Integral d’una funció

Integral d'una funció

Els conceptes de *primitiva* i *integral indefinida*

La integració d'una funció és el pas invers de la derivació d'una funció.

Per definir correctament la integral d'una funció, s'ha de definir una primitiva d'una funció:

si $f(x)$ és la derivada de $F(x)$ llavors, $F(x)$ és una primitiva de $f(x)$

Per expressar la integració d'una funció s'utilitza un símbol, $\int$, anteposat a la funció, i el símbol dx (denominat diferencial de x) després de la funció, és a dir, la integral indefinida d'una funció s'expressa

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

essent $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ i c una constant, és a dir, un nombre qualsevol.

Per exemple

$$\int \left(3x^2 + 5\right) dx = x^3 + 5x + c$$

ja que la derivada de $x^3 + 5x$ és $3x^2 + 5$, per tant, $x^3 + 5x$ és una primitiva dem $3x^2 + 5$.

Taula de les integrals immediates

$f(x)$	$\int f(x)dx$	Exemples
k essent k un nombre	$kx + c$	$f(x) = 3$ $\int f(x)dx = 3x + c$
x	$x^2/2 + c$	
x^n essent n un nombre enter diferent de -1	$x^{n+1}/(n + 1) + c$	$f(x) = x^3$ $\int f(x)dx = x^4/4 + c$
$1/x$	$\ln \lvert x\rvert + c$	
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 + c$	
$\cos x$	$\sin x + c$	
$\sin x$	$-\cos x + c$	
$\tan x$	$-\ln(\cos x) + c$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{arc sin } x + c$	
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{arc cos } x + c$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{arc tan } x + c$	
a^x	$a^x/\ln a$	$f(x) = 3^x$ $\int f(x)dx = 3^x/\ln 3 + c$ $g(x) = e^x$ $\int g(x)dx = e^x + c$
$\log_a x$	$\frac{x(\ln x - 1)}{\ln a} + c$	$f(x) = \log_3 x$ $\int f(x)dx = \frac{x(\ln x - 1)}{\ln 3} + c$ $g(x) = \ln x$ $\int g(x)dx = x \cdot (\ln x - 1) + c$

Regles d'integració

- La integral de la suma de funcions és igual a la suma de la integral de les funcions.

$$\int \left(f(x)+g(x) \right) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

- La integral del producte d'un nombre per una funció és igual al producte del nombre per la integral de la funció.

$$\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx$$

- Si $g(x) = \int f(x)dx \rightarrow g'(x) = f(x)$

- La regla de la cadena (és a dir, $(fog)' = (f'og) \cdot g'$) ens permet escriure que:

$$\int (f'og)(x)g'(x)dx = (fog)(x)$$

Generalització de la taula d'integrals immediates	
Integral	Exemple
$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$ si $n \neq 1$	$\int [\sin x]^4 \cdot \cos dx = \frac{[\sin x]^5}{5} + c$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\|f(x)\| + c$	$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+13} dx = \ln\left(x^2-3x+13\right) + c$
$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + c$	$\int e^{4x^2+3x-2} \cdot (8x+3)\, dx = e^{4x^2+3x-2} + c$
$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$	$\int 5^{4x^2+3x-2} \cdot (8x+3)\, dx = \frac{5^{4x^2+3x-2}}{\ln 5} + c$
$\int f'(x) \cdot \sin\left(f(x)\right) dx = -\cos\left(f(x)\right) + c$	$\int \cos x \cdot \sin\left(\sin x\right) dx = -\cos\left(\sin x\right) + c$
$\int f'(x) \cdot \cos\left(f(x)\right) dx = \sin\left(f(x)\right) + c$	$\int 6 \cdot \cos\left(6x-2\right) dx = \sin\left(6x-2\right) + c$
$\int \frac{f'(x)}{1+\left(f(x)\right)^2} dx = \arctan\left(f(x)\right) + c$	$\int \frac{1/x}{1+\left(\ln x\right)^2} dx = \arctan\left(\ln x\right) + c$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-\left(f(x)\right)^2}} dx = \arcsin\left(f(x)\right) + c$	$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-\left(e^x\right)^2}} dx = \arcsin\left(e^x\right) + c$

Mètodes d'integració

- Mètode de substitució

Si F és una primitiva de la funció f, i g una altra funció, sabem per la regla de la cadena:

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt = F(g(t)) = F(x) = \int f(x)dx$$

essent $x = g(t)$

Així, doncs, la fórmula del mètode d'integració per substitució és:

$$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt \text{ amb } x = g(t)$$

- Mètode d'integració per parts

Si f i g són dues funcions, la derivada del seu producte és igual a:

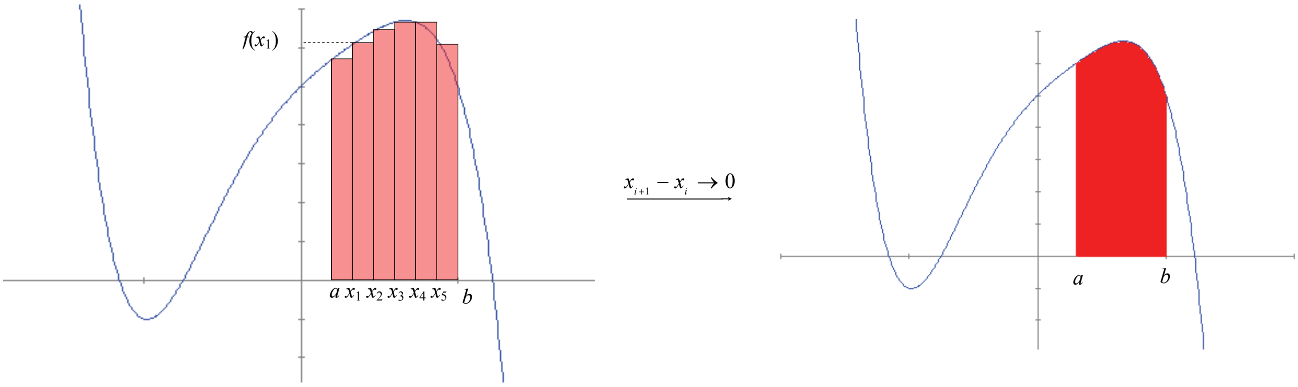
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \qquad \rightarrow \qquad f \cdot g' = (f \cdot g)' - f' \cdot g$$

i, per tant, integrant en ambdues parts

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$$

La integral definida d'una funció

La integral indefinida d'una funció permet trobar l'àrea d'una funció i l'eix X, entre dos extrems *a i b*. Per trobar-la, s'ha de calcular el límit de la suma dels rectangles de la imatge, quan la seva base tendeix a 0:



Aquesta àrea s'expressa de la manera següent, i aquesta és la seva definició:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x_{i+1}-x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot\left(x_{i+1} - x_i\right)$$

Relació entre la integral indefinida i la integral definida

La integral definida es pot calcular a partir d'una primitiva de la funció de la manera següent: si F(x) és una primitiva de $f(x)$, llavors:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

per exemple:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$$

ja que una primitiva de x^2 és $\frac{x^3}{3}$.

En què consisteix el procés d'integració d'una funció?

> La integració d'una funció és un procés íntimament relacionat amb la derivació; de fet, es tracta del pas contrari de la derivació. La integració, a més, té múltiples aplicacions, entre les quals es destaca el càlcul d'àrees delimitades per una funció.

Donada una funció, f, és possible trobar la seva derivada, f', utilitzant la taula de derivades i les regles pertinents. Aquesta transformació suggereix una pregunta: donada una funció, f, és possible trobar una funció, F, la derivada de la qual sigui la funció inicial, f, és a dir, $F'(x) = f(x)$? Per exemple, donada la funció $f(x) = 3x^2 + 5$, podem trobar una funció, F, la derivada de la qual sigui precisament $f(x)$? En aquest cas, és fàcil comprovar que la funció $F(x) = x^3 + 5x$ té com a derivada $F'(x) = 3x^2 + 5 = f(x)$. Per tant, la resposta en aquest exemple és que sí.

Podríem trobar una altra funció que complís la mateixa condició? No és difícil adonar-se que la funció $G(x) = x^3 + 5x + 3$ també té com derivada $f(x)$; en general, tota funció de la forma $x^3 + 5x + c$ (on c és un nombre) té la mateixa derivada (ja que la derivada de c sempre serà 0).

Una procés de aquest tipus es denomina integració de f i a la funció resultant es denomina primitiva de f; és a dir, la integració és la operació contrària a la derivació:

si $f(x)$ és la derivada de $F(x)$ llavors, $F(x)$ és una primitiva de $f(x)$

Així, podem afirmar que tota funció de la forma $F(x) + c$ (on c és un nombre) també és una primitiva de $f(x)$. El conjunt de totes les primitives d'una funció f es denomina integral indefinida o, simplement, integral de la funció f. Així, per exemple, la integral de la funció $f(x) = 3x^2 + 5$ és $x^3 + 5x + c$ (essent c un nombre) perquè qualsevol primitiva de la funció $f(x)$ s'escriurà d'aquesta forma; és a dir, l'única diferència entre una primitiva d'aquesta funció i una altra serà el seu *terme independent*. Per expressar la integració d'una funció s'utilitza un símbol, $\int$, anteposat a la funció, i el símbol dx (denominat diferencial de x) després de la funció, és a dir, la integral indefinida d'una funció s'expressa així:

$$\int f(x)dx$$

Així, doncs, l'exemple anterior podem expressar-lo així:

$$\int \left(3x^2 + 5\right) dx = x^3 + 5x + c$$

Aquesta és la taula amb algunes integrals elementals, anomenada també taula d'integrals immediates (on c és un nombre qualsevol):

Taula de les integrals immediates		
$f(x)$	$\int f(x)dx$	Exemples
k essent k un nombre	$kx + c$	$f(x) = 3$ $\quad \int f(x)dx = 3x + c$
x	$x^2/2 + c$	
x^n essent n un nombre enter diferent de –1	$x^{n+1}/(n + 1) + c$	$f(x) = x^3$ $\quad \int f(x)dx = x^4/4 + c$
$1/x$	$\ln \lvert x \rvert + c$	
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 + c$	
$\cos x$	$\sin x + c$	
$\sin x$	$-\cos x + c$	
$\tan x$	$-\ln(\cos x) + c$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{arc sin } x + c$	
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{arc cos } x + c$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{arc tan } x + c$	
a^x	$a^x/\ln a$	$f(x) = 3^x$ $\quad \int f(x)dx = 3^x/\ln 3 + c$ $g(x) = e^x$ $\quad \int g(x)dx = e^x + c$
$\log_a x$	$\frac{x(\ln x - 1)}{\ln a} + c$	$f(x) = \log_3 x$ $\quad \int f(x)dx = \frac{x(\ln x - 1)}{\ln 3} + c$ $g(x) = \ln x$ $\quad \int g(x)dx = x \cdot (\ln x - 1) + c$

Quines són les regles de la integració i com influeixen en el càlcul de primitives?

> Les regles principals de la integració són la de la suma de funcions, la del producte d'un nombre per una funció i la de la composició de funcions. Aquestes regles permeten generalitzar la taula d'integrals immediates.

El càlcul de la primitiva d'una funció qualsevol no és tan senzill com el de la derivada, ja que les úniques regles immediates que s'hi poden aplicar són:

- La integral de la suma de funcions és igual a la suma de la integral de les funcions.

$$\int \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

- La integral del producte d'un nombre per una funció és igual al producte del nombre per la integral de la funció.

$$\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx$$

En un exemple anterior ja s'havien aplicat ambdues regles:

$$\int\left(3x^2+5\right)dx=\int 3x^2dx+\int 5dx=3\int x^2dx+5x=x^3+5x+c$$

- Evidentment:

  si $g(x)=\int f(x)dx \rightarrow g'(x)=f(x)$

- La regla de la cadena (és a dir, $(fog)'=(f'og)\cdot g'$) ens permet escriure que:

$$\int (f'og)(x)g'(x)dx=(fog)(x)$$

utilitzant la propietat anterior. D'aquesta manera, es pot generalitzar la taula anterior:

Generalització de la taula d'integrals immediates	
Integral	Exemple
$\int [f(x)]^n\cdot f'(x)dx=\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+c$ si $n\neq 1$	$\int [\operatorname{sen}x]^4\cdot\cos dx=\frac{[\sin x]^5}{5}+c$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln\lvert f(x)\rvert+c$	$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+13}dx=\ln\left(x^2-3x+13\right)+c$
$\int e^{f(x)}\cdot f'(x)dx=e^{f(x)}+c$	$\int e^{4x^2+3x-2}\cdot\left(8x+3\right)dx=e^{4x^2+3x-2}+c$
$\int a^{f(x)}\cdot f'(x)dx=\frac{a^{f(x)}}{\ln a}+c$	$\int 5^{4x^2+3x-2}\cdot\left(8x+3\right)dx=\frac{5^{4x^2+3x-2}}{\ln 5}+c$
$\int f'(x)\cdot\sin\left(f(x)\right)dx=-\cos\left(f(x)\right)+c$	$\int \cos x\cdot\sin\left(\sin x\right)dx=-\cos\left(\sin x\right)+c$
$\int f'(x)\cdot\cos\left(f(x)\right)dx=\sin\left(f(x)\right)+c$	$\int 6\cdot\cos\left(6x-2\right)dx=\sin\left(6x-2\right)+c$
$\int \frac{f'(x)}{1+\left(f(x)\right)^2}dx=\arctan\left(f(x)\right)+c$	$\int \frac{1/x}{1+\left(\ln x\right)^2}dx=\arctan\left(\ln x\right)+c$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-\left(f(x)\right)^2}}dx=\arcsin\left(f(x)\right)+c$	$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-\left(e^x\right)^2}}dx=\arcsin\left(e^x\right)+c$

En l'actualitat, hi ha programes informàtics que calculen les derivades i integrals de la major part de les funcions usuals, la qual cosa facilita en gran mesura l'aplicació pràctica d'aquests conceptes i les seves múltiples aplicacions.

Quins mètodes es poden utilitzar per integrar una funció?

> Tot i que hi ha mètodes per integrar funcions, s'ha de subratllar que no sempre és possible trobar l'expressió algebraica que es correspon amb aquesta integral. En qualsevol cas, els mètodes més habituals són el mètode de substitució i el mètode d'integració per parts.

La major part d'integrals indefinides que es poden plantejar, excepte les immediates, requereixen un llarg i metòdic procés per arribar a resoldre-les. Però no sempre és possible trobar una expressió algebraica que resolgui la integral plantejada. Els mètodes usuals per trobar la integral d'una funció, tot i que no sempre és possible trobar-la (per simplificar, en aquest apartat, en lloc de $\int f(x)dx$, s'utilitzarà simplement $\int f$):

- Mètode de substitució

Si F és una primitiva de la funció *f*, és a dir, $\int f(x)dx = F(x) + c$, i *g* una altra funció, sabem per la regla de la cadena que:

(F*og*)' = (F'*og*) · *g*'

per la qual cosa,

$$\int (F'og) \cdot g' = Fog$$

és a dir,

$$\int (fog) \cdot g' = Fog$$

o el que és el mateix

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt = F(g(t)) = F(x) = \int f(x)dx$$

essent $x = g(t)$

Per tant, la fórmula del mètode d'integració per substitució és:

$$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt \text{ amb } x = g(t)$$

Per exemple, si es vol calcular la integral

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

es pot fer el canvi $x = \sin t$, per tant, dx = cos t dt (que és una manera diferent de dir que la derivada de x és $g'(t) = \cos t$, de manera que apareixen directament dx i dt, el diferencial de x i el diferencial de t). Així, doncs,

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$$

amb la qual cosa, recordant que $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos t \cdot \cos t dt = \int \cos^2 t dt =$$
$$= \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t dt =$$
$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\frac{\sin 2t}{2} + c = \frac{1}{2}t + \frac{2\sin t \cdot \cos t}{4} + c$$

Desfent el canvi, tenim que t = arc sin x:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + c$$

Un altre exemple:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx$$

sigui $t = \ln x$ i, per tant, dt = $\dfrac{1}{x}dx$. Així, doncs:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

- Mètode d'integració per parts

Si *f* i *g* són dues funcions, sabem que la derivada del seu producte és igual a:

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Aquesta expressió es pot modificar així:

$f \cdot g' = (f \cdot g)' - f' \cdot g$

i integrant ambdós membres:

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx = \int \left((f(x)\cdot g(x))' - f'(x)\cdot g(x) \right) dx \text{ és a dir,}$$

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)dx$$

que es correspon amb la fórmula d'integració per parts. Aquesta fórmula s'ha d'aplicar quan la integral del membre de la dreta sigui més senzilla que la de l'esquerra (per això, aquesta última s'ha de descompondre en el producte de dues funcions, una d'elles, *g*', ha de ser la derivada d'una altra funció *g* i, a més, fàcil de trobar).

Per exemple, si es vol resoldre aquesta integral $\int xe^x dx$, podem fer la descomposició següent:

$f(x) = x$ per tant, $f'(x) = 1$

$g'(x) = e^x$ per tant, $g(x) = \int e^x dx = e^x$

Com que tenim tots els components de la integració per parts, podem fer el següent:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1\cdot e^x dx$$

d'aquesta manera, la integral de la dreta es pot fer de manera immediata:

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + c = e^x\left(x-1\right) + c$$

Un altre exemple: $\int \ln x dx$

En aquest cas:

$f(x) = \ln x$ i $f'(x) = 1/x$

$g'(x) = 1$ i $g(x) = x$

(de vegades, per abreujar, s'utilitzen les variables u i v en lloc de *f* i *g* per expressar aquest canvi, i en lloc de *f'* y *g'* s'usen du i dv, d'aquesta manera:

$u = \ln x$ i $du = 1/x\ dx$

$dv = \mathrm{dx}$ i $v = x$)

per tant,

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int \frac{1}{\cancel{x}}\cancel{x}dx = x\ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

De vegades el procés d'integració per parts té un desenvolupament curiós. Per exemple, per calcular la integral $\int e^x \operatorname{sen} x dx$ s'utilitza aquest mètode, de manera que

$f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$

$g'(x) = \sin x$ $g(x) = -\cos x$

per tant,

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

ara, es torna a aplicar el mètode d'integració per parts a aquesta última integral, essent

$f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$

$h'(x) = \cos x$ $h(x) = \sin x$

per tant,

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

si substituïm aquest valor en el pas anterior:

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

podem passar $\int e^x \sin x dx$ al primer membre

$$2\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

és a dir,

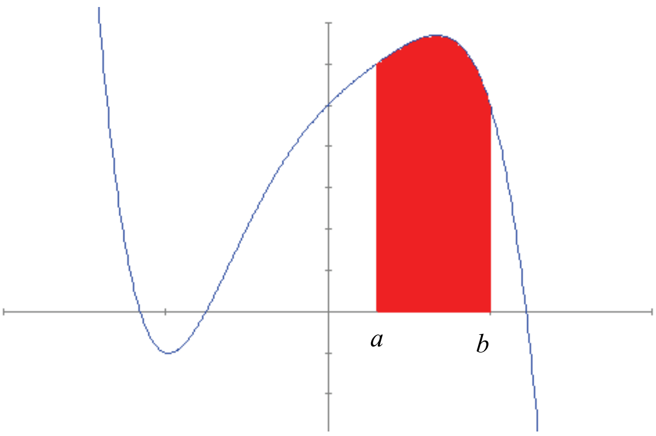
$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$$

Com s'ha pogut observar, l'aplicació successiva de la regla de la cadena, en aquest cas, ha permès calcular el valor de la integral de manera indirecta.

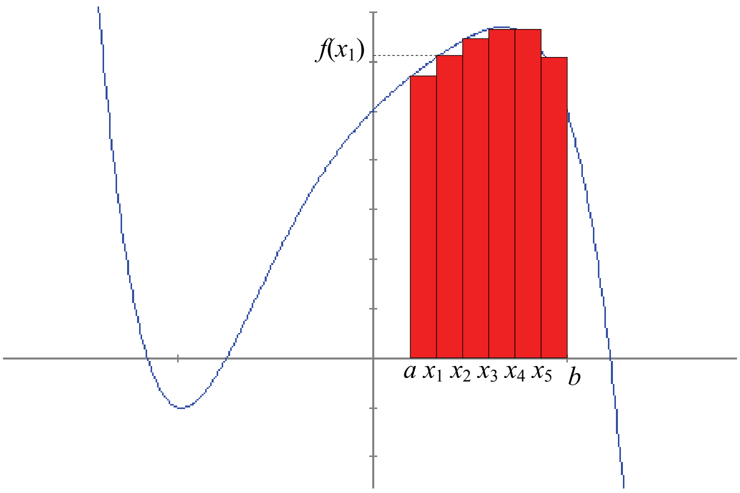
Què és la integral definida d'una funció?

> La integral definida neix de la necessitat de calcular l'àrea tancada per una funció i l'eix X en cert interval. Aquesta àrea es pot aproximar sumant certs rectangles, la base dels quals sigui constant, i l'altura dels quals sigui el valor de la funció en certs punts escollits convenientment. El límit d'aquest càlcul quan la base d'aquests rectangles tendeix a 0 és igual a la integral definida d'aquesta funció en aquest interval, és a dir, l'àrea que s'estava buscant.

En ocasions cal calcular l'àrea limitada per una funció i l'eix X, tal com es mostra en aquesta imatge:



Si aquesta funció és $f(x)$, l'àrea que tanca la gràfica entre els punts a i b es pot aproximar per l'àrea d'aquests rectangles:



És a dir, podem aproximar l'àrea de la funció entre a i b dividint l'interval en diversos punts, $a = x_0$, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 i $b = x_6$, i calculant l'àrea dels rectangles de la il·lustració anterior; per exemple, l'àrea del rectangle de base entre x_1 i x_2, i d'altura

$f(x_1)$, ha de ser igual a $f(x_1) \cdot (x_2 - x_1)$. En general, doncs, l'àrea de la funció es pot aproximar de la manera següent:

$$A \cong \sum_{i=0}^{5} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

essent $\sum_{i=0}^{5}$ el símbol de sumatori, i indica que s'ha de sumar des que $i = 0$, fins que $i = 5$, l'expressió que ve a continuació (que correspon amb l'àrea d'un dels petits rectangles de la il·lustració).

Evidentment, com més rectangles es construeixin, el resultat serà més pròxim al valor de l'àrea de la funció en l'interval (a, b). Doncs bé, l'àrea de la funció $f(x)$ en un interval (a, b) és exactament igual a aquest límit

$$A = \lim_{x_{i+1} - x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

és a dir, el límit quan la diferència entre una x i la següent tendeix a 0 és, com ja s'havia avançat, l'àrea de la funció. Aquest límit, normalment, s'escriu en forma d'integral, quan la funció f és positiva:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x_{i+1} - x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

on a *i* b es denominen límits d'integració. Aquesta expressió rep el nom d'*integral definida* d'extrems a i b.

Com es calcula la integral definida a partir d'una primitiva de la funció?

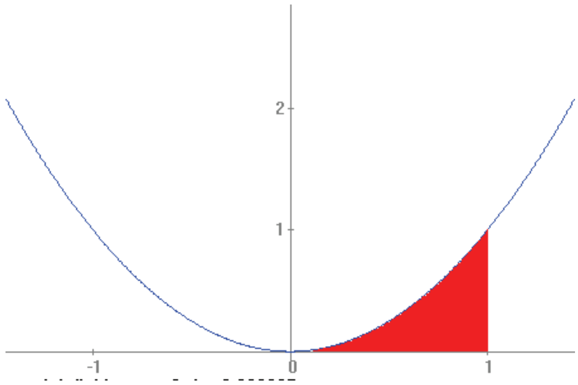
> La integral indefinida i la integral definida utilitzen els mateixos símbols, excepte els límits d'integració. Aquest fet revela l'íntima relació d'ambdós conceptes, que es plasma en el càlcul de la integral definida d'una funció: la integral definida d'una funció és igual a la diferència de qualsevol funció primitiva en els límits d'integració:
>
> $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Es pot comprovar com tant la integral definida com la indefinida utilitzen pràcticament els mateixos símbols, amb la diferència dels límits d'integració que utilitza la integral definida. Això no és casual, perquè la integral definida es pot calcular a partir d'una primitiva de la funció de la manera següent; és a dir, si $F(x)$ és una primitiva de $f(x)$, llavors,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

i aquesta expressió es denomina *integral definida*. La demostració d'aquest fet no és senzilla. En qualsevol cas, l'origen del símbol integral és una S allargada, indicant que es tracta d'un sumatori, mentre que l'origen del símbol diferencial, dx, prové del fet que es tracta de diferències de x (prenent la inicial de "diferència" juntament amb la x, resulta precisament dx).

Per exemple, si $f(x) = x^2$, per calcular l'àrea que forma aquesta funció positiva en l'interval (0, 1), és a dir,



s'ha de calcular la integral definida següent:

$$\int_0^1 x^2 dx$$

en primer lloc, doncs, s'integra x^2

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

Per tant, si es tria la primitiva més senzilla, és a dir, $x^3/3$:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$$

El resultat es dóna en les unitats pròpies del sistema de coordenades (per exemple, si el sistema de coordenades és en cm, el resultat es dóna en cm^2).

Així, doncs, es pot assegurar que l'àrea entre l'eix X i la funció x^2 en l'interval [0,1], és igual a 1/3.

Vegem que, en aquest cas, la integral definida coincideix amb la diferència de la primitiva en els límits d'integració. Apliquem, en primer lloc, la definició d'integral definida, en el cas que ens ocupa:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \lim_{x_{i+1}-x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \cdot \left(x_{i+1} - x_i\right)$$

podem prendre n intervals iguals d'amplària $1/n$; per tant, els valors de la funció seran de la forma i/n, Així, doncs:

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} i^2 \frac{1}{n^3} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n} i^2$$

Tenint en compte que $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (fet que comprovarem en l'apartat següent) obtenim

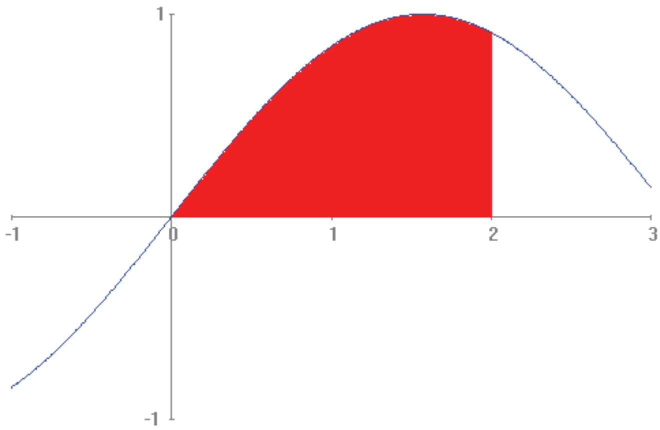
$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

Tal com s'havia obtingut amb el càlcul de la diferència d'una primitiva en els límits d'integració.

Un altre exemple: si volem calcular l'àrea de la funció sin x entre els valors [0,2], és a dir,

$$\int_0^2 \sin x dx$$

és a dir,



s'ha de calcular, en primer lloc, la integral del sin x

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

La primitiva més senzilla és –cos x; per tant,

$$\int_0^2 \sin x dx = -\cos x\Big|_0^2 = -\cos 2 + \cos 0 \simeq -(-0,41615)+1=1,41615$$

Quin és el valor de la suma $\sum_{i=0}^{n} i^2$?

> Per fer la suma de diversos termes d'una successió hi ha mètodes i fórmules parcials que ajuden en la seva recerca. Per trobar $\sum_{i=0}^{n} i^2$ cal saber que $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Amb aquesta suma, i realitzant la resta de diversos parells de cubs consecutius, s'arriba a la fórmula desitjada.

Es tracta d'obtenir el resultat de la suma

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

primer hem d'observar que

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

això és així perquè si sumem, alternativament, el primer i l'últim element de la successió el resultat és sempre n:

$$\overbrace{0+\underbrace{1+\overbrace{2+\underbrace{3+\ldots+(n-3)}_{3+(n-3)=n}+(n-2)}^{2+(n-2)=n}+(n-1)}_{1+(n-1)=n}+n}^{0+n=n}$$

i això es repeteix (n+1)/2 vegades; per tant, el resultat és l'avançat anteriorment.

A més, veiem que sempre es compleix que, sigui quin sigui s:

$$(s + 1)^3 - s^3 = 3s^2 + 3s + 1$$

N'hi ha prou de desenvolupar el primer terme per comprovar-ho.

$$(s + 1)^3 - s^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 - s^3 = 3s^2 + 3s + 1$$

Podem demostrar ara que $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Fem servir la fórmula anterior per a s = 0, 1, 2, …, n

$$\begin{array}{lll}
 & 1^3 - 0^3 & = 3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 1 \\
 & 2^3 - 1^3 & = 3 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1 + 1 \\
 & \dots & \\
 & n^3 - (n-1)^3 & = 3 \cdot (n-1)^2 + 3 \cdot (n-1) + 1 \\
+ & \underline{(n+1)^3 - n^3} & \underline{= 3n^2 + 3n + 1} \\
 & (n+1)^3 - 0^3 & = 3 \cdot (0^2 + 1^2 + \dots + n^2) + 3 \cdot (0 + 1 + \dots + n) + n + 1.
\end{array}$$

Per tant,

$$(n+1)^3 = 3 \cdot (0^2 + 1^2 + \dots + n^2) + 3 \cdot (0 + 1 + \dots + n) + n + 1$$

o sigui,

$$(n+1)^3 = 3 \cdot (0^2 + 1^2 + \dots + n^2) + 3n(n+1)/2 + n + 1$$

és a dir,

$$3 \cdot (0^2 + 1^2 + \dots + n^2) = (n+1)^3 - 3n(n+1)/2 - n - 1$$

Operant s'obté que:

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

tal com ja s'havia avançat.

Exercicis

1. Calcula les següents integrals pràcticament immediates:
   a. $\int (3x^3 - 2x^2 + 4x - 4)dx$
   b. $\int x(x^2 + 1)^3 dx$
   c. $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$
   d. $\int \sqrt{2x - 6}dx$
   e. $\int 3e^{-2x+1}dx$
   f. $\int \frac{\ln x}{x}dx$
   g. $\int \sin x \cdot \cos x dx$

2. Utilitza el mètode d'integració per parts per a integrar aquestes funcions:

   a. $\int 2xe^{-x}dx$
   b. $\int (x+1)\cos(2x)dx$
   c. $\int x \ln x dx$

3. Resol aquesta integral per parts:

   $\int x^2 e^x dx$

Solucions

1.

a. $\int (3x^3 - 2x^2 + 4x - 4)dx = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 4x + c$

b. $\int x(x^2+1)^3 dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^3 dx = \frac{(x^2+1)^4}{8} + C$

c. $\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = ½ \ln (x^2 + 1) + C$

d. $\int \sqrt{2x-6}dx = \frac{1}{2}\frac{(2x-6)^{3/2}}{3/2} + C = \frac{\sqrt{(2x-6)^3}}{3} + C$

e. $\int 3e^{-2x+1}dx = -3/2 \cdot e^{-2x+1} + C$

f. $\int \frac{\ln x}{x}dx = (\ln x)^2/2 + C$

g. $\int \sin x \cdot \cos x dx = (\sin x)^2/2 + C$

2.

a. $\int 2xe^{-x}dx = -2x\cdot(-e^{-x}) - \int -2e^{-x}dx = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$

$u = 2x$ $\quad$ $v' = e^{-x}$
$u' = 2$ $\quad$ $v = -e^{-x}$

b. $\int (x+1)\cos(2x)dx = (x+1)\sin (2x) - \int \frac{\sin(2x)}{2}dx =$

$(x+1)\sin (2x) + \frac{\cos(2x)}{4} + C$

$u = (x + 1)$ $\quad$ $v' = \cos (2x)$
$u' = 1$ $\quad$ $v = \sin (2x)/2$

$\int x \ln x dx = x \ln x - \int \frac{x^2}{2x}dx = x \ln x - \int 2x dx = x \ln x - x^2 + C$

$u = \ln x$ $\quad$ $v' = x$
$u' = 1/x$ $\quad$ $v = x^2/2$

3.

$\int x^2 e^x dx$

integrem per parts:

$u = x^2$ $\quad$ $du = 2xdx$
$dv = e^x dx$ $\quad$ $v = e^x$

$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx$

hem de tornar a integrar per parts:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

u = x du = dx
dv = e^xdx v = e^x

per tant,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx = x^2 e^x - 2\left(xe^x - e^x\right) + c =$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + c$$