DERIVADES

1.1 Gràfica d'una funció

Per representar gràficament una funció caldrà la informació següent:

- Domini i discontinuïtats de la funció

  Aquí mirarem el tipus de funció de què es tracta. Per exemple, si és una funció polinòmica, el seu domini serà R i serà contínua a tots els punts. Si tenim una funció racional caldrà tenir en compte els valors de x que anul·len el denominador.

- Asímptotes

  Recordem que una recta $y = a$ es diu que és una asímptota horitzontal de la gràfica d'una funció $f(x)$ si:
  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$$
  o bé si:
  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$
  De manera similar, les asímptotes verticals d'una funció $f(x)$ són les rectes d'equació $x = a$, on a són els valors per als quals $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

- Punts de tall amb el eixos de coordenades

  Els punts de tall amb l'eix d'abscisses els trobarem resolent l'equació $f(x) = 0$. El punt de tall amb l'eix de coordenades l'obtindrem calculant $f(0)$, en el supòsit que la funció estigui definida per a $x = 0$.

- Màxims i mínims. Creixement i decreixement. Concavitat i convexitat. Punts d'inflexió.

  Aquests punts els obtindrem seguint les regles que acabem de tractar en les últimes seccions.

Exemples

1) Representem gràficament la funció: $f(x) = x^2 - x^4$

   - $Dom(f) = R$
   - No té asímptotes, ja que és una funció polinòmica.
   - Punts de tall amb els eixos:

- Eix d'abscisses:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow x^2(1 - x^2) = 0 \Rightarrow$$

$$x = -1, x = 0, x = 1$$

  Els punts de tall són $(-1, 0), (0, 0), (1, 0)$

- Eix d'ordenades:

$$f(0) = 0$$

  El punt de tall és, doncs, el $(0, 0)$

- Màxims i mínims. Punts d'inflexió. Concavitat i convexitat.
  - Màxims i mínims.

$$f'(x) = 2x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 2x(1 - 2x^2) = 0 \Rightarrow$$

$$x = 0, \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

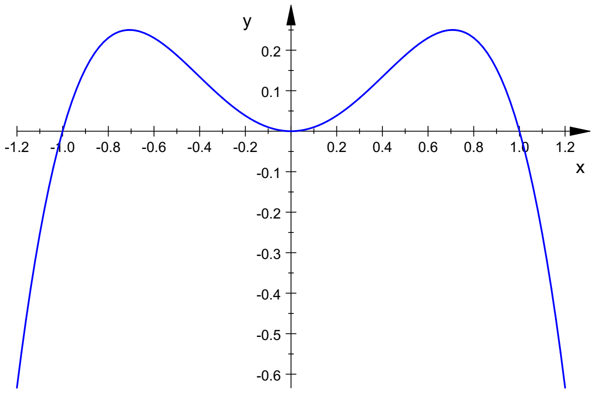
    Cal estudiar ara el creixement de la funció al voltant d'aquests tres punts:
    * Al voltant del punt $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(-1) > 0$ i $f'(-\frac{1}{2}) < 0$. La funció creix a l'esquerra de $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ i decreix a la seva dreta. Per tant, en el punt $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ la funció presenta un màxim.
    * Al voltant del punt $x = 0$, $f'(-\frac{1}{2}) > 0$ i $f'(\frac{1}{2}) > 0$. La funció decreix a l'esquerra de $x = 0$ i creix a la seva dreta. Per tant, en el punt $x = 0$ la funció presenta un mínim.
    * Al voltant del punt $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(\frac{1}{2}) > 0$ i $f'(1) < 0$. La funció creix a l'esquerra de $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i decreix a la seva esquerra. Per tant, en el punt $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ la funció presenta un màxim.
  - Punts d'inflexió

    Busquem els punts on s'anul·la la segona derivada:

$$f''(x) = 2 - 12x^2 = 0, \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{6}}; \quad x = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

    Ara estudiarem el signe de f'' al voltant d'aquests punts:
    * A l'esquerra de $x = -\frac{1}{\sqrt{6}}$: $f''(-1) = -10 < 0 \quad \Rightarrow f$ és convexa en $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{6}})$.
    * Entre $x = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ i $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$: $f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow f$ és còncava en $(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$
    * A la dreta de $x = -\frac{1}{\sqrt{6}}$: $f''(1) = -10 < 0 \Rightarrow f$ és convexa en $(\frac{1}{\sqrt{6}}, +\infty)$.

    Per tant en els punts $x = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ i $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$ hi ha dos punts d'inflexió.



2) Representem gràficament: $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$

- La funció no està definida en $x = 0$, on hi ha una discontinuïtat asimptòtica vertical.
- Asímptotes horitzontals:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x^2} = 0 \, , \lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x^2} = 0.$$

  Per tant, la recta $y = 0$ és una asímptota horitzontal.
- Punts de tall amb els eixos de coordenades:
  - Punts de tall amb l'eix d'abscisses:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x^2} = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

    Hi ha un punt de tall: $(-1, 0)$.
  - Punts de tall amb l'eix d'ordenades:

    Com que la funció no està definida en $x = 0$, no hi ha punt de tall amb l'eix d'ordenades.
- Punts crítics
  - Màxims i mínims:

$$f'(x) = \frac{-x-2}{x^3} = 0 \Rightarrow x = -2$$

    Comprovem el creixement de la funció al voltant d'aquest punt:

    Per $x = -3$ és $f'(-3) < 0$ i per $x = -1$, és $f'(-1) > 0$. Per tant, la funció decreix a l'esquerra de $x = -2$ i creix a la seva dreta. Al punt $x = -2$ la funció presenta un mínim.
  - Punts d'inflexió:

$$f''(x) = \frac{2x+6}{x^4} = 0 \ \Rightarrow \ 2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3$$

    Cal observar el signe de f'' al voltant de $x = -3$.

    Com que $f''(-4) < 0$, la funció és convexa en $(-\infty, -3)$.

    Com que $f''(-1) > 0$, la funció és còncava en $(-3, 0)$.

    Per tant, la funció passa de convexa a còncava en $x = -3$ i en aquest punt hi ha un punt d'inflexió.