Derivada d’una funció

Derivada d'una funció

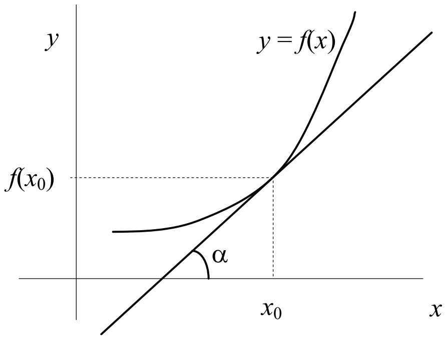
La derivada d'una funció, f, en un punt, x_0, i que s'indica $f'(x_0)$ es defineix com el límit:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

Si aquest límit no existeix, es diu que la funció $f(x)$ no és derivable en x_0.

Interpretació de la derivada:
La derivada de la funció $f(x)$ en el punt x_0 és el pendent de la recta tangent en aquest punt. És a dir,

$$f'(x_0) = \text{tg}\ \alpha$$



La derivada d'una funció $f(x)$ és aquella funció que associa a cada valor la derivada d'aquesta funció. La funció derivada es designa per $f'(x)$. En aquesta taula s'exposen les derivades principals:

Taula de derivades		
$f(x)$	$f'(x)$	Exemple
k essent k un nombre	0	$f(x) = 3$ $f'(x) = 0$
x	1	
x^n essent n un nombre enter	$n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = x^3$ $f'(x) = 3x^2$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$f(x) = 3^x$ $f'(x) = 3^x \cdot \ln 3$ $g(x) = e^x$ $g'(x) = e^x$
$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e$	$f(x) = \log_3 x$ $f'(x) = (1/x) \cdot \log_3 e$ $g(x) = \ln x$ $g'(x) = 1/x$
$\text{arc sin}\ x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\text{arc cos}\ x$	$\frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$	
$\text{arc tan}\ x$	$\frac{1}{1+x^2}$	

Regles de derivació

- Si f i g són dues funcions, la derivada del producte d'ambdues, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, és igual a:

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- Si f i g són dues funcions, la derivada del quocient d'ambdues, $h(x) = f(x)/g(x)$, és igual a:

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

- Si f i g són dues funcions, la derivada de la composició d'ambdues es calcula utilitzant la denominada *regla de la cadena*. Si $h(x) = f(g(x))$, la seva derivada és igual a:

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- Per derivar una potència de dues funcions $h(x) = f(x)^{g(x)}$, primer cal extreure el ln d'aquesta funció:

$$\ln h(x) = \ln\left(f(x)^{g(x)}\right) = g(x)\ln\left(f(x)\right)$$

derivant aquesta funció s'obté:

$$h'(x) = h(x)\left(g'(x)\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right) = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$$

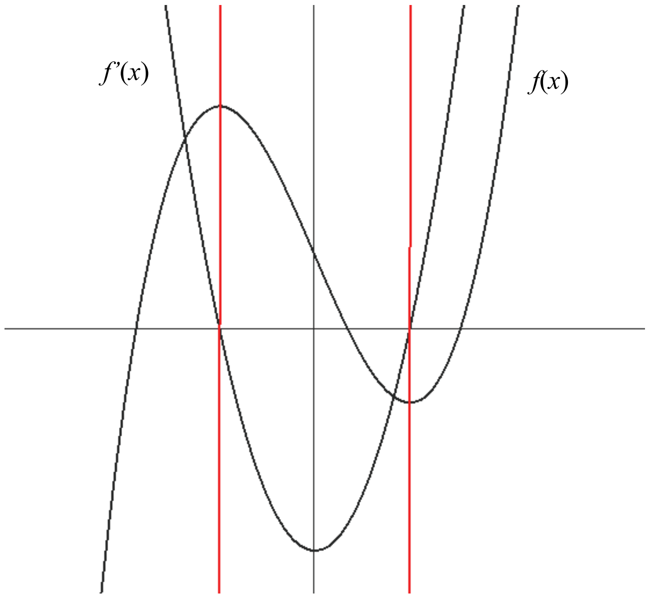
El creixement d'una funció i la seva funció derivada

- Si una funció és creixent en un punt, la derivada d'aquesta funció en el punt és positiva; a més, com més ràpidament creix la funció, més gran serà el valor de la derivada en el punt i viceversa:

$f'(x_0) > 0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ és creixent en x_0.

- Si una funció és decreixent en un punt, la derivada d'aquesta funció en el punt és negativa; a més, com més ràpidament decreix la funció, més petit serà el valor de la derivada en el punt, i viceversa.

$f'(x_0) < 0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ és decreixent en x_0.



$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
$f(x)$ creixent	$f(x)$ decreixent	$f(x)$ creixent

El desenvolupament del càlcul diferencial i integral

El càlcul diferencial (és a dir, el càlcul de derivades) i integral constitueix una de les grans conquestes intel·lectuals de la humanitat. Després del seu descobriment, la matemàtica va canviar completament: la geometria, l'àlgebra, l'aritmètica i la trigonometria es s'observarien des d'una nova perspectiva teòrica. Els nous conceptes i mètodes també tindrien un impacte extraordinari en la descripció i manipulació de la realitat física.

Alguns ja s'havien acostat al concepte de límit, com Zenó d'Elea, Eudox de Cnidos, Arquimedes de Siracusa, a la Grècia Antiga. Però es va haver d'esperar, tanmateix, fins al segle XVII per tenir la maduresa social, científica i matemàtica que permetria construir el càlcul diferencial i integral que avui coneixem.

Els grans creadors del càlcul diferencial van ser l'anglès Isaac Newton (1642-1727) i l'alemany Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). De manera diferent i independent, aquests grans intel·lectuals dels segles XVII i XVIII sistematitzaren i van generalitzar idees i procediments que havien estat abordats i amb èxit parcial des de l'Antiguitat. Abans de Newton i Leibniz es van fer diferents aportacions d'importància associades al nom de grans personalitats, com, per exemple, Gilles Personne de Roberval (1602-1675), Johannes Kepler (1571-1630), René Descartes (l596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), Galileo Galilei (1564-1642), Christian Huygens (1629-1695, amic de Leibniz), John Wallis (1616-1703, amic de Newton), Bonaventura Cavalieri (1598-1647, deixeble de Galileu), Evangelista Torricelli (1608-1647, deixeble de Galileu) i Isaac Barrow (1630-1677, mestre de Newton). Cal destacar la contribució decisiva per al treball de Newton i Leibniz que va representar la geometria analítica (l'expressió de punts geomètrics en coordenades i l'ús de mètodes algebraics), creada independentment per Descartes i Fermat.

La construcció del càlcul va ser una part important de la revolució científica que va viure l'Europa del segle XVII. A part dels noms que hem esmentat, els de William Harvey (1578-1657), Francis Bacon (1561-1626), Pierre Gassendi (1592-1655), Robert Boyle (1627-1691), Robert Hooke (1635-1703) estan vinculats a grans contribucions en l'anatomia, la física, la química, etc.

En aquest sentit, el nom de Newton no només s'associa a la creació del càlcul, sinó també al que fou la principal expressió de la revolució científica del segle XVII: la síntesi de l'astronomia i la mecànica que va fer en la seva obra *Principis matemàtics de la filosofia natural*, publicada el 1687. Mostrant matemàticament que el sistema del món se sostenia per la llei de la gravitació universal, els seus textos es van convertir en la base de la nova ciència. La física newtoniana només va a començar a ser "superada" per la física relativista d'Albert Einstein a les primeries del segle XX.

Què és la derivada d'una funció en un punt i quina és la seva interpretació?

> La derivada d'una funció en un punt és igual a cert límit que coincideix, geomètricament, amb el pendent de la recta tangent en aquest punt. La derivada d'una funció $f(x)$ en un punt x_0 s'indica de la manera següent: $f'(x_0)$.

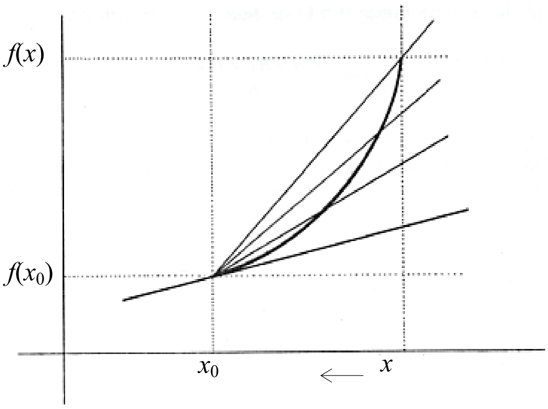
La derivada d'una funció en un punt és un dels conceptes que han revolucionat la matemàtica moderna. No és un concepte senzill però, a canvi, té moltíssimes aplicacions. A més, el procés de càlcul de derivades no és excessivament complicat si se segueixen unes senzilles regles.

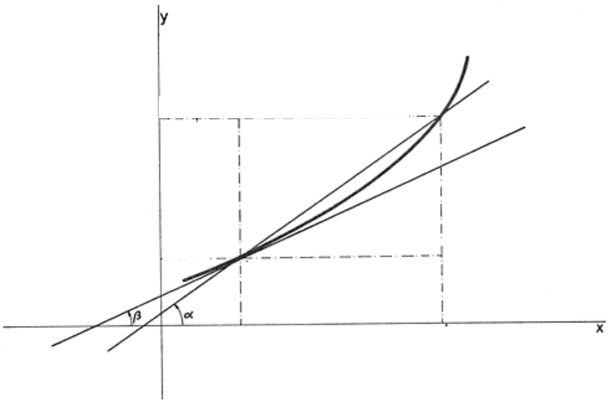
La derivada d'una funció, f, en un punt, x_0, i que s'indica $f'(x_0)$ es defineix a partir del càlcul d'un límit:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

Evidentment, és possible que aquest límit no es pugui calcular en el punt x_0; en aquest cas, es diu que la funció no és *derivable* en el punt x_0. Ara bé, pràcticament totes les funcions que s'han introduït són derivables en tot el seu domini.

Aquesta estranya definició de derivada d'una funció en un punt està íntimament lligada a la recta tangent a la funció en aquest punt. En efecte, en la gràfica següent es pot observar una funció f, la seva tangent en el punt $(x_0,f(x_0))$ i diferents rectes que passen per aquest punt i per punts de la funció $(x,f(x))$ que es van acostant a $(x_0,f(x_0))$.





El quocient $\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$ és el quocient dels dos costats d'un triangle la hipotenusa del qual és la recta que passa per $(x_0,f(x_0))$ i $(x,f(x))$. Ara bé, sabem que aquest quocient no és més que la tangent de l'angle que forma aquesta recta amb l'eix X, és a dir, el pendent d'aquesta recta. Com més a prop està x de x_0, més a prop es troba la recta que passa per $(x_0,f(x_0))$ i $(x,f(x))$ de la recta tangent a la funció en x_0. Per tant, en el límit, aquestes rectes coincideixen i, per això, el límit del quocient anterior ha de ser el pendent de la recta tangent en el punt $(x_0,f(x_0))$. Aquest pendent no és més que la tangent de l'angle β, angle al qual tendeix l'angle α.

Com es calcula la derivada d'una funció en un punt en alguns monomis?

> El càlcul de la derivada d'una funció en un punt és senzill, encara que resulta una mica complicat perquè requereix el càlcul d'un límit. És molt útil realitzar-lo en diversos monomis senzills per poder deduir una fórmula general per la derivació de polinomis.

Es pot calcular la derivada d'una funció en un punt en alguns exemples aplicant la definició de derivada d'una funció en x_0:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$$

- Sigui $f(x) = 3$, una funció constant; calculem la seva derivada en el punt $x = 2$, aplicant la definició:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(2)-f(x)}{2-x}=\lim_{x\to 2}\frac{3-3}{2-x}=0$$

És a dir, la derivada de la funció $f(x) = 3$ en el punt $x = 2$ és igual a 0. De fet, la derivada d'aquesta funció en qualsevol punt és igual a 0 perquè el límit es calcula de manera semblant. En general, la derivada d'una funció sempre constant en un punt qualsevol és sempre igual a 0.

- Sigui $f(x) = x$; calculem la seva derivada en el punt $x = 3$ aplicant la mateixa definició:

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(3) - f(x)}{3 - x} = \lim_{x\to 3} \frac{3 - x}{3 - x} = 1$$

Per tant, la derivada de $f(x) = x$ en el punt $x = 3$ és igual a 1, $f'(3) = 1$. No costa gaire adonar-se que la derivada en qualsevol punt d'aquesta funció també és igual a 1.

- Sigui $f(x) = x^2$; calculem la seva derivada en el punt $x = 6$ aplicant la definició:

$$f'(6) = \lim_{x\to 6} \frac{f(6) - f(x)}{6 - x} = \lim_{x\to 6} \frac{6^2 - x^2}{6 - x}$$

En aquest cas, sabem que $6^2 - x^2 = (6 - x)(6 + x)$, per tant,

$$f'(6) = \lim_{x\to 6} \frac{6^2 - x^2}{6 - x} = \lim_{x\to 6} \frac{\cancel{(6-x)}(6+x)}{\cancel{6-x}} = \lim_{x\to 6}(6 + x) = 2\cdot 6 = 12$$

Així, doncs , $f'(6) = 2 \cdot 6 = 12$.

En general, es pot observar que, seguint el mateix procediment, la derivada d'aquesta funció $f(x) = x^2$ en qualsevol punt és $f'(x) = 2x$.

- Sigui $f(x) = x^3$; calculem la seva derivada en el punt $x = 4$, aplicant la definició:

$$f'(4) = \lim_{x\to 4} \frac{f(4) - f(x)}{4 - x} = \lim_{x\to 6} \frac{4^3 - x^3}{4 - x}$$

En aquest cas, sabem que $4^3 - x^3 = (4 - x)(4^2 + 4x + x^2)$, per tant,

$$f'(4) = \lim_{x\to 4} \frac{4^3 - x^3}{4 - x} = \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{(4-x)}(4^2 + 4x + x^2)}{\cancel{4-x}} = \lim_{x\to 4}(4^2 + 4x + x^2) = 3\cdot 4^2 = 48$$

Així, doncs , $f'(4) = 3 \cdot 4^2 = 48$.

En general, es pot observar que, seguint el mateix procediment, la derivada d'aquesta funció $f(x) = x^3$ en qualsevol punt és $f'(x) = 3x^2$.

Què és la funció derivada i com es calcula?

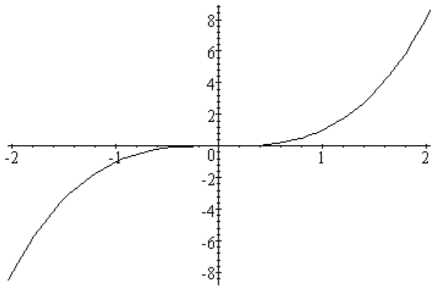
> La derivada d'una funció $f(x)$ és aquella funció que associa a cada valor la derivada de f. La funció es designa per $f'(x)$. Encara que teòricament s'hauria de calcular el límit que condueix a la derivada per cada punt, en la pràctica existeix una taula amb les funcions derivades de les principals funcions.

En calcular la derivada d'una funció, f, en tots i cadascun dels punts del seu domini, obtenim una nova funció, la funció derivada de f, que es designa f', que fa correspondre a cada valor el valor de la derivada de la funció f en aquest punt. El procés de trobar la funció derivada d'una funció donada es denomina *derivar la funció*.

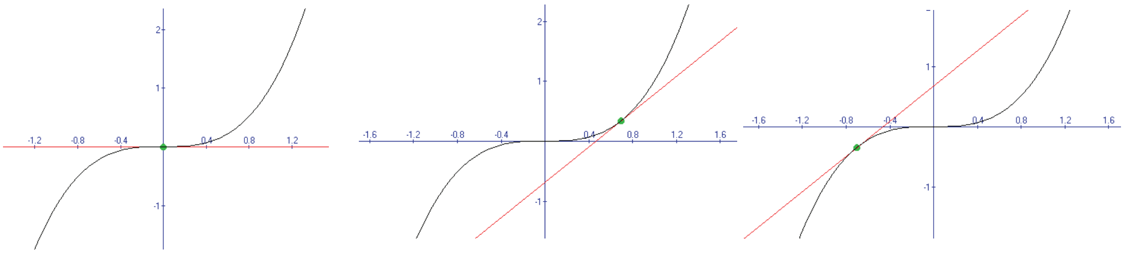
En principi, pot semblar que per derivar qualsevol funció s'hauria de calcular f' per a tots i cadascun dels punts d'una funció (és a dir, calcular el límit que defineix la derivada en un punt); això és, evidentment, impossible. Ara bé, analitzant aquests límits que condueixen a la derivada per diferents funcions (com s'ha vist per diferents monomis), s'ha arribat a una taula amb les derivades de les principals funcions conegudes. Aquesta és la taula:

Taula de derivades		
$f(x)$	$f'(x)$	Exemples
k essent k un nombre	0	$f(x) = 3$ $f'(x) = 0$
x	*1*	
x^n essent n un nombre enter	$n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = x^3$ $f'(x) = 3x^2$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$f(x) = 3^x$ $f'(x) = 3^x \cdot \ln 3$ $g(x) = e^x$ $g'(x) = e^x$
$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e$	$f(x) = \log_3 x$ $f'(x) = (1/x) \cdot \log_3 e$ $g(x) = \ln x$ $g'(x) = 1/x$
$\text{arc} \sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\text{arc} \cos x$	$\frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$	
$\text{arc} \tan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	

Estudiem, per exemple, el cas de la funció $f(x) = x^3$. La gràfica d'aquesta funció és:



Sabem que la derivada d'aquesta funció en un punt qualsevol és igual al pendent de la recta tangent; aquests gràfics mostren algunes de les tangents en diferents punts:



En primer lloc, podem observar la tangent en el punt 0, que curiosament és el mateix eix X, una recta horitzontal; el seu pendent és, evidentment, 0. Així, doncs, podem afirmar que la derivada de la funció 0 és 0, $f'(0) = 0$. En segon lloc, es pot observar que la funció f sempre és creixent, amb la qual cosa la seva derivada ha de ser sempre positiva (és a dir, la recta tangent ha de ser creixent en tot punt, excepte en el 0). En les dues tangents que hem traçat s'observa aquest fet: ambdues són rectes creixents (pendent positiu); a més, no és difícil adonar-se que la derivada és la mateixa per a valors amb el mateix valor absolut: en les dues últimes il·lustracions es pot observar que les tangents en –0,7 i en 0,7 tenen el mateix pendent. Per això, $f'(-0{,}7) = f'(0{,}7)$. Així, doncs, la funció derivada ha de ser simètrica respecte de l'eix d'ordenades.

Vegem si aquestes característiques es compleixen en la funció derivada que obtenim mitjançant l'ús de la taula de les derivades. Segons aquesta, $f'(x) = 3x^2$. Evidentment, $f'(0) = 0$; la funció derivada és sempre positiva i simètrica respecte de l'eix d'ordenades (es tracta d'una funció quadràtica molt senzilla), tal com havíem avançat. Es pot comprovar en els valors del triple gràfic anterior:
$f'(0{,}7) = 3 \cdot (0{,}7)^2 = 1{,}47$ i $f'(-0{,}7) = 3 \cdot (-0{,}7)^2 = 1{,}47$.

Quines són les regles de la derivació?

> Les regles de la derivació permeten derivar un gran nombre de funcions i permeten calcular: la derivada de la suma de funcions, la derivada d'un producte de funcions, la derivada d'un quocient de funcions, la derivada de la composició de funcions i la derivada d'una potència de funcions.

La taula de derivades, per si mateixa, no permet calcular, per exemple, la derivada d'un polinomi. Ara bé, hi ha una sèrie de regles per la suma, resta, multiplicació, divisió i composició de funcions que són de fàcil aplicació i que possibiliten el càlcul de la derivada d'un gran nombre de funcions:

- La derivada de la suma de funcions és igual a la suma de les derivades de cadascuna de les funcions. Per exemple, si $f(x) = x^3$ i $g(x) = x^2$, la derivada de la funció suma, és a dir $h(x) = x^3 + x^2$, és igual a la suma de les derivades de cadascuna d'elles: $f'(x) = 3x^2$, $g'(x) = 2x$, per tant, $h'(x) = 3x^2 + 2x$. Aquesta regla és similar per la resta de funcions: per exemple, si $c(x) = x^2 - x^5$, llavors $c'(x) = 2x - 5x^4$.

- Si f i g són dues funcions, la derivada del producte d'ambdues, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ és igual a:

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

És a dir, s'ha de derivar la primera funció i multiplicar el resultat per la segona funció sense derivar; després s'ha de sumar el resultat al producte de la primera sense derivar per la derivada de la segona. Per exemple, $h(x) = 3x^5$ és el producte de $f(x) = 3$ per $g(x) = x^5$; la derivada de $f(x)$ és $f'(x) = 0$ i la derivada de $g(x)$ és $g'(x) = 5x^4$; així

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 0 \cdot x^5 + 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$$

En altres paraules, la derivada d'un monomi és igual al producte del coeficient per la derivada de la part literal. Un altre exemple: la derivada de $7x^4$ és $28x^3$.
Vegem un exemple amb funcions no polinòmiques: si $f(x) = \cos x$ i $g(x) = \sin x$, i $h(x) = f(x) \cdot g(x) = \cos x \cdot \sin x$, la derivada de $h(x)$ és $h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = -\sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x$. En definitiva: $h'(x) = \cos^2 x - \text{sen}^2\, x$

- Si f i g són dues funcions, la derivada del quocient d'ambdues, $h(x) = f(x)/g(x)$, és igual a:

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

Per exemple, donada la funció $h(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 4}{2x^3 + x}$, la podem considerar com el quocient de $f(x) = 3x^2 - 4x + 4$ i $g(x) = 2x^3 + x$; les derivades d'aquestes funcions són $f'(x) = 6x - 4$ i $g'(x) = 6x^2 + 1$. Així:

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2} = \frac{(6x-4) \cdot \left(2x^3 + x\right) - \left(3x^2 - 4x + 4\right) \cdot \left(6x^2 + 1\right)}{\left(2x^3 + x\right)^2}$$

és a dir,

$$h'(x) = \frac{-6x^4 + 16x^3 - 21x^2 - 4}{x^2 \left(2x^2 + 1\right)^2}$$

- Si f i g són dues funcions, la derivada de la composició d'ambdues es calcula utilitzant la denominada *regla de la cadena*. Si $h(x) = f(g(x))$ la seva derivada és igual a:

$$h'(x) = (f o g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Per exemple, si $f(x) = \ln x$ i $g(x) = 3x^2 - 1$, la funció $(f o g)(x) = f(g(x)) = \ln(3x^2 - 1)$ s'ha de derivar així:

$$(f o g)'(x) = f'(g(x) \cdot g'(x) = (1/(3x^2 - 1)) \cdot 6x$$

ja que $f'(x) = 1/x$ i, per tant, $f'(g(x)) = 1/(3x^2 - 1)$; a més, $g'(x) = 6x$.

Amb aquestes regles i la taula de derivades es pot derivar una gran quantitat de funcions.

- Per derivar una potència de dues funcions $h(x) = f(x)^{g(x)}$, en primer lloc, s'ha d'extreure el ln d'aquesta funció:

$$\ln h(x) = \ln\left(f(x)^{g(x)}\right) = g(x) \ln\left(f(x)\right)$$

D'aquesta manera s'ha eliminat la funció de l'exponent. Ara només cal derivar ambdós membres de la igualtat utilitzant la regla de la cadena i la regla del producte de funcions:

$$\left(\ln h(x)\right)' = \frac{1}{h(x)} h'(x)$$

$$\left(g(x) \ln\left(f(x)\right)\right)' = g'(x) \ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)}$$

D’aquesta manera:

$$\frac{1}{h(x)}h'(x) = g'(x)\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}$$

és a dir:

$$h'(x) = h(x)\left(g'(x)\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right) = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$$

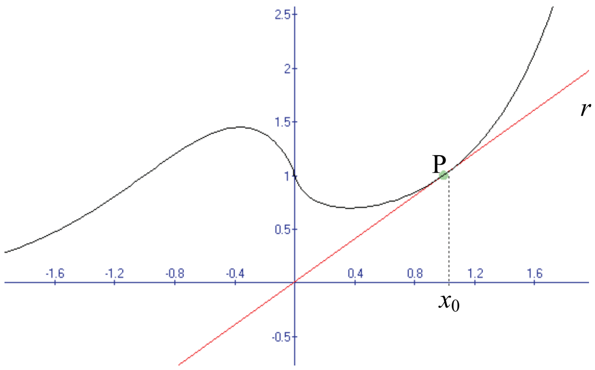
Per exemple, per derivar $h(x) = x^{\sin x}$, essent $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$:

$$h'(x) = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

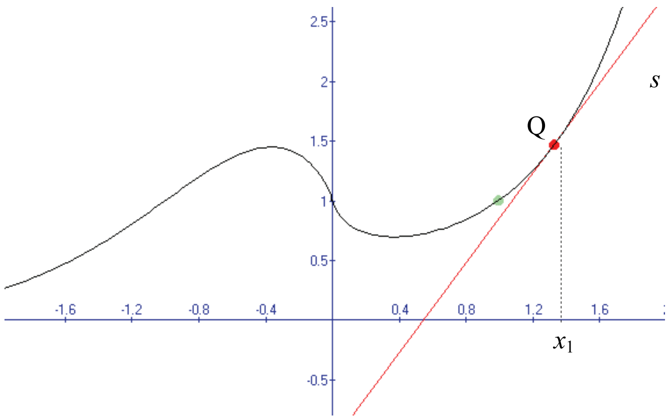
Quina relació hi ha entre la derivada d’una funció i el seu creixement?

> La derivada de la funció en un punt és igual al pendent de la recta tangent en aquest punt. Per això mateix, si una funció és creixent en un punt, la derivada d’aquesta funció en el punt és positiva; a més, com més ràpidament creix la funció, més gran serà el valor de la derivada en el punt i viceversa. De la mateixa manera, si una funció és decreixent en un punt, la derivada d’aquesta funció en el punt és negativa; a més, com més ràpidament decreix la funció, menor serà el valor de la derivada en el punt, i viceversa.

En la figura següent, en el punt P de la gràfica de la funció s’ha traçat la recta *r* tangent a la gràfica en aquest punt P, és a dir, una recta que talla la gràfica en el punt P, sense travessar-la (recolzant-s’hi), el pendent de la qual sabem que és la derivada de la funció en x_0.



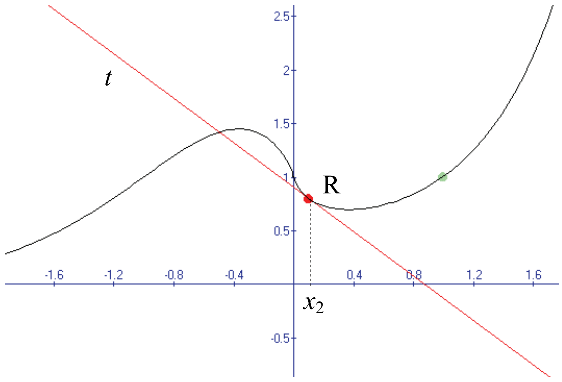
Si dibuixem la tangent en altre punt,



la recta tangent, s, a la funció f en el punt Q té un pendent superior a la recta tangent, r, en el punt P, com es pot observar comparant ambdues il·lustracions. Així, podem assegurar que la derivada de la funció f en x_0 és menor que la derivada de f en x_1. A més, en aquests dos punts, la derivada ha de ser positiva perquè sabem que si la recta és creixent, el seu pendent és positiu. Podem generalitzar dient que sempre que la funció sigui creixent (com en els punts de l'exemple), la derivada serà positiva perquè el pendent de la recta tangent ho és (ja que és una recta creixent) i, a més:

$$0 < f'(x_0) < f'(x_1)$$

En canvi, en aquest altre punt, R:



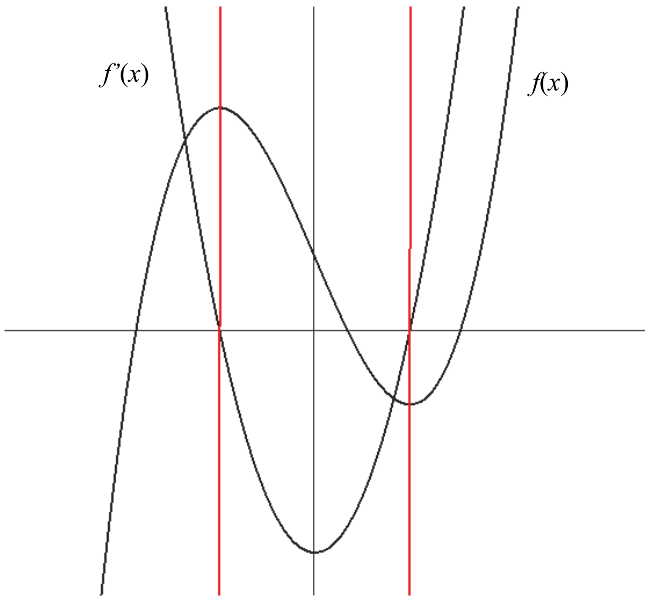
és evident que el pendent de la tangent és negatiu; per tant, la derivada de la funció f en x_2 ha de ser, forçosament, negativa:

$$f'(x_2) < 0$$

En definitiva, podem afirmar que:

- Si una funció és creixent en un punt, la derivada d'aquesta funció en aquest punt és positiva; a més, com més ràpidament creix la funció, més gran serà el valor de la derivada en el punt i viceversa.
- Si una funció és decreixent en un punt, la derivada d'aquesta funció en aquest punt és negativa; a més, com més ràpidament decreix la funció, menor serà el valor de la derivada en el punt, i viceversa.

Per exemple, la derivada de la funció $f(x) = x^3 - 3x + 1$ és $f'(x) = 3x^2 - 3$; essent una funció quadràtica és fàcil deduir que és positiva en l'interval $(-\infty,-1)$ i $(1,+\infty)$, i és negativa en l'interval $(-1,1)$. Per tant, podem dir que $f(x)$ és creixent en l'interval $(-\infty,-1)$ i $(1,+\infty)$, i decreixent en $(-1,1)$. Es pot comprovar en aquesta gràfica:

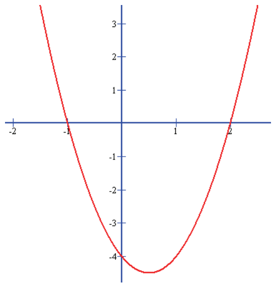


$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
$f(x)$ creixent	$f(x)$ decreixent	$f(x)$ creixent

Exercicis

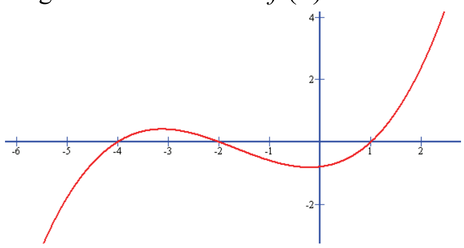
1. Calcula les derivades d'aquestes funcions:
   a. $f(x) = x \cdot \sin x$
   b. $g(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$
   c. $h(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 1}$
   d. $t(x) = \dfrac{e^{2x+1}}{\ln x}$
   e. $b(x) = e^{3x^2 - x - 1}$

2. Si aquesta és la gràfica de la derivada d'una funció, $f'(x)$:



   Contesta raonadament aquestes preguntes sobre $f(x)$:
   a. La funció a $x = 0$ és creixent o decreixent?
   b. La funció a $x = 2.3$ és creixent o decreixent?
   c. Té cap mínim?
   d. Té cap màxim?
   e. Dóna els intervals de creixement i decreixement de la funció.

3. La gràfica d'una funció $f(x)$ és:



   Contesta raonadament aquestes preguntes:
   a. Quin és el signe de la derivada, $f'(x)$, en $x = -3$? I en $x = 0$?
   b. Hi ha cap punt en què la derivada, $f'(x)$, sigui 0? Quina condició compleixen aquests punts?
   c. Dóna el signe de la derivada, $f'(x)$, en tots els punts del domini.

Solucions

1.

a. Aplicant la regla de la cadena:
$f'(x) = \sin x + x\cos x$

b. Aplicant la derivació d'un quocient:
$$g'(x) = \frac{2(x+1)-2x-1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

c. Aplicant la derivació d'una arrel i la regla de la composició de funcions:
$$h'(x) = \frac{6x+2}{2\sqrt{3x^2+2x+1}} = \frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+2x+1}} =$$

d. $$t'(x) = \frac{e^{2x+1}\ln x - \dfrac{e^{2x+1}}{x}}{\left(\ln x\right)^2}$$

e. $b'(x) = (6x-1)e^{3x^2-x-1}$

2.

a. És decreixent perquè la seva derivada és negativa.

b. És creixent, perquè la seva derivada és positiva.

c. Sí, al punt $x = 2$, perquè la derivada passa de ser negativa a positiva.

d. Sí, al punt $x = -1$, perquè la derivada passa de ser positiva a negativa.

e. La funció és decreixent a [-1,2], perquè la derivada és negativa, i creixent a la resta, $(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$

3.

a. És positiva, perquè la funció és creixent.
És negativa, perquè la funció és decreixent.

b. Sí, en els punts $x = -3, x = 0$, aproximadament, perquè són un màxim i un mínim locals de la funció.

c. La derivada és negativa a (-3,0), aproximadament, perquè la funció és decreixent, mentre que és positiva a $(-\infty,-3)\cup(0,\infty)$, perquè la funció és creixent.