Límits de funcions

Límits de funcions

Definició de límit d'una funció en un punt

El límit funcional és un concepte relacionat amb la variació dels valors d'una funció a mesura que varien els valors de la variable i tendeixen a un valor determinat. El límit d'una funció en un valor determinat d'*x* és igual a un nombre al qual tendeix la funció quan la variable tendeix a aquest valor. Aquest fet s'indica així:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

i es llegeix de qualsevol d'aquestes formes:

el límit d'una funció *f* en un valor *a* és igual a *b*;

la funció *f* té límit *b* quan la *x* tendeix a *a*.

La manera més rigorosa de definir aquest concepte és la següent:

donat nombre real ε > 0 hi ha un nombre real δ > 0 de manera que si $|x - a| < \delta$, llavors es compleix que $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Regles del càlcul de límits

- El límit de la suma (o resta) de dues funcions en un punt és igual a la suma (o resta) de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió, és a dir:

si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ i $\lim_{x \to a} g(x) = c$

llavors

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = b + c$$

- El límit del producte de dues funcions en un punt és igual al producte de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió, és a dir:

si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ i $\lim_{x \to a} g(x) = c$

llavors

$$\lim_{x \to a} (f \times g)(x) = b \times c$$

Seguint aquestes dues primeres regles, podem afirmar que si la funció $f(x)$ és un polinomi:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

- El límit del quocient de dues funcions en un punt és igual al quocient de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió, sempre que el denominador no sigui 0, és a dir:

si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ i $\lim_{x \to a} g(x) = c$

llavors

$$\lim_{x \to a} (f / g)(x) = b / c$$

- El límit de la potència de dues funcions en un punt és igual a la potència de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió, sempre que ambdues funcions no siguin 0 al mateix temps, és a dir:

si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ i $\lim_{x \to a} g(x) = c$

llavors

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = b^c$$

Límit d'una funció quan x tendeix a $+\infty$ o a $-\infty$

- El límit d'una funció $f(x)$ és un nombre a quan la x tendeix a $+\infty$ quan, donat un interval qualsevol de centre a, hi ha un nombre k de manera que si $x > k$, llavors $f(x)$ es troba en l'interval de centre a del principi. Això es nota així:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$$

- El límit d'una funció $f(x)$ és un nombre a quan la x tendeix a $-\infty$ quan, donat un interval qualsevol de centre a, hi ha un nombre k de manera que si $x < k$, llavors $f(x)$ es troba en l'interval de centre a del principi. Això es nota així:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

Aquests límits es poden calcular mitjançant l'ús de taules.

x	$f(x)$
1	1
10	0,1
100	0,01
200	0,005
300	0,003333
1000	0,001
5000	0,0002
10000	0,00001

Per exemple, donada la funció $f(x) = \frac{1}{x}$

si es vol buscar

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

es pot construir una taula com la del marge amb valors de x cada vegada més grans, i comprovar si hi ha cap valor límit per la funció. Es pot observar que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Límits infinits

- Es diu que una funció tendeix a $+\infty$ quan x tendeix a a, si la funció creix sense límit quan la x tendeix al valor a. Això es denota així:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

- Es diu que una funció tendeix a $-\infty$ quan x tendeix a a, si la funció decreix sense límit quan la x tendeix al valor a. Això es denota així:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Límits laterals

- El límit lateral per la dreta d'una funció en un punt a és el límit de la funció quan es considera que la variable només pot tenir valors majors que el punt, i es denota així:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = b$$

- El límit lateral per l'esquerra d'una funció en un punt a és el límit de la funció quan es considera que la variable només pot tenir valors menors que el punt:

$$\lim_{x\to a-} f(x) = b$$

Així, doncs, el límit d'una funció f en un punt a existeix si:

1. Existeixen els seus límits laterals, per l'esquerra i per la dreta.
2. Ambdós límits són iguals al mateix nombre, b:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = b$$

En aquest cas, el límit serà:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

Indeterminacions

Un límit el resultat del qual no sigui un nombre ni tampoc +∞, ni –∞, es diu que és una indeterminació i, per això, s'ha d'estudiar amb més deteniment per resoldre'l:

$\lim_{x\to p} f(x)$ és indeterminat quan dóna, en un primer moment, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$

Resolució d'aquests tipus principals d'indeterminacions:

- Indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$

Generalment es tracta d'un quocient de polinomis, de manera que ambdós polinomis s'anul·len en el punt p en el qual es calcula el límit. Per resoldre aquests casos s'ha de dividir el numerador i el denominador entre $x - p$.

- Indeterminació del tipus $\frac{\infty}{\infty}$

Generalment es tracta d'un quocient de polinomis essent p = +∞ o –∞. El resultat d'aquest tipus de límits s'ofereix en aquesta taula, en la qual es recullen els graus del numerador (gn) i denominador (gd), el quocient dels signes dels coeficients de grau màxim de numerador i denominador (s), i el signe de p:

	gn > gd		gn = gd		gn < gd	
s	+	–	+	–	+	–
p = +∞	+∞	–∞	quocient de coeficients de grau màxim		0.	
p = –∞	–∞	+∞				

- Indeterminació del tipus 0 · ∞

Els límits són del tipus:

$$\lim_{x\to p} f(x)g(x)$$

que es pot resoldre amb aquesta modificació:

$$f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

D'aquesta manera es transforma en una indeterminació del tipus $\frac{\infty}{\infty}$.

- Indeterminació del tipus ∞ – ∞

Aquesta indeterminació és molt usual entre funcions que contenen arrels, en una expressió amb una diferència de funcions. En aquests casos se sol multiplicar i dividir la funció per la seva conjugat (és a dir, per la mateixa expressió en la qual s'ha canviat el – pel +).

Asímptotes a una funció

Una asímptota a una funció és una recta que al tendir la x a un nombre, a +∞, o a –∞ s'acosta a la funció de manera constant fins a fer-se "tangent en l'infinit."

Les asímptotes poden ser:

- Asímptotes verticals

La funció té una asímptota vertical quan la x tendeix a un valor, i la funció tendeix a +∞ o –∞:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \text{ o bé, } \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

En aquest cas, la recta $x = a$ és una asímptota vertical.

- Asímptotes horitzontals

La funció té una asímptota horitzontal quan la x tendeix a +∞ o a –∞, i la funció tendeix a un valor concret:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \text{ o bé, } \lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

El concepte d'*infinit*

En el llenguatge quotidià no és difícil escoltar expressions que incloguin el terme *infinit* o els seus derivats: normalment fan referència a un nombre enorme, gairebé impensable; si algú digués "t'ho he dit infinites vegades", tots entenem que qui parla ha dit moltíssimes vegades la mateixa cosa a l'oïdor.

En matemàtiques, el concepte d'*infinit* no agradava als matemàtics ni als pensadors antics; només a partir del segle XVII es comença a utilitzar aquest concepte assíduament (encara que amb moltes reticències) per designar allò que és és gran que qualsevol altra cosa imaginable, és a dir, més gran que qualsevol nombre real. Per això, aquest concepte queda fora dels nombres reals.

A partir del segle XVII es comença a usar com a símbol de l'infinit una corba denominada *lemniscata*, ∞, símbol que, curiosament, apareix en les populars cartes del Tarot com un barret sobre el cap del mag o joglar, en la carta del mateix nom.

Carta de tarot corresponent al mag.

El matemàtic John Wallis, a l'obra *Arithmetica infinitorum,* va ser el primer a usar aquest símbol per representar l'infinit. Kant, el segle XIX, coincidia amb Aristòtil a assenyalar que el límit absolut és impossible en l'experiència, és a dir, mai no podem arribar a l'infinit. I el gran matemàtic Karl Friedrich Gauss, el 1831, emfasitzava la seva protesta contra l'ús de l'infinit com un fet consumat: "Protesto contra l'ús d'una quantitat infinita com una entitat actual; aquesta mai no es pot permetre en matemàtica. L'infinit és només una forma de parlar, quan en realitat hauríem de parlar de límits als quals certes raons es poden aproximar tant com es vulgui, mentre que a unes altres els és permès de créixer il·limitadament". Gauss no va ser l'únic matemàtic de la seva època que va rebutjar l'infinit com a quantitat existent.

El teòleg i matemàtic txec Bernhard Bozen va ser el primer a tractar de fonamentar la noció d'*infinit*; en la seva obra pòstuma, *Paradoxes de l'infinit* (1851), va defensar l'existència d'un infinit i va emfasitzar que el concepte d'equivalència entre dos conjunts era aplicable tant a conjunts finits com a infinits. Bozen va acceptar com una fet normal que els conjunts infinits fossin equivalents a una part d'ells mateixos. Aquesta definició de l'infinit va ser utilitzada posteriorment per Cantor i Dedekind. A pesar que l'obra de Bozen *Paradoxes de l'infinit* era més aviat de tall filosòfic que matemàtic, ja que no tenia conceptes crucials com conjunt i nombre cardinal, podríem dir que Bozen va ser el primer matemàtic a establir les bases per la construcció d'una teoria de conjunts.

Quina és la noció intuïtiva de límit funcional?

El límit funcional és un concepte relacionat amb la tendència dels valors d'una funció a mesura que varien els valors de la variable i tendeixen a un valor determinat. El límit d'una funció en un valor determinat de x és igual a un nombre al qual tendeix la funció quan la variable tendeix a aquest valor, encara que no acaba de ser-ho mai.

El límit d'una funció en un valor determinat de x és igual a un nombre al qual tendeix la funció quan la variable tendeix a aquest valor (però mai no arriba a ser-ho). Si el límit d'una funció f en un valor a és igual a b, s'escriu d'aquesta manera:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

També es diu que "la funció f té límit b quan la x tendeix a a". Per exemple, si $f(x)$ és una funció que compleix que, quan la x tendeix a 3, la funció tendeix a 1, llavors aquest fet s'escriurà així:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 1$$

Així, doncs, el límit d'una funció en un valor a dóna una idea de la tendència de la funció quan el valor de la x tendeix a aquest valor. Per estudiar el límit d'una funció en un valor, es pot crear una taula amb diferents valors de la funció el component de la qual x tendeix al valor a (però que mai sigui a). Per exemple, si la funció és $f(x) = 2x + 1$, i es vol calcular:

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

es pot construir una taula com la del marge. Sembla evident que com més a prop d'1 es troba la x, més a prop de 3 es troba $f(x)$. Així, doncs, podem deduir

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

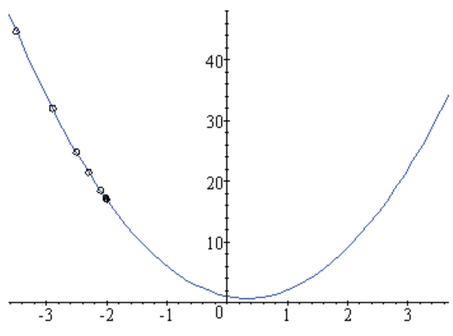
x	$f(x)$
0	1.
0,1	1,2
0,5	2.
0,7	2,4
0,9	2,8
0,99	2,98

Un altre exemple: si $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, podem intentar calcular el límit d'aquesta funció quan x tendeix a –2. Una vegada feta la taula és fàcil deduir que:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 17$$

x	$f(x)$
–3	34.
–2,9	32,03
–2,5	24,75
–2,3	21,47
–2,1	18,43
–2,01	17,1403
–2,001	17,014003

cosa que es pot observar en la gràfica:



Els punts de la taula s'acosten cada vegada més a –(2,17).

Aquesta no és una definició rigorosa del límit d'una funció en un punt, però és molt senzilla i efectiva en la majoria de les funcions que s'han estudiat.

Quin és el concepte rigorós de límit d'una funció en un punt?

Una funció f té límit b quan x tendeix a a, si i solament si, donat un interval qualsevol centrat en b, hi ha un interval de centre a de manera que tots els punts d'aquest últim interval, excepte el punt a, tenen la seva imatge en l'interval de centre b anterior. En general, no es recorre a la definició de *límit* per buscar el límit d'una funció en un punt, sinó que es recorre als límits ja coneguts, a unes regles senzilles de càlcul amb límits i a l'ús de taules de valors, amb successions el límit de les quals sigui el valor en què es vol buscar el límit.

Una funció f té límit b quan x tendeix a a, si i solament si, donat un interval qualsevol centrat en b, hi ha un interval de centre a de manera que tots els punts d'aquest últim interval, excepte el punt a, tenen la seva imatge en l'interval de centre b anterior, és a dir:

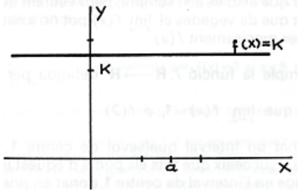
$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

si i solament si es compleix el següent:

donat qualsevol nombre real $\varepsilon > 0$ hi ha un nombre real $\delta > 0$ de manera que si $|x - a| < \delta$, llavors es compleix que $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Vegem exemples senzills que expliquin aquesta definició, i l'enllacin amb la noció intuïtiva de límit funcional:

- Donada una funció $f(x) = k$, essent k un nombre qualsevol, compleix que

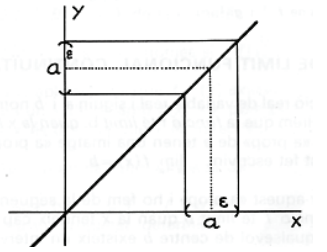


$$\lim_{x\to a} f(x) = k$$

sigui quin sigui el valor d'a.

Vegeu com, donat un interval centrat en k, tan petit com vulguem, sempre podem trobar un interval centrat en a, la imatge del qual caigui tota dintre de l'interval inicial. En aquest cas, l'interval centrat en a pot ser qualsevol, ja que totes les imatges són igual a k i, per tant, cauen dintre de l'interval centrat en k.

- Donada la funció $f(x) = x$, es compleix que



$$\lim_{x\to a} f(x) = a$$

sigui el que sigui el valor d'a.

Vegeu com totes les imatges de l'interval $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ es troben en l'interval $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$. Per tant, es compleix la definició de límit, en aquest cas, si es tria $\delta = \varepsilon$.

En general, no es recorre a la definició de *límit* per buscar el límit d'una funció en un punt, sinó que es recorre als límits ja coneguts, a unes regles senzilles de càlcul amb límits i a l'ús de taules de valors, amb successions el límit de les quals sigui el valor en què es vol buscar el límit funcional.

Quines són les regles principals per al càlcul de límits?

Les regles per al càlcul de límits s'apliquen a les operacions principals: si s'opera amb dues funcions, essent les operacions suma, resta, multiplicació, divisió o potència, i es calcula el seu límit en un punt, el resultat és igual a la mateixa operació aplicada al resultat dels límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió.

Aquestes són les regles principals per al càlcul de límits:

- El límit de la suma (o resta) de dues funcions en un punt és igual a la suma (o resta) de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió, és a dir:

si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$

llavors

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = b+c$$

- El límit del producte de dues funcions en un punt és igual al producte de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió, és a dir:

si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$

llavors

$$\lim_{x\to a}(f\times g)(x) = b\times c$$

Seguint aquestes dues primeres regles, podem afirmar que si la funció $f(x)$ és un polinomi, el límit en qualsevol punt és igual al valor del polinomi en aquest punt, és a dir:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Això es pot comprovar de manera senzilla, ja que un polinomi és una suma de productes de nombres i la variable x. Per exemple, per trobar el límit en cada punt de la funció $x - 2$, es construeixen $f(x) = x$ i $g(x) = -2$, i es busca el límit quan x tendeix a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a} x = a\\ \lim_{x\to a} g(x) &= \lim_{x\to a} -2 = -2\end{aligned} \quad \text{i llavors} \quad \lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} x - 2 = a - 2$$

- El límit del quocient de dues funcions en un punt és igual al quocient de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió, sempre que el denominador no sigui 0, és a dir:

si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$

llavors

$$\lim_{x\to a}(f/g)(x) = b/c$$

- El límit de la potència de dues funcions en un punt és igual a la potència de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió, sempre que ambdues funcions no siguin 0 al mateix temps, és a dir:

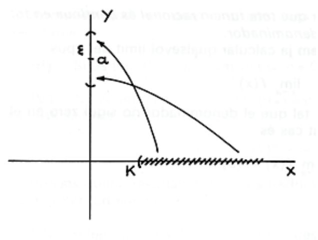
si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$

llavors

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = b^c$$

Què significa el límit quan la variable tendeix a +∞ o –∞?

Es diu que el límit d'una funció $f(x)$ és un nombre a quan la x tendeix a $+\infty$, quan donat un interval qualsevol de centre a, hi ha un nombre k de manera que si $x > k$, llavors $f(x)$ es troba en l'interval de centre a del principi. La definició és molt semblant si la x tendeix a $-\infty$, i només s'ha de canviar $x > k$, per $x < k$. Una manera senzilla de trobar aquest tipus de límits consisteix a crear una taula de la funció amb valors que vagin creixent (o decreixent) sense límit, encara que no és un mètode fiable.

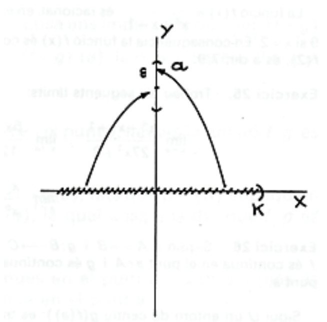


Es diu que el límit d'una funció $f(x)$ és un nombre a quan la x tendeix a $+\infty$, quan donat un interval qualsevol de centre a, hi ha un nombre k de manera que si $x > k$, llavors $f(x)$ es troba en l'interval de centre a de el principi. Això es denota així:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$$

Dit d'una altra manera, es compleix que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$, si i solament si, donat un nombre positiu ε, hi ha un nombre k tal que si $x > k$ llavors $a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$.

En aquest gràfic es representa aquest fet: els valors de la funció a partir de k sempre cauen dintre de l'interval de centre a.



Es diu que el límit d'una funció $f(x)$ és un nombre a quan la x tendeix a $-\infty$ quan donat un interval qualsevol de centre a, hi ha un nombre k de manera que si $x < k$, llavors $f(x)$ es troba en l'interval de centre a del principi. Això es denota així:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

Dit d'una altra manera, es compleix que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$, si i solament si, donat un nombre positiu ε, hi ha un nombre k tal que si $x < k$ llavors

$$a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$

els valors de la funció a partir de k sempre cauen dintre de l'interval de centre a

Una manera senzilla de buscar aquests límits quan la variable tendeix a $+\infty$ o $-\infty$, encara que no sempre fiable, consisteix a construir una taula de valors que creixin indefinidament (o que decreixin indefinidament) i comprovar si hi ha cap valor al qual tendeixi la funció. Per exemple, donada la funció:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

x	$f(x)$
1	1.
10	0,1
100	0,01
200	0,005
300	0,003333
1000	0,001
5000	0,0002
10000	0,00001

si es vol buscar

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

es pot construir una taula com la del marge amb valors de x cada vegada més grans i comprovar si hi ha cap valor límit per la funció. Es pot observar que el valor límit ha de ser 0, ja que com més gran és la x, més a prop de 0 es troba el valor de la funció. Per tant,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Si es vol buscar

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

es pot construir una taula com la del marge amb valors de x cada vegada més petits, i comprovar si hi ha algun valor límit per la funció. Es pot observar que el valor límit ha de ser 0, ja que com més petita és la x, més a prop de 0 es troba el valor de la funció. Per tant,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

x	$f(x)$
–1	–1.
–10	–0,1
–100	–0,01
–200	–0,005
–300	–0,003333
–1000	–0,001
–5000	–0,0002
–10000	–0,00001

Què són els limitis laterals i els límits infinits?

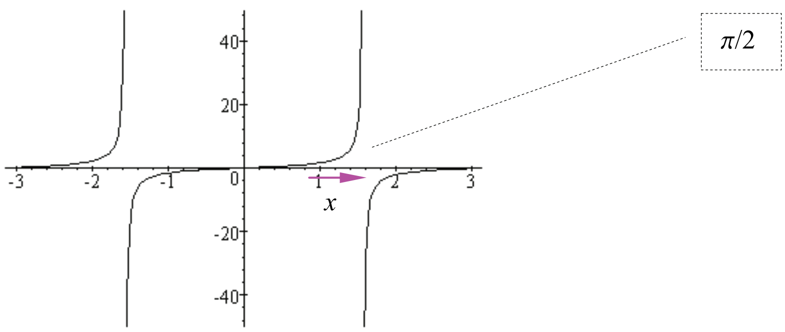
El límit lateral per la dreta d'una funció en un punt és el límit de la funció quan es considera que la variable només pot tenir valors més gran que el punt; en canvi, el límit lateral per l'esquerra d'una funció en un punt és el límit de la funció quan es considera que la variable només pot tenir valors menors que el punt. Així, doncs, el límit d'una funció existeix si existeixen aquests dos límits laterals i, a més, són iguals. De vegades, el límit pot ser infinit (+∞, o bé, –∞), és a dir, el valor de la funció creix o decreix sense cap límit.

Hi ha límits especials que no tendeixen a un nombre quan x tendeix a un valor determinat (o quan tendeix a +∞ o a –∞). Per exemple, la funció tangent, quan x és $\pi/2$, no existeix. Però si s'intenta calcular quin és el límit de la funció tangent quan x tendeix a $\pi/2$, essent la x menor que $\pi/2$, observem a la taula següent com el valor de la funció creix sense límit. En un cas com aquest, en el qual la funció creix sense límit quan la x tendeix a un determinat valor, es diu que la funció tendeix a més infinit (+∞ , tal com es pot veure a la taula), quan x tendeix a aquest valor. En el cas concret de la funció tangent,

x	$tg\,x$
1,5	14,1014199
1,55	48,0784825
1,57	1255,76559
1,5705	3374,65254
1,57075	21585,7799
1,570775	46889,3711
1,570785	88286,2283

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$$

el signe – com a exponent de $\pi/2$ indica que x ha de ser sempre menor que aquest valor; dit d'una altra manera, la x s'ha d'acostar a $\pi/2$ per la seva esquerra (en la recta real), tal com es comprova en la gràfica de la funció:



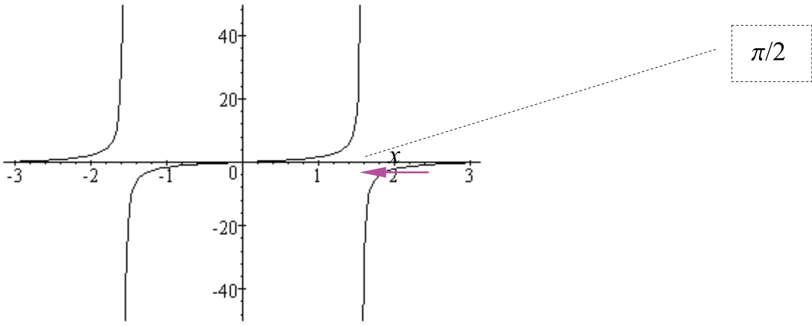
En aquest cas s'ha calculat el límit per l'esquerra de la funció tangent en el punt $\pi/2$.

De la mateixa manera, si construïm una taula de la funció tangent quan la x tendeix a $\pi/2$, sempre essent x més gran que aquest nombre, observarem que el valor de la funció cada vegada és menor. És a dir, com més propera és la x de $\pi/2$, menor és el valor de la tangent; a més, no hi ha límit inferior per aquest valor de la funció. En un cas com aquest, en el qual la funció no té límit inferior quan la x tendeix a un determinat valor, es diu que la funció tendeix a menys infinit ($-\infty$) quan x tendeix a aquest valor. En el cas concret de la funció tangent,

x	tg x
1,64159265	–14,1014199
1,59159265	–48,0784825
1,57159265	–1255,76559
1,57109265	–3374,65254
1,57084265	–21585,7799
1,57081765	–46889,3711
1,57080765	–88286,2283

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

el signe + com exponent de $\pi/2$ indica que x ha de ser sempre més gran que aquest valor; dit d'una altra manera, la x s'ha d'acostar a $\pi/2$ per la seva dreta (en la recta real), tal com es comprova en la gràfica de la funció:



En aquest cas, s'ha calculat el límit per la dreta de la funció tangent en el punt $\pi/2$.

Per tant, es pot dir que el límit d'una funció f en un punt a existeix si existeixen els seus límits laterals, per l'esquerra i per la dreta, i són iguals al mateix nombre, b; és a dir, si

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = b$$

En aquest cas, el límit serà, evidentment,

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

Per exemple, en el cas de la funció tg x, no existeix el límit de la funció en el punt $\pi/2$ perquè els límits per la dreta i per l'esquerra no coincideixen.

En el cas d'una funció anterior, $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, ja s'ha calculat una taula amb valors de x a l'esquerra de –2 (és a dir, valors menors que –2); per tant, s'havia calculat

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = 17$$

Podem intentar calcular el límit d'aquesta funció quan x tendeix a –2 per la dreta (és a dir amb valors més grans que –2). Fem una taula:

x	$f(x)$
–1	6.
–1,1	6,83
–1,5	10,75
–1,7	13,07
–1,9	15,63
–1,99	16,8603
–1,999	16,986003

És fàcil deduir que:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = 17$$

per tant,

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = 17$$

per la qual cosa es pot afirmar que, com ja havíem afirmat intuïtivament, el límit d'aquesta funció en el punt –2 és igual a 17:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 17$$

En aquest altre exemple, la funció és:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 3 & x \leq -1 \\ 2 - 3x & x > 1 \end{cases}$$

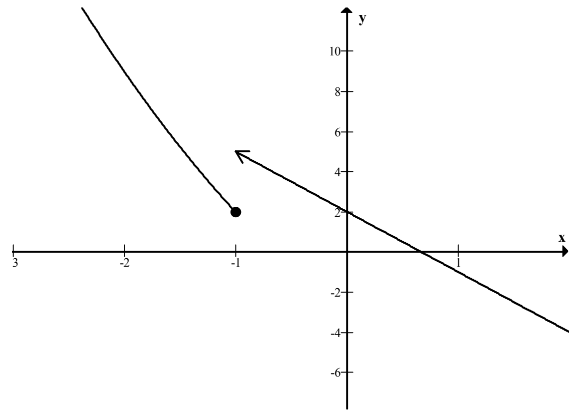
Si calculem el límit en $x = -1$, observem que

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = f(-1) = 2$$

En canvi, el límit per la dreta s'ha de calcular amb l'altra expressió, $2 - 3x$, ja que la funció per la dreta s'obté amb aquesta:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} 2 - 3x = 5$$

Per tant, encara que existeixin els límits per ambdós costats, aquests no són iguals i, per tant, el límit de la funció en $x = -1$ no existeix. La gràfica de la funció pot donar una idea d'aquest fet:



Què és una indeterminació, quins tipus d'indeterminació hi ha i com es resolen?

Alguns límits, en un primer moment, no es poden calcular perquè el seu resultat no és ni un nombre, ni tampoc infinit. En aquests casos es diu que ens trobem davant una indeterminació. Existeixen diferents tipus d'indeterminació i per cadascuna d'elles hi ha un mètode general per resoldre-la i, així, poder trobar el límit en qüestió.

En certs casos, alguns límits d'una funció en un punt no es poden calcular, en un primer moment, perquè el seu resultat no és ni un nombre, ni infinit. En aquests casos es diu que ens trobem davant una indeterminació. Hi ha diferents tipus d'indeterminacions i cadascuna d'elles es resol d'una manera especial que veurem a continuació. El tipus d'indeterminació rep el nom del *valor del límit* que es troba en primera instància i, com que és un límit indeterminat, s'ha de resoldre per algun mètode adequat. Per això, cal recordar que aquest nom no és el resultat del límit, ni pot ser-ho, ja que només un nombre o infinit són els valors vàlids d'un límit. Per exemple, si diem que un límit és del tipus 0/0, això no vol dir que aquest valor sigui possible; ben al contrari, 0/0 no és un valor correcte i, per aquest motiu, s'ha de buscar algun mètode per trobar el límit correcte.

Per tots aquests casos, se suposarà que p és un nombre real, o bé que és $+\infty$ o $-\infty$, segons els casos (això es fa per simplificar les fórmules i els casos). Els límits seran del tipus:

$$\lim_{x \to p} f(x) \text{ Indeterminat}$$

- Indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$

Es tracta d'aquells límits el resultat dels quals és precisament $\frac{0}{0}$. Generalment es tracta d'un quocient de polinomis, de manera que ambdós polinomis s'anul·len en el punt p en el qual es calcula el límit. Per exemple:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{0}{0} \quad \text{Indeterminat}$$

Per resoldre aquests casos s'ha de dividir el numerador i el denominador entre $x - p$, és a dir, en el cas de l'exemple, s'ha de dividir numerador i denominador entre $x - 2$, de la manera següent:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{x^2 - 4}{x - 2}}{\frac{x - 2}{x - 2}} = \lim_{x \to 2} \frac{x + 2}{1} = \lim_{x \to 2} x + 2 = 4$$

D'aquesta manera, en aquest cas, el límit inicialment indeterminat és igual a 4.

- Indeterminació del tipus $\frac{\infty}{\infty}$

Es tracta d'aquells límits el resultat dels quals és precisament $\frac{\infty}{\infty}$, independentment del signe dels infinits. Generalment es tracta d'un quocient de polinomis essent $p = +\infty$ o $-\infty$. Per exemple:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{+\infty}{-\infty} \qquad \text{Indeterminat}$$

El resultat d'aquest tipus de límits s'ofereix en aquesta taula, en la qual es recullen els graus del numerador (gn) i denominador (gd), el quocient dels signes dels coeficients de grau màxim de numerador i denominador (s), i el signe de p :

	gn > gd		gn = gd		gn < gd	
s	+	–	+	–	+	–
$p = +\infty$	$+\infty$	$-\infty$	quocient de coeficients de grau màxim		0	
$p = -\infty$	$-\infty$	$+\infty$				

En l'exemple anterior, el grau del numerador és més gran que el grau del denominador, el quocient dels signes dels coeficients de grau màxim de numerador i denominador és + i $p = -\infty$, per tant, el límit ha de ser $-\infty$. És a dir,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = -\infty$$

- Indeterminació del tipus $0 \cdot \infty$

Es tracta d'aquells límits el resultat dels quals és precisament $0 \cdot \infty$, amb independència del signe de l'infinit. Ens trobem en aquesta situació en límits del tipus:

$$\lim_{x \to p} f(x) g(x)$$

S'ha de tenir en compte que:

$$f(x) g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

D'aquesta manera, es pot transformar aquesta indeterminació en una indeterminació del tipus $\frac{\infty}{\infty}$, que ja sabem resoldre.

- Indeterminació del tipus $\infty - \infty$

Aquesta indeterminació és molt usual entre funcions que contenen arrels, en una expressió amb una diferència de funcions, com per exemple:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-(x+1)\right]=\infty-\infty \text{ Indeterminació}$$

En aquests casos se sol multiplicar i dividir la funció per la seva conjugada, és a dir, per la mateixa expressió en la qual s'ha canviat el + pel –:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-(x+1)\right]\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}+(x+1)}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+x}-(x+1)\right]\left[\sqrt{x^2+x}+(x+1)\right]}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)}$$

Això és així, ja que sabem que $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Així, doncs, continuem amb el límit anterior:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-(x+1)\right]=...=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-(x^2+2x+1)}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-1}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)}=\frac{-1}{2}$$

L'últim pas és senzill si es té en compte que, en el càlcul d'un límit quan x tendeix a infinit, per saber l'exponent d'una expressió dintre d'una arrel, s'ha de dividir entre 2 el seu exponent. Així, doncs, si l'expressió dintre de l'arrel és x^2+x, el terme de grau màxim és x^2, i com que es troba dintre d'una arrel el seu exponent és 2/2 = 1. Per tant, el grau màxim de l'arrel és 1. Per tant, el grau màxim del denominador és també 1 i el coeficient de grau màxim del denominador és 1 + 1 = 2 (el primer 1 de l'arrel i el segon, com a coeficient de x).

Exercicis

1. Calcula aquests límits raonadament:
   a. $\lim\limits_{x\to 3} x^2 - 2$
   b. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x^2+1}$
   c. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2}$
   d. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3-5x+3}{8x^3-2x^2+6}$
   e. $\lim\limits_{x\to 1} 2e^{\frac{1}{(x-1)^2}}$
   f. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 - 3$
   g. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{4x}$
   h. $\lim\limits_{x\to \infty} x - \sqrt{x^2-3x}$

2. Calcula els següents límits, si existeixen, pas a pas:
   a. $\lim\limits_{x\to 3} x^3 - 2x^2 + 1$
   b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3-4x}{3x-5}$
   c. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\sqrt{x^2+x} - (x+1)\right]$
   d. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3-x^2+1}{2x^3+x^2-9}$
   e. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-19}{(x-2)^3}$
   f. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2}$
   g. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$ (difícil)
   h. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

Solucions

1.

a. $\lim\limits_{x\to 3} x^2-2\ = 7$

b. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x^2+1}\ = 0$

c. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2}\ =\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)(x-2)} =\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+2)}{(x+1)(x-2)}\ =$ -3/2

d. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3-5x+3}{8x^3-2x^2+6}\ =\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{5x}{x^3}+\frac{3}{x^3}}{\frac{8x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}+\frac{6}{x^3}}\ =\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2-\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{8-\frac{2}{x^1}+\frac{6}{x^3}}\ =$

2/8

e. $\lim\limits_{x\to 1} 2e^{\frac{1}{(x-1)^2}}\ = +\infty$

f. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2-3 = +\infty$

g. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{4x}\ = 0$

h. $\lim\limits_{x\to\infty} x-\sqrt{x^2-3x}\ =\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-\sqrt{x^2-3x})(x+\sqrt{x^2-3x})}{(x+\sqrt{x^2-3x})}\ =$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-(x^2-3x)}{(x+\sqrt{x^2-3x})}\ =\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{(x+\sqrt{x^2-3x})}\ = 3/2$

2.

a. $\lim\limits_{x\to 3} x^3-2x^2+1=10$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3-4x}{3x-5}=0$

c. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-(x+1)\right]$

en principi dóna la indeterminació ∞ - ∞, per tant,

$$\lim_{x\to +\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-(x+1)\right]=\lim_{x\to +\infty}\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-(x+1)\right)\left(\sqrt{x^2+x}+(x+1)\right)}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left[\frac{x^2+x-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)}\right]=\lim_{x\to +\infty}\left[\frac{-x-1}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left[\frac{\frac{-x-1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}+\frac{(x+1)}{x}}\right]=\frac{-1}{2}$$

d. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2+1}{2x^3+x^2-9}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x^3-x^2+1}{x^3}}{\dfrac{2x^3+x^2-9}{x^3}}=\frac{1}{2}$$

e. $\lim_{x\to 2}\dfrac{-19}{(x-2)^3}$ en aquest cas el resultat dóna -19/0, per tant, s'ha d'investigar el límit per la dreta i per l'esquerra.

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{-19}{(x-2)^3}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{-19}{(x-2)^3}=+\infty$$

per tant, el límit no existeix, només existeixen el límits laterals.

f. $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2}$ dóna la indeterminació 1^∞ i per tant,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}=e$$

g. $\lim_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$ en principi dóna la indeterminació 0/0, per tant,

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}(x^2+ax+a^2)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)}{(x^2+ax+a^2)}=\frac{a-1}{3a^2}$$

l'únic valor conflictiu és a = 0, perquè s'anul·la el denominador.
En aquest cas, el límit queda:

$\lim_{x\to 0}\dfrac{x-1}{x^2}=-\infty$ en qualsevol cas, perquè el denominador sempre és positiu, independentment que la x sigui major o menor que 0.

h. $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=4$$