DERIVADES

1.1 Creixement i decreixement

Definicions

Diem que una funció és creixent en un interval $[a, b]$ si per a valors x, y de l'interval tals que $x < y$ es compleix que $f(x) \leq f(y)$.

Direm que una funció és decreixent en un interval $[a, b]$ si per a valors x, y de l'interval tals que $x < y$ es compleix que $f(x) \geq f(y)$.

Tenint en compte la definició de derivada, si una funció és creixent en un interval i és derivable en l'interval, llavors $f'(x) \geq 0$. Recíprocament, si $f'(x) > 0$ en un interval, la funció és creixent en aquest interval.

Anàlogament, si una funció és decreixent en un interval i és derivable en l'interval, llavors $f'(x) \leq 0$. Recíprocament, si $f'(x) < 0$ en un interval, la funció és decreixent en aquest interval.

Observem que una funció pot ser creixent (o decreixent) en un interval i, tot i això, la seva derivada pot ser igual a 0 en algun punt de l'interval.

Exemples

1) $f(x) = x$ és creixent en tota la recta real, ja que $f'(x) = 1 > 0$.

2) Busquem els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x) = x^2 + 1$.

   $f'(x) = 2x$. Per tant, si $x > 0$, llavors $f'(x) > 0$. En conseqüència, la funció és creixent en $(0, \infty)$. De manera anàloga, tindríem que la funció és decreixent en $(-\infty, 0)$.

3) Estudiem els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$.

   La derivada val: $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1)$. Per tant:

   a) Si $x < -1$, $f'(x) < 0$ i f decreix en $(-\infty, -1)$.
   b) Si $-1 < x < 0$, $f'(x) > 0$ i f creix en $(-1, 0)$.
   c) Si $0 < x < 1$, $f'(x) < 0$ i f decreix en $(0, 1)$.
   d) Si $1 < x < \infty$, $f'(x) > 0$ i f creix en $(1, \infty)$.