Mètodes elementals d'integració. Funcions racionals senzilles

Integració funció racional

Una funció racional és un quocient de funcions polinòmiques del tipus

$$\frac{P(x)}{T(x)}$$

per tant la integral a calcular serà $\int \frac{P(x)}{T(x)} dx$

Només tractarem un cert tipus de funcions racionals segons el tipus de denominador que tinguem.

Si el grau P(x) ≥ grau T(x) primer de tot farem la divisió on

$$\frac{P(X)}{T(x)} = Q(x) + \frac{R(X)}{T(x)} \quad \text{per tant} \quad \int \frac{P(x)}{T(x)} dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{T(x)} dx$$

La integral $\int Q(x) dx$ és calcula fàcilment pel mètode de descomposició.
Per calcular $\int \frac{R(x)}{T(x)} dx$ és el mateix cas que si grau P(x) < grau T(x). Llavors ens podem trobar amb una integral d'aquest tipus:

a) Denominador de grau 1

Llavors tenim $\int \frac{k}{ax+b} dx$ que és immediata i val $\frac{k}{a} \ln(ax+b)$

b) Denominador de grau ≥ 2 factoritzable en arrels reals i simples

Factoritzem el denominador on

$$T(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)....(x-\alpha_n) a_n$$

on a_n és el coeficient del terme de major grau del denominador.

La fracció $\frac{R(x)}{T(x)}$ es pot escriure com

$$\frac{R(x)}{T(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha_1)} + \frac{A_2}{(x-\alpha_2)} + ... + \frac{A_n}{(x-\alpha_1) a_n}$$

on podem calcular cadascuna de les A_i mitjançant un sistema i així ens quedaran tot d'integrals immediates

Exemple

Calcula la integral $\int \frac{4x+3}{x^2-x-2}dx$

Les arrels del denominador són x=2 i x= -1, per tant

$$\frac{4x+3}{x^2-x-2}=\frac{A_1}{(x-2)}+\frac{A_2}{(x+1)}=\frac{A_1(x+1)+A_2(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{(A_1+A_2)x+A_1-2A_2}{(x-2)(x+1)}$$

igualant el numerador grau a grau tenim

$$\begin{matrix} A_1+A_2=4 \\ A_1-2A_2=3 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} A_1=\frac{11}{3} \\ A_2=\frac{1}{3} \end{matrix}$$ així ens queda

$$\int \frac{4x+3}{x^2-x-2}dx=\int \frac{11/3}{(x-2)}dx+\int \frac{1/3}{(x+1)}dx=\frac{11}{3}\ln(x-2)+\frac{1}{3}\ln(x+1)$$

Si tenim alguna arrel amb multiplicitat m la descomposició per aquesta arrel serà

$$\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{(x-\alpha)^2}+\frac{C}{(x-\alpha)^3}+....+\frac{Z}{(x-\alpha)^m}$$

Exercici

- Calcula $\int \frac{2x-1}{x^3-3x+2}dx$. *Resp* $\frac{-1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3}\ln|x-2|+C$

c) Denominador de grau 2 sense arrels reals i numerador constant

Tenim una integral del tipus $\int \frac{k}{ax^2+bx+c}dx$ amb arrels complexes p + qi i p - qi, llavors

$$\int \frac{k}{ax^2+bx+c}dx=\frac{k}{a}\int \frac{1}{(x-p)^2+q^2}dx$$

que amb un canvi de variable q t = x - p obtenim una integral immediata, on el seu resultat és l'arc tangent

d) Denominador de grau 2 sense arrels reals i numerador de grau 1

Són del tipus $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$, en aquest cas hem de trobar dos coeficients A i B tal que

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx = A\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + B\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx =$$
$$A\ln(ax^2+bx+c) + B\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

on la segona integral $B\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$ és del tipus c)

Exemple

Calcula $\int \frac{8x+6}{4x^2+4x+5}dx$

Les arrels del denominador són -1/2 ± i, per tant

$$\int \frac{8x+6}{4x^2+4x+5}dx = \int \frac{8x+4}{4x^2+4x+5}dx + 2/4\int \frac{dx}{(x+1/2)^2+1} = \ln(4x^2+4x+5) + \frac{1}{2}arctg(x+1/2)$$

Exercicis

- Calcula $\int \frac{4x^3+2x-1}{2x+1}dx$. *Resp.* $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}\ln|2x+1| + C$
- Calcula $\int \frac{4}{x^2-2x+2}dx$. *Resp.* $4\,arctg(x-1)+C$
- Calcula $\int \frac{x^3}{x^2+4x-5}dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{1}{6}(\ln|x-1| + 125\ln|x+5|) + C$