Aplicacions de la derivada

Aplicacions de la derivada

Les aplicacions de la derivada són molt àmplies; entre les més importants hi ha:

Localització d'extrems (màxims i mínims) d'una funció

Un màxim és un punt de la funció la imatge de la qual és més gran o igual que la imatge de qualsevol punt que es trobi proper al punt. Un mínim és un punt de la funció la imatge del qual és menor o igual que la imatge de qualsevol punt que es trobi proper al punt:

$(x_0,f(x_0))$ màxim de $f(x)$ si per a tot x d'un entorn de x_0, $f(x_0) \geq f(x)$

$(x_0,f(x_0)$ mínim de $f(x)$ si per a tot x d'un entorn de x_0, $f(x_0) \leq f(x)$

Hi ha dues maneres de trobar els màxims i mínims d'una funció:

1. Trobant la primera i segona derivades:
   $(x_0,f(x_0))$ màxim de $f(x)$ si $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$
   $(x_0,f(x_0)$ mínim de $f(x)$ si $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) >0$.
2. Trobant la primera derivada i comprovant el creixement de la funció:

   $(x_0,f(x_0))$ màxim de $f(x)$ si $f'(x_0) = 0$, i la derivada en aquest punt passa de ser positiva a negativa.

   $(x_0,f(x_0)$ mínim de $f(x)$ si $f'(x_0) = 0$, i la derivada en aquest punt passa de ser negativa a positiva.

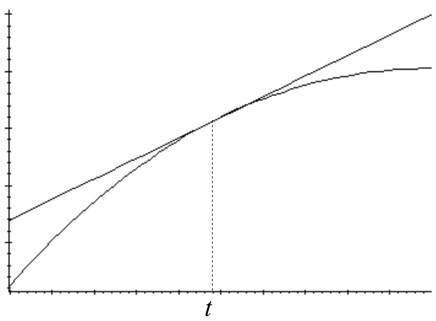
Problema d'extrems: un problema que pretengui resoldre una situació en la qual una certa magnitud M depèn d'una altra magnitud x, de manera que M = $f(x)$, i s'ha de trobar el màxim o el mínim de M.

1. En el cas d'un problema de màxims, es tractarà de trobar un màxim de $f(x)$ i, per tant, s'haurà de buscar x_0 tal que $f'(x_0) = 0$ i, a més, $f''(x_0) < 0$
2. En el cas d'un problema de mínims, es tractarà de trobar un mínim de $f(x)$ i, per tant, s'haurà de buscar x_0 tal que $f'(x_0) = 0$ i, a més, $f''(x_0) > 0$.

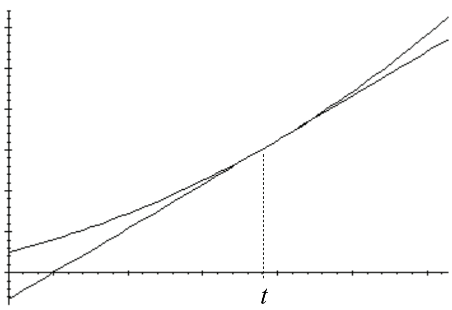
Concavitat i convexitat d'una funció

Una funció es diu que és convexa en un punt t quan aquesta funció és més petita que la tangent en un entorn d'aquest punt.

Una funció es diu que és còncava en el punt t quan aquesta funció és més gran que la tangent en un entorn d'aquest punt.



Funció convexa



Funció còncava

La concavitat i la convexitat d'una funció es poden trobar fent servir la derivació:

1. Una funció $f(x)$ és convexa en un punt x_0 si $f''(x_0) < 0$.
2. Una funció $f(x)$ és còncava en un punt x_0 si $f''(x_0) > 0$.

Un punt d'inflexió d'una funció és un punt en el qual la funció passa de ser còncava a convexa, o viceversa. Un punt d'inflexió d'una funció compleix que la seva 2a. derivada és 0.

Representació de la gràfica d'una funció

Per la representació d'una funció cal conèixer aquesta informació:

- Domini de la funció.
- Punts de tall amb els eixos.

Es tracta de buscar els punts de la gràfica del tipus:

$(0, f(0))$ o bé, $(x,0)$

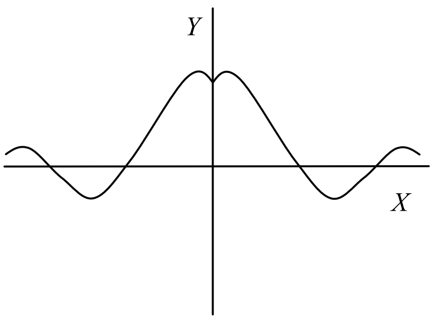
- Simetries.

Es diu que una funció $f(x)$ és simètrica respecte de l'eix d'ordenades, si es compleix:

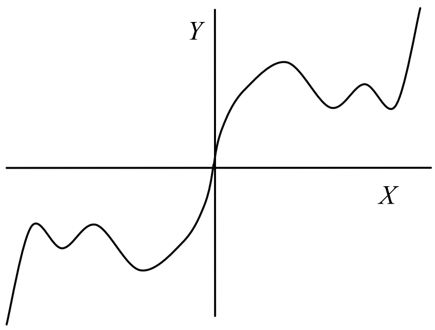
$$f(-x) = f(x)$$

En canvi, una funció és simètrica respecte de l'origen si:

$$f(-x) = -f(x)$$



Funció simètrica respecte de l'eix d'ordenades



Funció simètrica respecte de l'origen

Gràficament es tradueix en representacions d'aquest tipus:

- Intervals de creixement i decreixement

Es poden trobar estudiant el signe de la funció derivada.

- Màxims i mínims

S'han de trobar estudiant quan s'anul·la la funció derivada.

- Concavitat, convexitat i punts d'inflexió

Per estudiar la concavitat i convexitat hem de conèixer la 2a. derivada.

- Asímptotes

Per descobrir les asímptotes d'una funció s'han de comprovar els límits d'aquesta funció en $+\infty$, $-\infty$ i en els punts que no pertanyen al domini.

Exemple: Representar $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

- Domini de la funció

Tots els punts excepte pel –1 i l'1.

- Punts de tall amb els eixos

L'únic punt de tall amb els eixos és (0,0).

- Simetries

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$$

Simètrica respecte l'origen.

- Zones de creixement i decreixement

  $f(x)$ és creixent en $(-\infty,-\sqrt{3})$ i $(\sqrt{3},+\infty)$

  $f(x)$ és decreixent en $(-\sqrt{3},+\sqrt{3})$

- Màxims i mínims

En $\left(-\sqrt{3},\frac{-\sqrt{3}^3}{2}\right)$ hi ha un màxim; en $\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}^3}{2}\right)$ hi ha un mínim.

- Concavitat, convexitat i punts d'inflexió

En $(-\infty,-1)$ i $(0,1)$ $f(x)$ és còncava.

En $(-1,0)$ i $(1,\infty)$ $f(x)$ és convexa.

En $x = 0$, la funció té un punt de inflexió perquè passa de convexa a còncava.

- Asímptotes

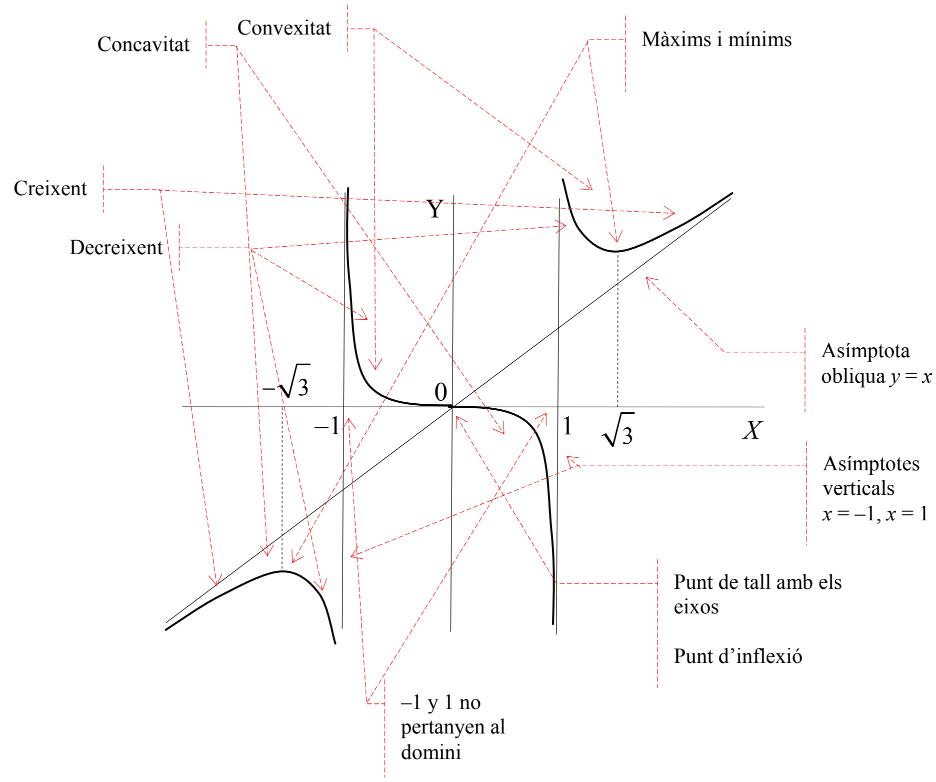
Asímptotes verticals:

Les rectes $x = -1$ i $x = 1$ són asímptotes verticals.

Asímptotes obliqües:

La recta $y = x$ és una asímptota obliqua.

Representació:



Com es localitzen màxims i mínims d'una funció utilitzant la seva derivada?

Una de les aplicacions bàsiques de les derivades és la recerca de màxims i mínims. Una funció $f(x)$ té un màxim en x_0 si $f'(x_0) = 0$ i, a més, $f''(x_0) < 0$; una funció té un mínim en x_0 si $f'(x_0) = 0$ i, a més, $f'(x_0) > 0$. També es poden trobar màxims i mínims analitzant el signe de la derivada de $f(x)$ en un entorn de x_0.

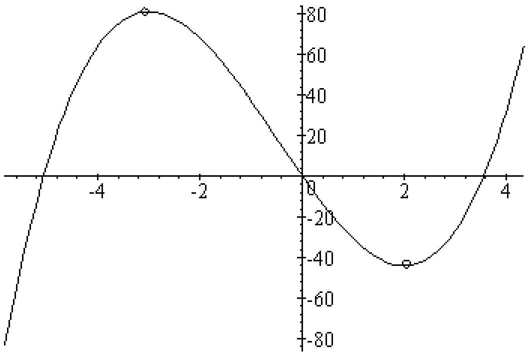
La derivació té múltiples aplicacions, des del càlcul de certs elements interessants per al traçat de la gràfica d'una funció, fins a problemes de maximització o minimització (en general, problemes d'extrems).

Una de les aplicacions més importants de les derivades és la recerca de màxims i mínims d'una funció. Un màxim és un punt de la funció la imatge de la qual és més gran o igual que la imatge de qualsevol punt que es trobi proper a aquest punt. Un mínim és un punt de la funció la imatge de la qual és menor o igual que la imatge de qualsevol punt que es trobi proper a aquest punt:

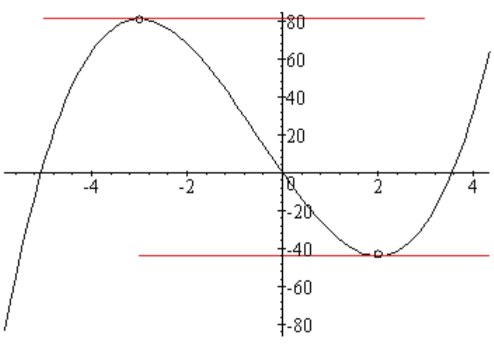
$(x_0,f(x_0))$ màxim de $f(x)$ si per a tot x d'un entorn de x_0, $f(x_0) \geq f(x)$

$(x_0,f(x_0))$ mínim de $f(x)$ si per a tot x d'un entorn de x_0, $f(x_0) \leq f(x)$

Per exemple, en la gràfica de la funció $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$



s'han destacat dos punts de la funció que corresponen a un màxim local i a un mínim local d'aquesta (local perquè són un màxim i un mínim en un entorn del punt, però no un màxim i un mínim globals); en el cas del màxim podem observar que la funció abans del màxim és creixent, mentre que després del màxim és decreixent. Així, doncs, abans del màxim la derivada de la funció ha de ser positiva (si la funció és creixent, la derivada és negativa), mentre que després del màxim la derivada de la funció ha de ser negativa (si la funció és decreixent, la derivada és negativa). Per tant, la derivada passa de ser positiva a ser negativa en el punt màxim; no queda altra possibilitat que la derivada de la funció en el màxim sigui igual a 0, és a dir, $f'(x) = 0$.



De la mateixa manera, la funció abans del mínim és decreixent, mentre que després del mínim és creixent. Així, doncs, la derivada abans del mínim ha de ser negativa i després del mínim ha de ser positiva. Per tant, la derivada en el mínim ha de ser igual a 0. En definitiva, si un punt de la funció és un mínim o un màxim local, la seva derivada ha de ser zero en aquests punts. També es pot comprovar visualment, traçant les tangents en el màxim i el mínim, com s'observa a la gràfica.

Evidentment, la recta tangent és horitzontal en ambdós casos, és a dir, el seu pendent és igual a 0, que, com és sabut, correspon a la derivada de la funció en el punt corresponent al màxim i al mínim.

Podem comprovar, en aquest cas, en quins punts s'anul·la la derivada:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 36 = 0$$

Es tracta dels punts $x = 2$ i $x = -3$, tal com es podia observar en la imatge.

Ara bé, es pot saber quin dels dos és màxim o mínim sense mirar la gràfica de la funció? Sí que es pot saber i, a més, és molt senzill; per fer-ho només cal derivar la funció una altra vegada, és a dir, calcular la segona derivada utilitzant les mateixes regles de derivació. En el cas de l'exemple:

$$f''(x) = 12x + 6$$

Després de derivar una altra vegada la funció, la regla per saber si un punt és màxim o mínim diu així:

Si $f'(a) = 0$ i $f''(a) < 0$, llavors el punt $(a, f(a))$ és un màxim.

Si $f'(a) = 0$ i $f''(a) > 0$, llavors el punt $(a, f(a))$ és un mínim.

Si $f''(a)$ és igual a 0, llavors no podem dir res sobre si es tracta d'un màxim o un mínim.

Comprovem-ho amb la funció de l'exemple:

$f''(-3) = 12 \cdot (-3) + 6 < 0$, Així, doncs, el punt $(-3, f(-3))$ és un màxim, com ja sabíem.

$f''(2) = 12 \cdot 2 + 6 > 0$, Així, doncs, el punt $(2, f(2))$ és un mínim, com ja sabíem.

Una altra manera senzilla de saber si la funció té un màxim o un mínim en cert punt és comprovar com és el creixement en l'entorn del punt. D'aquesta manera:

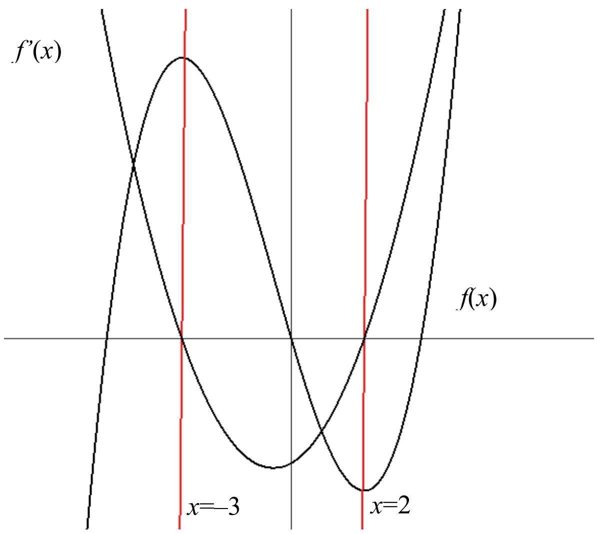
si $f'(a) = 0$, i la derivada en aquest punt passa de ser positiva a negativa, llavors en el punt a hem de tenir un màxim;

si $f'(a) = 0$, i la derivada en aquest punt passa de ser negativa a positiva, llavors en el punt a hem de tenir un mínim.

Vegem-ho en la funció anterior, $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$: la seva derivada és $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$. Els punts en què aquesta funció s'anul·la són -3 i 2, com sabíem. A més:

$f'(x) > 0$ si $x < -3$, i $f'(x) < 0$ si $x > -3$, per tant, en $x = -3$ tenim un màxim;
$f'(x) < 2$ si $x < 2$, i $f'(x) > 0$ si $x > 2$, per tant, en $x = 2$ tenim un mínim.

Això es pot observar en aquest gràfic que conté $f(x)$ i $f'(x)$:



$f(x) > 0$	$f(x) < 0$	$f(x) > 0$
$f(x)$ creixent	$f(x)$ decreixent	$f(x)$ creixent

Com es resol un problema de màxims o mínims utilitzant la derivació?

> Un problema es diu que és de màxims o mínims o, en general, d'extrems, sempre que vulgui resoldre una situació en la qual una determinada magnitud M depèn d'una altra magnitud x, de manera que M = $f(x)$, i s'hagi de trobar un màxim o un mínim de M. En el cas d'un problema de màxims, es tractarà de trobar un màxim de $f(x)$ i, per tant, s'haurà de buscar x_0 tal que $f'(x_0) = 0$ i, a més, $f''(x_0) < 0$. En canvi, en el cas d'un problema de mínims, es tractarà de trobar un mínim de $f(x)$ i, per tant, s'haurà de buscar x_0 tal que $f'(x_0) = 0$ i, a més, $f''(x_0) > 0$.

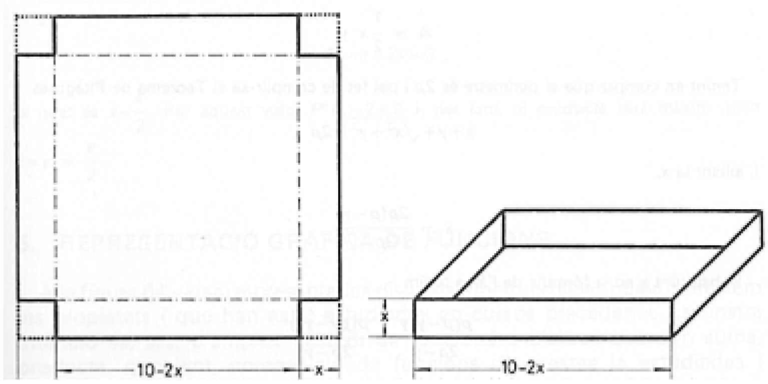
Un problema és de màxims o mínims sempre que vulgui resoldre una situació en la qual una determinada magnitud M depèn d'una altra magnitud x, de manera que

$$M = f(x)$$

i cal trobar un màxim o un mínim de M. Vegem un exemple de cada cas:

- Exemple de màxims:

Amb una peça de cartolina de 10 dm de costat es vol construir una caixa retallant en cada vèrtex del quadrat peces quadrades de costat x. Quin valor s'ha de donar a x perquè el volum de la caixa sigui el màxim?



El volum de la caixa, és a dir, el volum d'un prisma rectangular, es pot trobar multiplicant amplària, per llargària i per altura:

$$V(x) = (10 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 40x^2 + 100x$$

Així, doncs, el volum de la caixa dependrà del valor de x. S'ha de trobar un màxim d'aquesta funció en l'interval (0, 5), ja que el tall en els extrems no pot superar els 5 dm. El volum de la caixa, tant en 0 com en 5 és igual a 0: V(0) = V(5) = 0. Vegem si podem trobar el màxim en l'interior d'aquest interval. Per això, tractarem de trobar un punt, x_0, que compleixi les condicions d'un màxim:

$$V'(x_0) = 0.$$

$$V''(x_0) < 0$$

La funció derivada és:

$$V'(x) = 12x^2 - 80x + 100 = 4(3x^2 - 20x + 25)$$

que s'anul·la en:

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 300}}{6} = \frac{20 \pm 10}{6} = \left\langle \begin{matrix} 5 \\ 5/3 \end{matrix} \right.$$

El primer valor no es troba dintre de l'interval considerat, por el tant, només podem considerar $x = 5/3$. Per saber si en aquest punt tenim un màxim o un mínim de la funció hem de calcular la segona derivada:

$V''(x) = 24x - 80$

i $V''(5/3) = 24 \cdot 5/3 - 80 < 0$

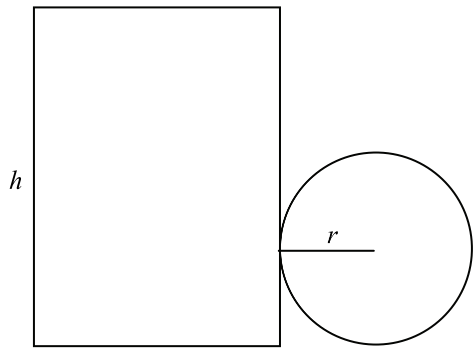
per tant, per $x = 5/3$ obtenim un màxim de la funció. Així, doncs, per obtenir el màxim volum en la caixa, hem de retallar petits quadrats, aproximadament, de 1,66 dm, i el volum màxim que s'obtindrà amb aquest valor serà de:

$$V(5/3) = (10 - 2 \cdot 5/3)^2 \cdot 5/3 = (20/3)^2 \cdot 5/3 = 2000/27 \approx 74{,}07 \text{ dm}^3$$

- Exemple de mínims:

Es volen construir pots cilíndrics (com els de les begudes refrescants) de 500 cm^3 de volum. Quines dimensions (altura i diàmetre de la base) s'ha de donar a un pot d'aquestes característiques perquè necessiti la mínima quantitat de material?

La forma cilíndrica del pot té aquest desenvolupament pla:



El material necessari per construir-lo ha de tenir una superfície de $S = 2\pi rh + \pi r^2$.

La condició imposa que el volum sigui de 500 cm^3, és a dir:

$\pi r^2 h = 500$

o sigui, $h = 500/\pi r^2$

Així, la funció S que depèn de r és $S(r) = 2\pi r(500/\pi r^2) + \pi r^2 = 1000/r + \pi r^2$.

Hem de trobar un valor per a la r de manera que $S(r)$ sigui mínim de la funció. Per això, sabem que si r_0 és el valor mínim d'aquesta funció, s'ha de complir que:

$S'(r_0) = 0.$

$S''(r_0) > 0$

Calculem $S'(r)$ i igualem a 0:

$S'(r) = -1000/r^2 + 2\pi r = 0.$

$2\pi r^2 = 1000/r^2$

$2\pi r^3 = 1000$

$r^3 = 1000/2.\pi$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1000}{2\pi}}$$

per tant, $r \approx 5{,}42$ cm.

Vegem ara el valor de $S''(r) = 3000/r^3 + 2\pi$.

És fàcil comprovar que $S''(5{,}42) > 0$, per tant, aquest valor és un mínim de la funció $S'(r)$ i el valor mínim és igual a $S(5{,}42) \approx 276{,}8$ cm^2.

Si s'interpretés que el pot ha de tenir dues tapes, com les llaunes de refrescs, i no només una, la superfície hauria d'incloure la superfície de l'altra tapa:

$S(r) = 2\pi rh + 2\pi r^2$

i imposant la condició que el volum sigui 500 cm^3, llavors:

$S(r) = 1000/r + 2\pi r^2$

En aquest cas:

$$S'(r) = -1000/r^2 + 4\pi r = 0.$$
$$4\pi r^2 = 1000/r^2$$
$$4\pi r^3 = 1000$$
$$r^3 = 1000/4.\pi$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{1000}{4\pi}}$$

és a dir, $r \approx 4{,}3$ cm.

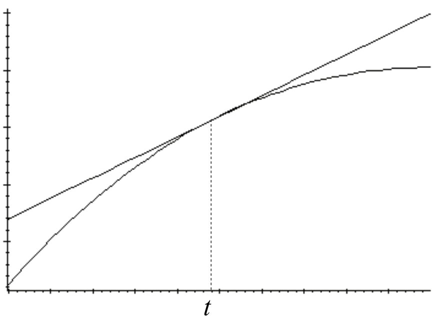
El valor de $S''(r) = 3000/r^3 + 4\pi$ i és fàcil comprovar que $S''(4{,}3) > 0$, per tant, aquest valor és un mínim de la funció $S'(r)$ i el valor mínim és igual a:

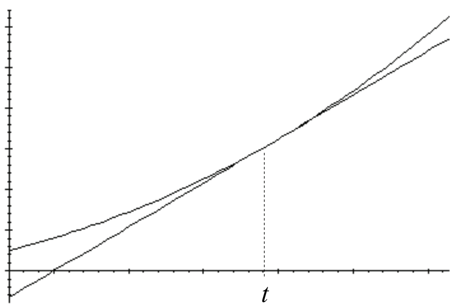
$$S(4{,}3) \approx 348{,}73 \text{ cm}^2$$

Què és la concavitat i la convexitat d'una funció i quina relació té amb la derivació?

> Quan la funció prop d'un punt és menor que la recta tangent en aquest punt, es diu que la funció és convexa, mentre que quan la funció és més gran que la recta tangent, es diu que la funció és còncava. Una funció és convexa en aquells punts en què la seva derivada segona és positiva, mentre que una funció és còncava en aquells punts en què la seva derivada segona és negativa.

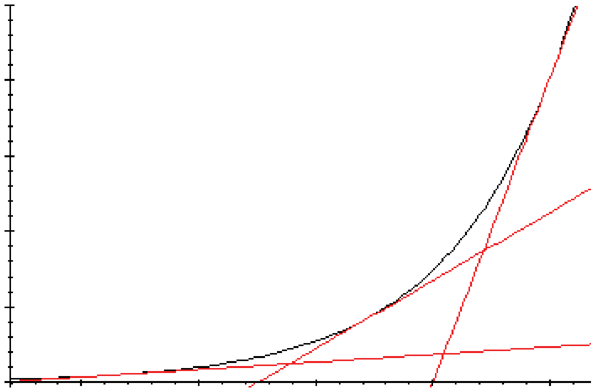
Observant atentament aquestes funcions creixents, amb les seves tangents en un punt t:





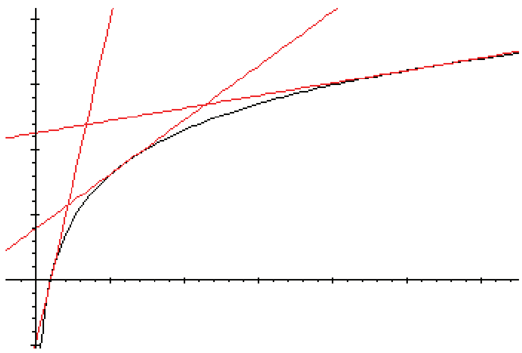
en el primer cas, la tangent en el punt t es troba per sobre de la funció, mentre que en el cas de la dreta, la tangent en el punt t es troba per sota de la funció. És a dir, en el primer cas, prop del punt t, la funció és més petita que la tangent, mentre que en el segon cas, la funció és més gran que la tangent. En el primer cas es diu que la funció és *convexa*, mentre que en el segon cas es diu que és *còncava*.

L'estudi de segona derivada d'una funció és essencial per conèixer en quins punts la funció és còncava i en quins punts la funció és convexa. Vegem-ho: al costat d'aquesta funció còncava s'han traçat diferents tangents a la funció:



Podem observar com el pendent de la recta tangent va creixent a mesura que la funció va prenent valors x més grans. Ara bé, el pendent de la recta tangent a una funció no és altra cosa que la seva derivada; és a dir, si la funció és còncava, la derivada de la funció derivada creix a mesura que augmenta la x, és a dir, la funció derivada és una funció creixent. Ara bé, si la funció derivada és creixent, llavors la seva derivada, és a dir, la derivada segona de la funció original, ha de ser positiva (perquè sabem que si una funció és creixent, la seva derivada ha de ser positiva). En definitiva, una funció és còncava en aquells punts en què la seva derivada segona és positiva.

De la mateixa manera, observem d'una funció convexa, algunes de les rectes tangents a la funció:



Podem observar que el pendent de la recta tangent va decreixent a mesura que la funció va prenent valors x més grans. Ara bé, com s'acaba d'esmentar, el pendent de la recta tangent a una funció no és altra cosa que la seva derivada; és a dir, si la funció és convexa, la derivada de la funció derivada decreix a mesura que augmenta la x, o sigui, la funció derivada és una funció decreixent. Així, doncs, si la funció derivada és decreixent, llavors la seva derivada, és a dir, la derivada segona de la funció original, ha de ser negativa (perquè sabem que si una funció és decreixent, la seva derivada ha de ser negativa). En definitiva, una funció és convexa en aquells punts en què la seva derivada segona és negativa.

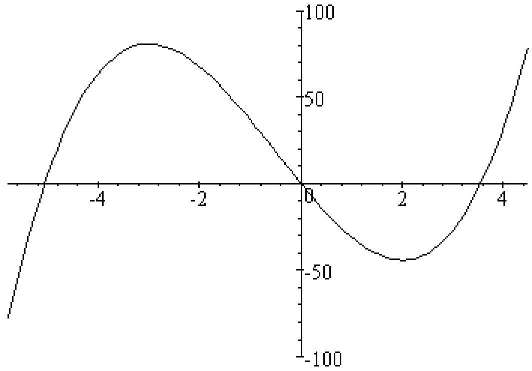
Es pot comprovar aquest fet amb la funció d'un exemple anterior:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$$

La seva segona derivada, com sabem, és $f''(x) = 12x + 6$, per tant:

és positiva quan $x > -1/2$, és a dir, ha de ser còncava;
és negativa quan $x < -1/2$, és a dir, ha de ser convexa.

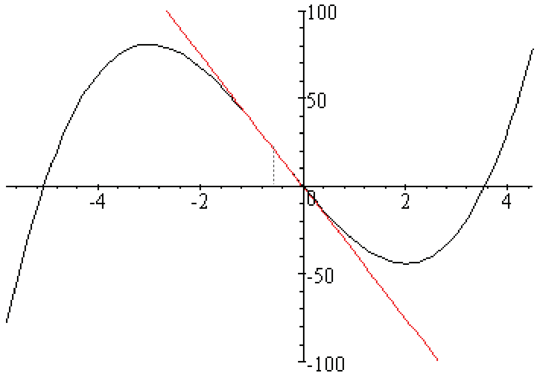
Observant la gràfica es pot veure que, efectivament, la funció és còncava en $(-\infty,-1/2)$, i és convexa en l'interval $(-1/2, +\infty)$, tal com mostra la gràfica de la funció:



Ara bé, què passa en el punt $-1/2$? En aquest punt, la segona derivada és igual a 0:

$$f''(-1/2) = 12(-1/2) + 6 = 0$$

Per tant, segons les propietats anteriors, la funció en aquest punt no és ni còncava ni convexa. Si observem la tangent en aquest punt:



A l'esquerra d'aquest punt, la funció és convexa, mentre que a la dreta, la funció és còncava. Dit d'una altra manera, a l'esquerra de $x = -½$ la tangent és més gran que la funció, mentre que a la dreta d'aquest punt, la funció és més gran que la tangent. Els punts en què passa això es denominen *punts d'inflexió*, i una de les seves característiques és que la segona derivada en el punt és igual a 0.

Quina informació s'ha de conèixer per representar aproximadament la gràfica d'una funció?

> Per representar la gràfica una funció una de les eines fonamentals és el càlcul de derivades. La informació que s'ha de buscar per representar una funció és: domini, punts de tall amb els eixos, simetries, creixement, màxims i mínims, concavitat i convexitat, punts d'inflexió i comportament asimptòtic.

Per representar manualment la gràfica d'una funció cal comptar amb informació sobre diferents aspectes de la funció que resultaran molt útils pel traçat aproximat de la gràfica. Entre ells trobem els aspectes de creixement, màxims i mínims, i concavitat i convexitat, que requereixen el càlcul de derivades.

Utilitzarem la funció

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$$

per mostrar com s'ha de fer.

Els aspectes més importants són:

- Domini de la funció

La funció $f(x)$ té per domini tots els punts que no anul·len el denominador. En aquest cas, els punts del domini han de complir que $x^2 - 1 \neq 0$. Per tant, el domini està format per tots els punts excepte pel –1 i l'1.

- Punts de tall amb els eixos

Es tracta de buscar els punts de la gràfica del tipus:

$(0, f(0))$ o bé, $(x,0)$

En la funció $f(x)$

$f(x) = 0 \rightarrow \quad x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$

Per tant, l'únic punt de tall amb els eixos és (0,0).

- Simetries

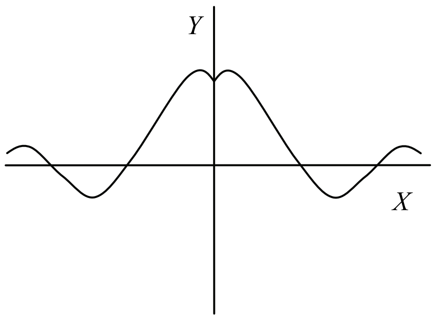
Es diu que una funció $f(x)$ és simètrica respecte de l'eix d'ordenades, si es compleix

$f(-x) = f(x)$

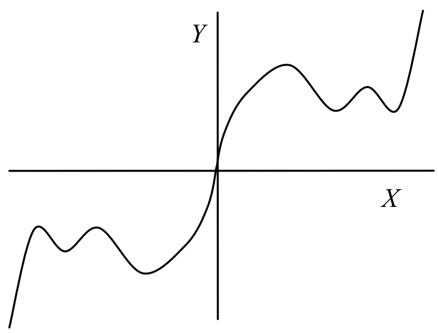
En canvi, una funció és simètrica respecte de l'origen si

$f(-x) = -f(x)$

Vegem en dos exemples què signifiquen aquestes propietats de simetria gràficament:



Funció simètrica respecte l'eix d'ordenades



Funció simètrica respecte l'origen

En el cas de l'exemple, la funció és simètrica respecte de l'origen, ja que:

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=\frac{-x^3}{x^2-1}=-\frac{x^3}{x^2-1}=-f(x)$$

S'ha de tenir en compte que una funció pot ser que no sigui ni simètrica respecte de l'eix d'ordenades, ni simètrica respecte de l'origen.

- Intervals de creixement i decreixement

Es poden trobar estudiant el signe de la funció derivada, en aquest cas:

$$f'(x)=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Per veure en quins punts aquesta funció és positiva o negativa, només hem d'estudiar-ne el numerador, ja que el denominador és sempre positiu.

$x^4 - 3x^2 = x^2(x^2 - 3)$

Així, doncs, només s'ha d'estudiar l'expressió $x^2 - 3$, que, com sabem, es correspon a una paràbola i les arrels de la qual, $\sqrt{3}$ i $-\sqrt{3}$, separen els punts positius dels negatius. En definitiva:

$f'(x)$ és positiva en $(-\infty,-\sqrt{3})$ i $(\sqrt{3},+\infty)$

$f'(x)$ és negativa en $(-\sqrt{3},+\sqrt{3})$

Per tant:

$f(x)$ és creixent en $(-\infty,-\sqrt{3})$ i $(\sqrt{3},+\infty)$

$f(x)$ és decreixent en $(-\sqrt{3},+\sqrt{3})$

- Màxims i mínims

La funció derivada s'anul·la en 0, $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$; en 0, la funció és creixent i, per tant, no té ni màxim ni mínim; en $-\sqrt{3}$ la funció passa de creixent a decreixent i, per tant, en $-\sqrt{3}$ hi ha un màxim. En $\sqrt{3}$, la funció passa de decreixent a creixent i, per tant, en $\sqrt{3}$ hi ha un mínim.

- Concavitat, convexitat i punts d'inflexió

Per estudiar la concavitat i convexitat hem de conèixer la segona derivada:

$$f''(x) = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$$

L'única arrel del numerador és 0. En el cas del denominador, les arrels són 1 i –1. Per tant, el signe de la 2a. derivada és:

positiu en $(-\infty,-1)$ i $(0,1)$ → en aquests intervals $f(x)$ és còncava;

negatiu en $(-1,0)$ i $(1, \infty)$ → en aquests intervals $f(x)$ és convexa.

Es pot observar que en $x = 0$, la funció té un punt d'inflexió perquè passa de convexa a còncava.

- Asímptotes

Per descobrir les asímptotes d'una funció s'han de comprovar els límits d'aquesta funció en $+\infty$, $-\infty$ i en els punts que no pertanyen al domini. A més, s'ha de comprovar si té una asímptota obliqua.

En l'exemple:

Asímptotes horitzontals:
No en té, ja que els seus límits a $+\infty$ i $-\infty$ són infinits.

Asímptotes verticals:
S'haan d'estudiar els límits en –1 i 1, que no pertanyen al domini:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

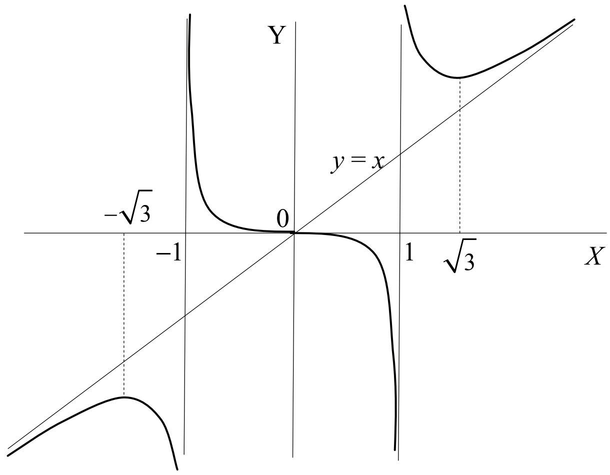
Per tant, les rectes $x = -1$ i $x = 1$ són asímptotes verticals.

Asímptotes obliqües:
Es pot comprovar que la recta $y = x$ és una asímptota obliqua, ja que:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) - x = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) - x = 0$$

Amb tots aquests elements, ja es pot representar la funció manualment:



A l'actualitat, hi ha molts programes d'ordinador que permeten fer la gràfica de la major part de les funcions només escrivint la seva expressió.

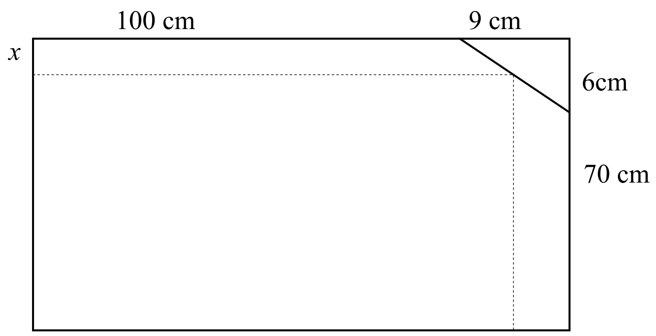
Exercicis

1. Donades aquestes funcions:

$$f(x) = \frac{8x^2}{4 - x^2} \qquad g(x) = \frac{2x}{\ln(x)} \qquad h(x) = x^3 - 3x + 2$$

   a. Dóna el domini de cadascuna d'aquestes funcions.
   b. Determina els seus punts de talla amb els eixos.
   c. Calcula els màxims i els mínims.
   d. Calcula els punts d'inflexió.
   e. Dona els intervals de creixement i decreixement.
   f. Dona els intervals de concavitat i de convexitat.
   g. Determina les asímptotes.

2. Al traslladar un mirall de 70 x 100 cm, s'ha trencat per un dels seus vèrtexs i s'ha esbocinat un triangle rectangle de 6 x 9 cm, tal com es veu a la figura. Calcula per on s'ha de tallar el mirall per a obtenir un altre mirall que també sigui rectangular i que tingui l'àrea més gran possible.



Solucions

1. $f(x)=\dfrac{8x^2}{4-x^2}$

a) El domini consta de tots els nombres excepte aquells que fan 0 el denominador: $4 - x^2 = 0$. Per tant, no hi pertanyen +2 i – 2.

b) Talls amb l'eix Y: $f(0) = 0$, per tant, (0,0)
Talls amb l'eix X: $f(x) = 0$. Igualment, (0,0)

c) Per calcular màxims i mínims hem de derivar la funció:

$$f'(x)=\frac{16x(4-x^2)-8x^2(-2x)}{\left(4-x^2\right)^2}=\frac{64x}{\left(4-x^2\right)^2}$$

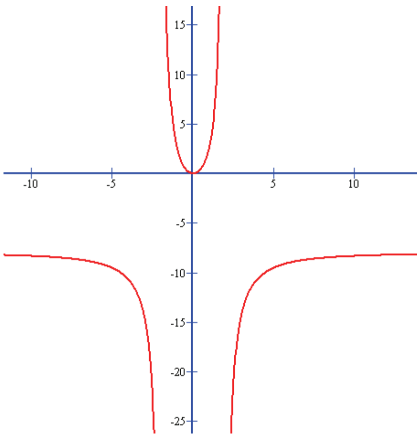
i igualar-la a 0. En aquest cas l'única possibilitat és $x = 0$. Calculem la segona derivada i és fàcil comprovar que $f''(0)>0$. Per tant, ens trobem al davant d'un mínim.
És a dir, només hi ha un mínim (0,0)

d) No hi ha cap punt d'inflexió perquè no trobem cap punt que compleixi $f''(x) = 0$.

e) Hi ha, clarament, 4 zones de creixement o decreixement, separades pels límits del domini i pel mínim. Hem d'analitzar, doncs, la derivada:
fins –2: $f'(x)<0$, per tant, la funció és decreixent.
de –2 a 0: $f'(x)<0$ per tant la funció és decreixent.
de 0 a 2: $f'(x)>0$, per tant, la funció és creixent.
de 2 en endavant: $f'(x)>0$, per tant, la funció és creixent.

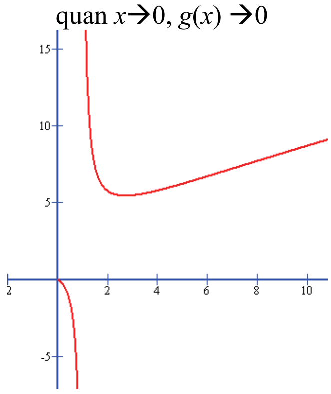
f) Una altra vegada cal estudiar la segona derivada entre els límits del domini, perquè no hi ha cap punt en què $f''(x) = 0$
fins –2: $f''(x)<0$, per tant, la funció és convexa
de –2 a +2: $f''(x)>0$, per tant, la funció és còncava.
de 2 en endavant: $f''(x) < 0$, per tant, la funció és convexa.

g) Aquesta funció, clarament, només té 3 asímptotes: x =-2 , x = 2, y = -8



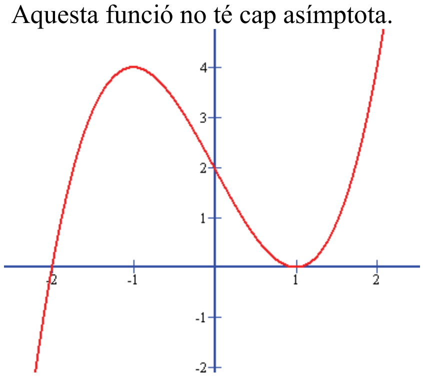
$$g(x) = \frac{2x}{\ln(x)}$$

a) El domini consta de tots els nombres més grans que 0 (perquè hi ha la funció logaritme) excepte aquells que fan 0 el denominador: $\ln(x) = 0$. En definitiva, el domini és igual a tots els nombres més grans que 0, excepte 1: $(0,1) \cup (1,+\infty)$
b) No hi ha punts de tall.
c) Per calcular màxims i mínims hem de derivar la funció: $g'(x) = (2\ln(x) -2)/\ln^2(x)$ i igualar-la a 0. En aquest cas l'única possibilitat és $x = e$. Calculem la segona derivada i és fàcil comprovar que $g''(0)>0$. Per tant, ens trobem al davant d'un mínim: $(e, 2e)$
d) Punts d'inflexió: $g''(x) = 0$ si $x = e^2$. A més, $g'''(x)$ no és 0. Per tant, (e^2,e^2) és un punt d'inflexió.
e) Hi ha, clarament, 3 zones de creixement o decreixement, separades pels límits del domini i pel mínim. Hem d'analitzar, doncs, la derivada:
de 0 a 1: $g'(x)<0$ per tant la funció és decreixent.
de 1 a e: $g'(x)<0$, per tant, la funció és decreixent.
de e en endavant: $f'(x)>0$, per tant, la funció és creixent.
f) Cal estudiar la segona derivada entre els límits del domini, i també el punt d'inflexió (e^2,e^2)
de 0 a 1: $g''(x)<0$ per tant la funció és convexa.
de 1 a e^2: $g''(x)>0$, per tant, la funció és còncava.
de e^2 en endavant: $g''(x)<0$, per tant, la funció és convexa.
g) Aquesta funció, clarament, només té 1 asímptota: $x = 1$. A més, quan $x \to 0$, $g(x) \to 0$

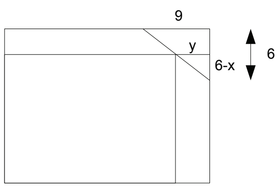


$h(x) = x^3 - 3x + 2$

a) El domini consta de tots els nombres perquè és una funció polinòmica.
b) Amb l'eix Y: $h(0) = 2$ (0,2)
Amb l'eix X : $h(x) = 0$ (-2,0),(1,0).
c) Per calcular màxims i mínims hem de derivar la funció:
$h'(x) = 3x^2 - 3$
i igualar-la a 0. En aquest cas $x = +1$ ó $x = -1$ Calculem la segona derivada:
$h''(x) = 6x$. Per tant, mínim a l'arrel positiva, (1, 0) i màxim a la negativa (-1,4).
d) Punts d'inflexió: $h''(x) = 6x = 0$ si $x = 0$. A més, $g'''(x)$ no és 0. Per tant, (0,2) és un punt d'inflexió.
e) Hi ha, clarament, 3 zones de creixement o decreixement, separades pels pels extrems. Hem d'analitzar, doncs, la derivada:
fins -1: $h'(x)>0$ per tant la funció és creixent.
de -1 a 1: $h'(x)<0$, per tant, la funció és decreixent.
de 1 en endavant: $h'(x)>0$, per tant, la funció és creixent.
f) Cal estudiar la segona derivada en les dos parts en què la divideix el punt d'inflexió
fins 0: $h''(x)<0$ per tant la funció és convexa.
a partir de 0: $h''(x)>0$, per tant, la funció és còncava.
g) Aquesta funció no té cap asímptota.



2. L'àrea del nou mirall serà $(100 - y)(70 - x)$. Hem de calcular el valor de y en funció de x, per a eliminar una de les incògnites. Si ens fixem en aquesta altra representació:



és evident que $\frac{y}{6-x} = \frac{9}{6}$, pe tant, y = 3/2 ·(6 – x)

Així, doncs, hem de maximitzar

f(x) = $(100 - y)(70 - x) = (100 - 3/2 \cdot (6 - x))(70 - x)$

és a dir

f(x)= $6370 + 14x - 3/2\, x^2$

Busquem ara la seva derivada per a trobar un màxim:

f'(x) = $14 - 3x$

i busquem f'(x) = 0

$14 - 3x = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = 14/3$ cm

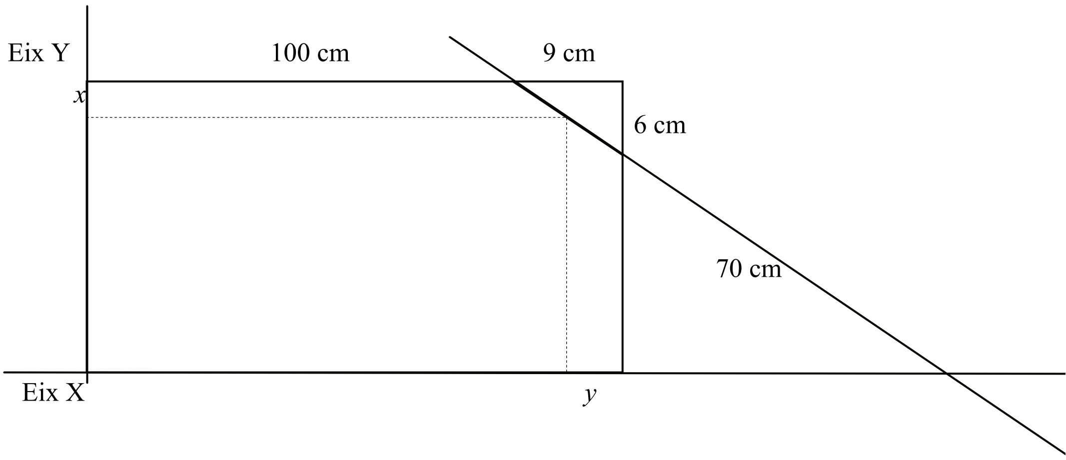
Ja que f''(x) = $-3 < 0$ ens trobem davant d'un màxim, i el valor de la y en aquest punt és:

$y = 3/2 \cdot (6 - x) = 3/2\,(6 - 14/3) = 2$ cm.

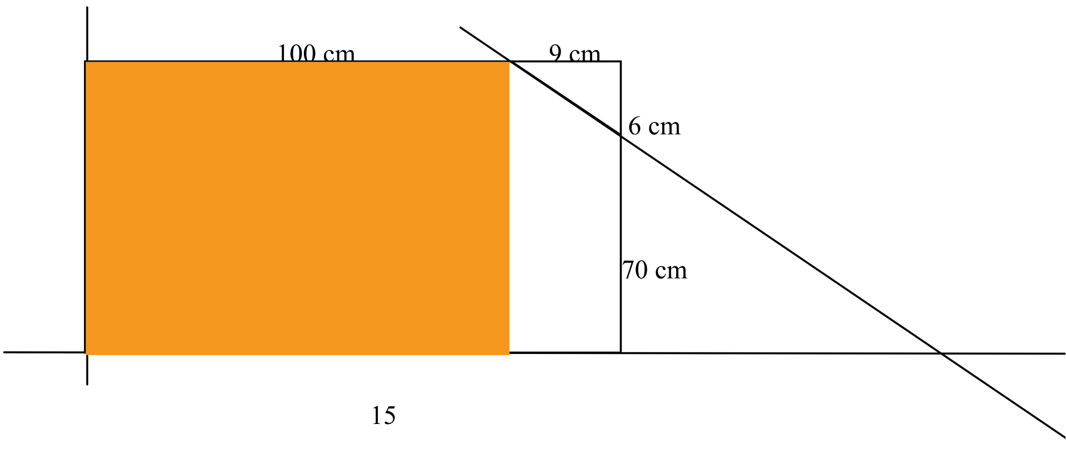
Així, doncs, el mirall retallat d'àrea màxima mesurarà $100 - 2 = 98$ cm per $70 - 14/3 = 65{,}33$ cm.

Si no entens gaire el desenvolupament, el podem fer més detalladament:

Es tracta d'un problema de maximització: és a dir, tens una situació en què has de maximitzar alguna cosa que pots mesurar. En aquest cas, has de maximitzar certa àrea. La figura, com tots sabeu, és aquesta:

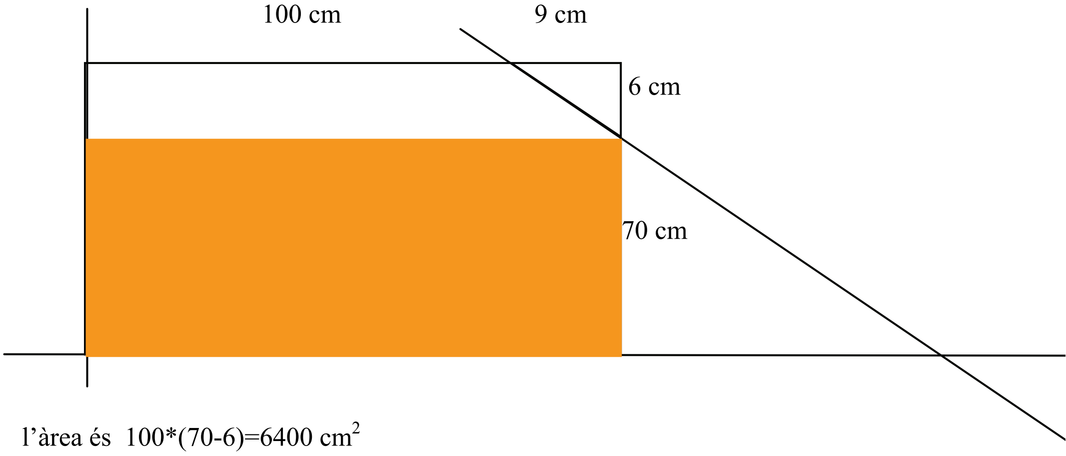


Es tracta d'escollir x i y de forma que l'àrea del rectangle puntejat sigui la màxima possible. Anem a calcular diverses àrees possibles, que tu dones en el teu missatge. Calculem aquesta (en taronja):



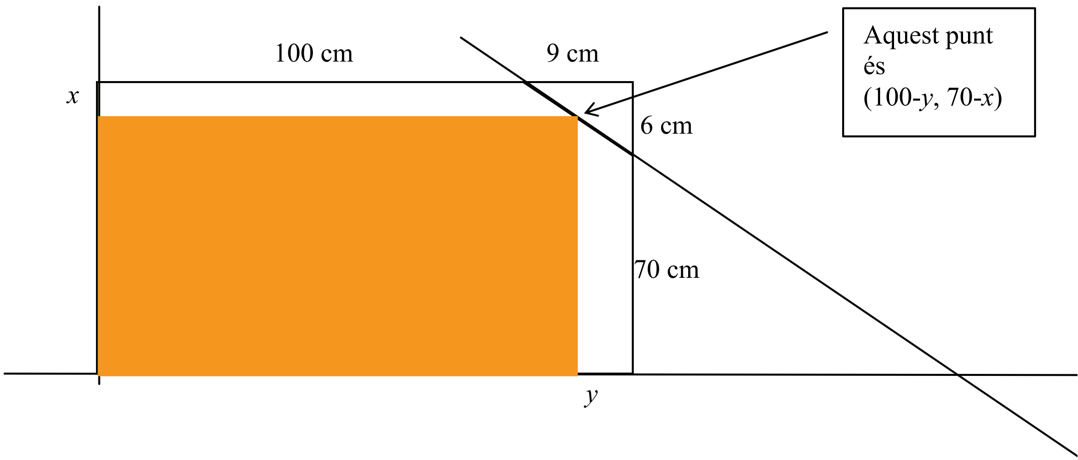
l'àrea és (100-9)*70 = 91*70 = 6370 cm^2

calculem-ne una altra, aquesta (en taronja)



l'àrea és 100*(70-6)=6400 cm^2

En aquest cas, aquesta és més gran. Ara bé, la pregunta és, aquesta àrea és més gran que totes les àrees entre una i l'altra d'aquest tipus?



això, en principi, no ho podem saber fins que no calculem aquestes àrees. I quan val aquesta àrea? Doncs és un rectangle de costats $100 - y$ i $70 – x$, per tant, la seva àrea serà:

$$(100 – y)(70 - x)$$

Si veus, un vèrtex del rectangle està sobre la recta de què parlava en el missatge anterior. Així, doncs, has de poder trobar l'equació d'aquesta recta, per a poder expressar aquest vèrtex del rectangle. I per què? Doncs perquè multiplicant les components d'aquest punt, que és el punt $(100\text{-}y, 70\text{-}x)$, ens dóna l'àrea del rectangle, que com acabem d'escriure és

$$A = (100 – y)(70 - x)$$

Així, podràs posar la y d'aquesta fórmula en funció de la x, i tindràs l'àrea només en funció de la x. Ara hauràs d'aplicar el que saps de derivació: si tens una funció i té un màxim (en aquest cas, tens la funció àrea depenent de la x, i vols calcular un màxim), saps que la seva derivada ha de ser 0 i la segona derivada ha de ser negativa. Així doncs, has de derivar la funció àrea, i igualar-la a 0 i veure si la x que resulta permet que la segona derivada de l'àrea sigui 0. Si és així, hauràs trobat el punt que permet tallar el vidre de manera que l'àrea sigui màxima.