + \frac{1}{\cos x} + C$
- Calcula $\int \frac{1}{1+\sin^2 x} dx$.*Resp* $\frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2}\, tg\, x) + C$

Algunes substitucions trigonomètriques

- Si tenim una integral del tipus $\int R(x, \sqrt{(k^2 - x^2)})\, dx$ convé fer el canvi x = k sin t, o x = k cos t
- Si tenim una integral del tipus $\int R(x, \sqrt{(x^2 - k^2)})\, dx$ convé fer el canvi x = k sec t
- Si tenim una integral del tipus $\int R(x, \sqrt{(k^2 + x^2)})\, dx$ convé fer el canvi x = tgx