DERIVADES

1.1 Màxims i mínims relatius

Definicions

Una funció $f(x)$ té un màxim relatiu al punt x_0 si en un entorn de x_0 es verifica que $f(x) < f(x_0)$, per a tot punt x d'aquest entorn.

Una funció $f(x)$ té un mínim relatiu al punt x_0 si en un entorn de x_0 es verifica $f(x) > f(x_0)$, per a tot punt x d'aquest entorn.

De la definició anterior podem deduir que, si tenim un màxim relatiu en el punt x_0, hi haurà un entorn de x_0 tal que a l'esquerra d'aquest punt la funció serà creixent i a la dreta la funció serà decreixent. Si la funció és derivable en x_0, aquesta derivada serà zero.

D'una manera anàloga, si una funció $f(x)$ té un mínim relatiu en el punt x_0, hi haurà un entorn de x_0 tal que la funció passarà de decreixent a l'esquerra de x_0 a creixent a la dreta d'aquest punt, i si la funció és derivable en aquest punt, la seva derivada ha de ser nul·la.

Els punts màxims i mínims relatius s'anomenen *punts crítics.*

Definició

Definim *màxim absolut* d'una funció $f(x)$ en un interval I com el punt $x_0 \in I$ tal que $f(x_0) \geq f(x), \forall\ x \in I$. D'una manera similar es defineix *mínim absolut* d'una funció en un interval, com el punt $x_0 \in I$ tal que $f(x_0) \leq f(x), \forall\ x \in I$.

Els candidats per ser màxims i mínims absoluts d'una funció en un interval I seran:

- Els punts crítics de $f(x)$ continguts a I.
- Els extrems de l'interval I.
- Els punts de I en els quals la funció $f(x)$ no és derivable.

Exemples

1) Busquem els màxims i mínims relatius de $f(x) = -x^4 + 2x^2$.

- Primer calculem la derivada: $f'(x) = -4x^3 + 4x$.
- Calculem els punts en què s'anul·la la derivada: $f'(x) = 0 \Rightarrow 4x(1-x^2) = 0$. Les solucions són: $x = 0, x = -1, x = 1$.
- Per decidir si són màxims o mínims relatius, mirem el signe de f' al voltant de cada un dels punts.
  - $x = -1$. A l'esquerra del punt $x = -1$, $f' > 0$, i per tant f és creixent. A la dreta del punt $x = -1$, $f' < 0$ i per tant f és decreixent. Per tant, a $x = -1$, hi ha un màxim relatiu.
  - $x = 0$. Raonant d'una manera anàloga, és fàcil comprovar que hi ha un mínim a $x = 0$.
  - $x = 1$. Hi ha un altre màxim relatiu a $x = +1$.

2) Busquem els màxims i mínims relatius de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.

   Domini de la funció: $R - \{-1, 1\}$.

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$x^4 - 3x^2 = 0, \Rightarrow x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$$

   Si estudiem el signe de f als voltants dels punts anteriors, trobem que en el punt $x = -\sqrt{3}$ hi ha un màxim relatiu.

   A $x = \sqrt{3}$ hi ha un mínim relatiu, mentre que al punt $x = 0$ trobem que el signe de f' és el mateix tant a l'esquerra com a la dreta del punt, en aquest cas negatiu. Aquest punt rep el nom de *punt d'inflexió* i més endavant l'estudiarem amb més detall.

3) Busquem els màxims i mínims absoluts de $f(x) = x^2$ en l'interval $[2, 3]$.

   Tenim $f'(x) = 2x$. L'únic punt on s'anul·la la derivada és $x = 0$, que no pertany en l'interval. Com que no hi ha punts no derivables, hem de buscar els màxims i mínims absoluts als extrems de l'interval.

   Com que $f'(x) > 0$ en l'interval, la funció és creixent i per tant, el mínim absolut serà a $x = 2$, amb $f(2) = 4$; i el màxim absolut serà a $x = 3$, amb $f(3) = 9$.