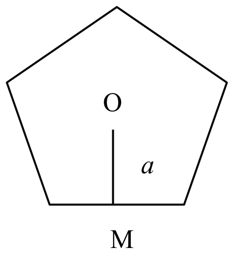
Les figures planes

Les figures planes

Classificació dels polígons

Per la forma dels angles interiors	convexos	Tenen tots els angles interiors convexos.
		Elements
		Costats: el seu nombre és n.
		Vèrtexs: el seu nombre és n.
		Angles: la suma total és $180 \cdot (n - 2)$
		Diagonals: segment que uneix els vèrtexs no contigus. En total, un polígon té $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ diagonals.
	còncaus	Tenen algun angle interior còncau.
Per la regularitat dels angles	regulars 	Tenen tots els angles iguals.
		Característiques
		Tots els angles mesuren $\frac{180 \cdot (n-3)}{n}$ graus.
		L’apotema
		L’apotema, a , és la distància entre el punt mig d'un costat i el centre del polígon.
	irregulars	Tots els altres.

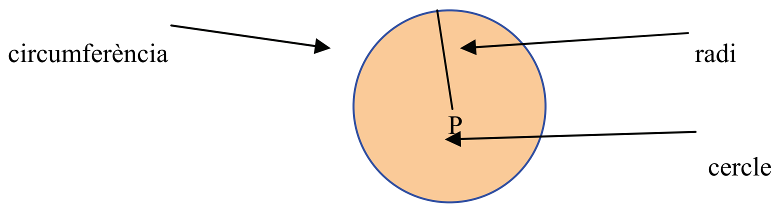
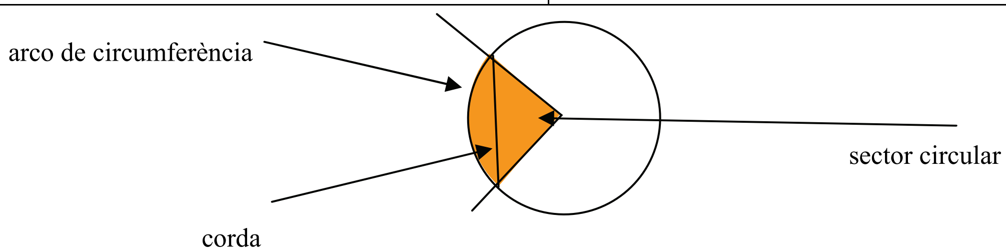
Perímetres i àrees

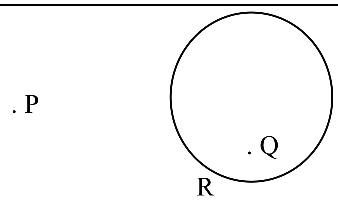
Els polígons regulars

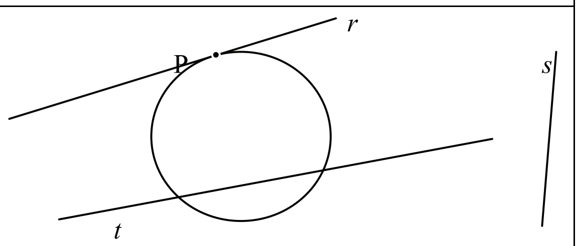
El perímetre	Si n és el nombre de costats i l la seva longitud, $P = n \cdot l$
L'àrea	Si n és el nombre de costats, l la seva longitud i a el seu apotema: $$A = \frac{n \cdot l \cdot a}{2}$$

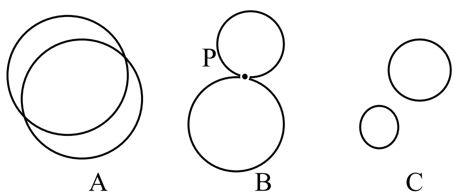
Els quadrilàters

Trapezi: si els costats són a , b, c i d: $P = a + b + c + d$	Trapezi: si b i B són les bases i h l'altura: $A = \frac{(b+B) \cdot h}{2}$
Paral·lelogram: si els costats del paral·lelogram són a i b: $P = 2a + 2b$ Quadrat: si el seu costat és c: $P = 4c$	Paral·lelogram: si b és la base i h és l'altura: $A = b \cdot h$ Rombe: si d i D són les seves diagonals: $A = \frac{d \cdot D}{2}$ Rectangle: si a i b són els costats: $A = a \cdot b$ Quadrat: si c is el costat: $A = c^2$

<table>
<tr><td>La circumferència</td><td>El cercle</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Una circumferència de radi r i centro P, és el conjunt de punts que es troben a una distancia r del punt P</td><td>Un cercle és la superfície tancada per una circumferència.</td></tr>
<tr><td>L'arc i la corda</td><td>El sector circular</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>La longitud d'una circumferència: $\boldsymbol{L = 2 \cdot \pi \cdot r}$</td><td>L'àrea d'un cercle: $\boldsymbol{A \ \pi \cdot \ = r^2}$</td></tr>
<tr><td>La longitud d'un arc de circumferència</td><td>L'àrea d'un sector circular</td></tr>
<tr><td>La longitud d'un arc de circumferència, L_A, si l'angle α està expressat en graus sexagesimals és
$$L_A = \frac{\alpha}{360} \cdot L$$
si α està expressat en radians:
$$L_A = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot L \quad = \alpha r$$</td><td>L'àrea d'un sector circular, A_S, si l'angle α està expressat en graus sexagesimals és
$$A_S = \frac{\alpha}{360} \cdot A$$
si α està expressat en radians:
$$A_S = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot A \quad = \alpha r^2/2.$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">La circumferència i els altres elements del pla</td></tr>
<tr><td>

Q és un punt interior a la circumferència.
P és un punt exterior a la circumferència.
R és un punt de la circumferència.
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>

t és una recta secant a una circumferència.
r és una recta tangent a una circumferència. El punt P és el punt de tangència.
La recta s no talla a la circumferència.
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>

Les dues circumferències de la il·lustració A són secants.
Les dues circumferències de la il·lustració B són tangents. El punt de tangència és P
Les dues circumferències de la il·lustració C no es tallen.
</td><td>
</td></tr>
</table>

El nombre π en la història

Ja en l'antiguitat, els matemàtics van advertir que en totes las circumferències existia una estreta relació entre la seva longitud (o perímetre) i el seu diàmetre (o el seu radi), però només des del segle XVII la relació es va convertir en un nombre i va ser identificat amb el nom π, "Pi" (utilitzant la primera lletra de *periphereia*, nom que els grecs donaven al perímetre d'un cercle), però no va ser fàcil demostrar que aquest nombre era irracional.

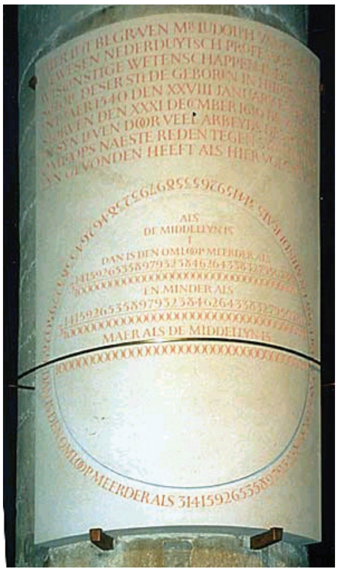
Al llarg de la història, l'expressió de π ha assumit moltes variacions. La Bíblia li assigna el valor 3 en el versicle Reis, 7, 23:

> També, de bronze fos, va fer una gran conquilla, coneguda pel nom de Mar, completament rodona, que tenia cinc metres de vora a borda, i dos metres i mig d'altura. Un fil de quinze metres mesurava el seu contorn

A Babilònia ho van calcular en 3 1/8; els egipcis, en $4(8/9)^2$; Siddhantas, 3,1416; Brahmagupta, 3,162277; i en l'antiga Xinesa, 3,1724.

Va ser a Grècia on l'exacta relació entre el diàmetre i el perímetre d'una circumferència va començar a considerar-se un dels enigmes que s'havien de resoldre. Arquimedes (s. III a, de C.) reuní i desenvolupà resultats d'altres matemàtics grecs, i mostrà que l'àrea d'un cercle és la meitat del producte del seu radi per la seva circumferència, i que la relació de la circumferència al diàmetre està compresa entre 223/71 = 3,14084 i 22/7 = 3,14285.

Amb el Renaixement, els treballs de mesura de la circumferència es multipliquen. Peuerbach, ajudant-se d'una taula de sinus, adopta per a π el valor 377/120 = 3,14666.... Els segles XV i XVI es destaquen pel desenvolupament de la trigonometria, sota l'impuls de Copèrnic i Kepler. Rhaeticus construeix una taula de sinus en la qual s'inclou a π amb 8 decimals exactes. Adrien Romain (1561-1615) obté 15 decimals i Ludolph de Colònia (1539-1610) arriba fins a 32. Segons el seu desig, aquests 32 decimals van ser gravats en la seva tomba, però en el seu país la posteritat ho va recompensar molt millor, doncs es va donar π al nom de "nombre de Ludolph".



Reproducció de l'epitafi de Ludoph van Ceulen, ja que l'original es va destruir.

Aviat, la proesa de Ludolph va ser eclipsada pels treballs de Snell (1580-1626) i Huyghens (1629-1655). Des d'aquest moment fins a l'actualitat, no ha fet més que augmentar el nombre de decimals que s'han trobat de π (fins a arribar al us 206.158.430.000 decimals aconseguits per Kanada el 1999). La veritat és que només quatre decimals de π donen suficient precisió per a les necessitats pràctiques. Amb 16 decimals s'obté la longitud d'una circumferència que tingui per radi la distància mitja de la Terra al Sol, amb l'únic error de l'espessor aproximat d'un cabell. Si reemplacem el Sol per la nebulosa més llunyana i el cabell pel corpuscle més petit conegut pels físics, no farien falta més de 40 decimals.

És molt més remarcable esmentar que la irracionalitat de π va ser demostrada per Légendre en 1794, i que una nova i més simple demostració de la irracionalitat de π va ser donada 1947 per I. Niven.

Què és un polígon?

> Un polígon és una figura plana i tancada per diversos segments units pels seus extrems, segments que es denominen costats del polígon. Els polígons es denominen amb el prefix grec que indica el nombre de costats, i el terme -*gon*, encara que també pot denominar-se polígon de *n* costats. Els polígons poden classificar-se en còncaus o convexos i també, en regulars i irregulars.

La paraula *polígon* està formada pel prefix grec *poli*-, que significa ‘molts', i per - *gonos*, que significa ‘angle' en grec. Així, doncs, polígon significa ‘figura amb molts angles.

Un polígon és una figura plana i tancada formada per diversos segments units, dos a dos, pels seus extrems. Cada segment es denomina costat del polígon i cada extrem que uneix dos segments es denomina vèrtex. Els polígons es denominen segons el nombre de costats (o d'angles) que tenen. Els noms utilitzen un prefix grec que indica el nombre de costats i un sufix, -*gon*, que significa ‘angle'. Per exemple, el polígon de 5 costats es denomina pentàgon perquè el prefix *penta*- significa ‘cinc' en grec; igualment, hexàgon és el polígon de 6 costats perquè *hexa*- significa ‘sis'. Aquesta taula recull alguns dels polígons més importants, a part del triangle, que es tracta en altre capítol:

Nombre d'angles (o costats)	Prefix grec	Nom del polígon
4	*tetra-*	tetràgon
5	*penta-*	pentàgon
6	*hexa-*	hexàgon
7	*hepta-*	heptàgon
8	*octa-*	octàgon
9	*ennea-*	enneàgon
10	*deca-*	decàgon
11	*hendeca-*	hendecàgon
12	*dodeca-*	dodecàgon

En tot cas, un polígon amb més costats sol denominar-se amb la paraula *polígon* seguida del nombre de costats: per exemple, polígon de 18 costats. En el cas del polígon de 4 costats, també pot denominar-se quadrilàter.

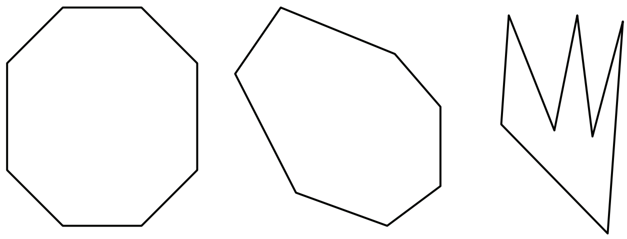
Els polígons poden classificar-se en:

- Polígons còncaus, que tenen algun dels seus angles interiors còncaus.
- Polígons convexos, que tenen tots els seus angles interiors convexos. En general, quan no es digui expressament el contrari, s'entendrà per polígon, un polígon convex.

Ara bé, els polígons també poden classificar-se segons la seva regularitat en:

- Polígons regulars, que tenen tots els costats i angles iguals entre si; per tant, els polígons regulars són tots convexos.

- Polígons irregulars, que són la resta dels polígons.



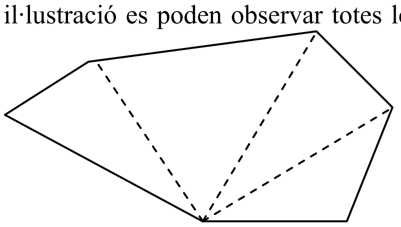
octàgon regular **octàgon irregular** **octàgon còncau**

Quins són les característiques bàsiques d'un polígon?

> En qualsevol polígon poden distingir-se: costats, vèrtex i angles. Dos d'aquests elements són contigus si es troben un al costat de l'altre. Una diagonal d'un polígon és el segment que uneix dos vèrtex no contigus del polígon. Existeixen fórmules senzilles per a calcular la suma dels angles d'un polígon i el nombre de les seves diagonals.

Els elements essencials d'un polígon són els costats, vèrtex i angles (interiors i exteriors) d'un polígon. Es diu que dos d'aquests elements són contigus si es troben un al costat de l'altre.

Una diagonal d'un polígon és un segment que uneix dos vèrtex no contigus; en la il·lustració es poden observar totes les diagonals del polígon que poden traçar-se des del vèrtex P de l'hexàgon, que són tres. En general, en un polígon poden traçar-se des d'un punt tantes diagonals com costats, menys 3



P

Si denominem n al nombre de costats d'un polígon, acabem de veure que, des d'un vèrtex qualsevol poden traçar-se $n - 3$ diagonals. Amb aquestes diagonals, el polígon queda dividit en $n - 2$ triangles; però és sabut que la suma dels angles d'un triangle és igual a 180º; per tant, la suma dels angles d'un polígon és:

$$180(n - 2)$$

Per exemple, en el cas de la figura anterior, $n = 6$; des del punt P poden traçar-se 3 diagonals que divideixen el polígon en $n - 2 = 6 - 2 = 4$ triangles. Els angles de cada triangle sumen 180º, pel que la suma dels angles de l'hexàgon és $4 \cdot 180 = 720º$.

Si n és el nombre de costats d'un polígon, també té n angles i n vèrtex. Des de cada vèrtex poden traçar-se $n - 3$ diagonals; sumant totes aquestes diagonals resulta $n \cdot (n - 3)$. Ara bé, cada diagonal s'ha contat dues vegades (una per a cada vèrtex que la compon), per tant, per a conèixer el nombre total de diagonals que poden traçar-se en un polígon, s'ha de fer la següent operació:

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Així, per exemple, un hexàgon té $6 \cdot (6–3)/2 = 9$ diagonals.

En aquest quadre es llisten els diferents elements d'un polígon, i el seu nombre:

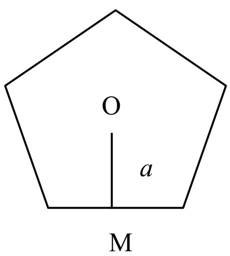
Nombre de costats d'un polígon.	n
Nombre de diagonals que es poden traçar des d'un vèrtex.	$n - 3$.
Nombre de triangles en els que pot descompondre's un polígon.	$n - 2$.
Suma dels angles d'un polígon.	$180 \cdot (n - 2)$
Nombre de diagonals d'un polígon.	$\frac{n \cdot (n-3)}{2}$

En aquesta taula es resumeixen el nombre de diagonals i la suma de tots els angles en els polígons més habituals:

Nom del polígon	Nombre de costats	Nombre de diagonals que es poden traçar des d'un vèrtex	Nombre de triangles en els que pot descompondre's	Suma dels seus angles	Nombre de diagonals
Tetràgon	4	1	2	360º	2.
Pentàgon	5	2	3	540º	5.
Hexàgon	6	3	4	720º	9.
Heptàgon	7	4	5	900º	14.
Octàgon	8	5	6	1080º	20.
Enneàgon	9	6	7	1260º	27.
Decàgon	10	7	8	1440º	35.
Hendecàgon	11	8	9	1620º	44.
Dodecàgon	12	9	10	1800º	54.

Quins són les característiques bàsiques d'un polígon regular?

> L'angle entre costats contigus d'un polígon regular només depèn del nombre de costats. Altres elements essencials d'un polígon regular són el seu centre i la longitud de l'apotema o distància del centre del polígon fins al centre d'un dels seus costats. Aquesta distància només depèn del número de costats i de la seva longitud.

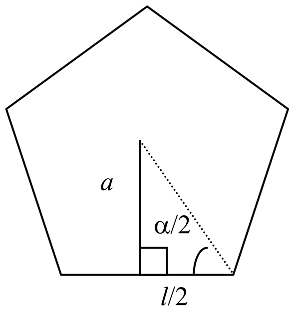


Un polígon regular té tots els costats i tots els angles iguals. Aquest fet permet calcular l'angle, α, entre dos costats contigus qualssevol, ja que la suma de tots els angles d'un polígon de n costats és $180 \cdot (n - 2)$. Així, doncs, cada angle té

$$\frac{180 \cdot (n-2)}{n} \text{ graus}$$

En tot polígon regular pot definir-se el centre com aquell punt que equidista de tots els seus vèrtex. A partir del centre pot traçar-se un segment cap al punt mig d'un dels seus costats; a aquest segment se li denomina apotema, a. La figura mostra el apotema, OM, des del centre del pentàgon fins al punt mig d'un dels costats, M. Evidentment, el apotema pot traçar-se sobre qualsevol dels costats del polígon regular.

És evident que la longitud del apotema depèn de la longitud del costat del polígon regular, *l*, i del nombre de costats del polígon, *n*. Podem observar en aquesta imatge como el quocient entre el apotema, *a* , i la meitat del costat, *l*, del polígon és igual a la tangent de la meitat de l'angle, α, entre dos costats contigus.



Així, doncs:

$$tg\ \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{l/2}$$

En el cas del pentàgon, α = 108º, per tant:

$$tg\ 54 = \frac{a}{l/2}$$

per tant, $a = \frac{l \cdot \mathrm{tg}\ 54}{2}$ per al cas del pentàgon. Per al cas d'un polígon regular de costat *l*, i angle entre costats α = $\frac{180 \cdot (n-2)}{n}$ graus

$$a = \frac{l}{2}\,\mathrm{tg}\ \frac{\alpha}{2}$$

L'exemple més senzill és, potser, l'hexàgon, ja que α = 120º. Així:

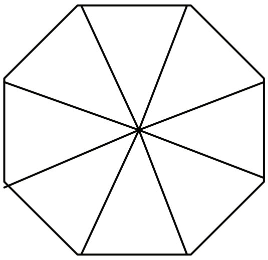
$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l$$

En aquesta taula es recull l'angle entre costats contigus i el valor del apotema, suposant que el costat *l* = 1.

Nom del polígon	*n*	Angle, α	Apotema, *a*.
Tetràgon regular	4	90º	0,50
Pentàgon regular	5	108º	0,69
Hexàgon regular	6	120º	0,87
Heptàgon regular	7	128,57º	1,04
Octàgon regular	8	135º	1,21
Enneàgon regular	9	140º	1,37
Decàgon regular	10	144º	1,54
Hendecàgon regular	11	147,27º	1,70
Dodecàgon regular	12	150º	1,87

Como es calcula el perímetre i l'àrea d'un polígon regular?

> El perímetre d'un polígon és la suma de les longituds dels seus costats i l'àrea d'un polígon és la mesura de la seva extensió. El perímetre d'un polígon regular és igual al producte de la longitud de cada costat pel nombre de costats. Per al càlcul de l'àrea només cal conèixer el nombre de costats i la seva longitud.



El perímetre, P, és molt fàcil de calcular, ja que tots els costats són iguals. Si n és el nombre de costats i l és la mesura de cadascun d'ells, evidentment, el perímetre d'un polígon és:

$$P = n \cdot l$$

L'àrea tampoc és difícil de calcular: es divideix el polígon regular en n triangles isòsceles, unint el centre del triangle amb cadascun dels vèrtex, tal com es veu en la il·lustració del octàgon regular.

Evidentment, per a calcular l'àrea del polígon, només ha de multiplicar-se pel nombre de costats l'àrea d'un dels triangles. Ara bé, la base d'un triangle és el costat, l, del polígon regular; l'altura del triangle és el apotema, a, del polígon. Per tant, l'àrea del triangle és

$$\frac{l \cdot a}{2} = \frac{l \cdot \frac{l}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{l^2}{4} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

Així, doncs, l'àrea d'un polígon regular de n costats, de costat l i angle $\alpha = \frac{180 \cdot (n-2)}{n}$ entre costats, és igual a

$$A = n \cdot \frac{l \cdot a}{2} = \frac{n \cdot l^2}{4} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

Quins són les característiques bàsiques d'un quadrilàter?

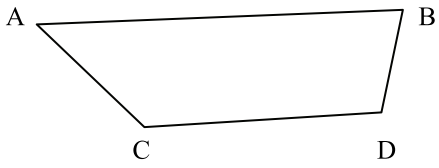
> Els quadrilàters estan entre els polígons més importants i estudiats, i per això és necessari estudiar-los amb més deteniment. Hi ha dos tipus essencials de quadrilàters: els trapezis i els paral·lelograms. Entre els primers, es troben els trapezis pròpiament dits i els trapezoides. Entre els segons, els més importants són els quadrats, rectangles i rombes. Les fórmules del perímetre i de l'àrea d'un quadrilàter són més senzilles com més regular és.

Juntament amb els triangles, els quadrilàters són un dels polígons més estudiats i importants de la geometria plana. Per això s'estudien amb més deteniment.

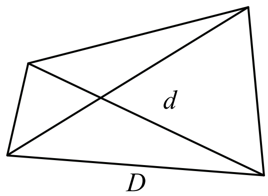
Dos elements qualssevol d'un quadrilàter (costats, angles o vèrtex) es denominen:

- contigus, si es troben un al costat de l'altre. Per exemple, en la figura, el costat AC és contigu al costat CD perquè comparteixen el vèrtex C; els vèrtex B i D són contigus perquè comparteixen el costat BD.

- oposats, en qualsevol altre cas. Per exemple, en la figura, els costats BD i AC. L'angle $\widehat{ABD}$ és oposat al vèrtex C

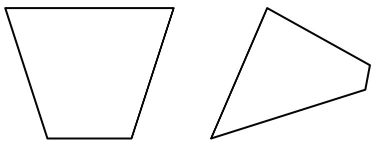


Les diagonals d'un quadrilàter són segments que uneixen vèrtex oposats. Normalment, la diagonal més curta s'indica amb la lletra *d*, i la major amb *la D*.



Els quadrilàters es classifiquen de la següent manera:

Els trapezis i els trapezoides



trapezi **trapezoide**

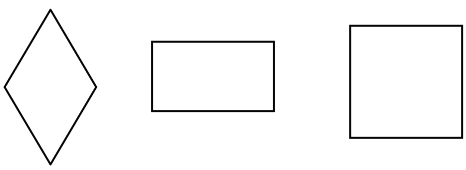
Un trapezi és un quadrilàter que només té dos costats paral·lels, denominats bases *b* (la base menor) i *B* (la base major). La distància entre aquests dos costats paral·lels es denomina altura (*h*).

Poden distingir-se tres tipus de trapezis:

- Trapezi rectangle, que té dos angles rectes.
- Trapezi isòsceles, que té dos angles iguals, que no són rectes.
- Trapezi escalè, que no té cap parell d'angles iguals.

Un trapezoide és un quadrilàter que no té cap parell de costats paral·lels.

Els paral·lelograms

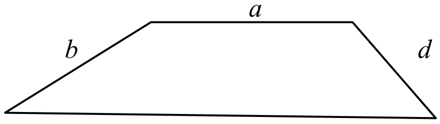


rombe rectangle quadrat

Un paral·lelogram és un quadrilàter que té els costats paral·lels dos a dos. Sol identificar-se la base com el costat major. La distància entre els altres dos costats no paral·lels a la base es denomina altura del paral·lelogram.

- El rombe és un paral·lelogram que té les diagonals perpendiculars.
- El rectangle és el paral·lelogram que té tots els angles iguals, és a dir, de 90º.
- El quadrat és el paral·lelogram que té tots els angles i tots els costats iguals.

- El perímetre d'un quadrilàter es calcula sumant tots els seus costats. Per exemple, si *a* , *b*, *c* i *d*, són els costats d'un trapezi, i cridem P al seu perímetre, llavors



$$P = a + b + c + d$$

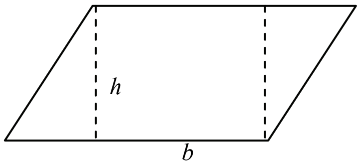
En el cas d'un paral·lelogram, com els costats són iguals dos a dos, el seu perímetre és P = 2*a* + 2*b* sent *a* i *b* la mesura de dos costats desiguals. Finalment, en el cas concret d'un quadrat, els costats del qual són tots iguals, i que podem denominar *l*, el seu perímetre és: $P = 4l$

- L'àrea d'un quadrilàter pot obtenir-se aplicant una fórmula diferent segons el tipus de quadrilàter:

  - L'àrea d'un quadrat

  Si l és el costat, l'àrea del quadrat és $A = l^2$.

  - L'àrea d'un rectangle



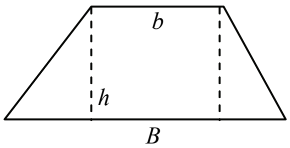
  Si b és la base del rectangle i h és la seva altura, l'àrea del rectangle és $A = b \cdot h$

  - L'àrea d'un rombe

  Si d i D són les diagonals del rombe, la seva àrea és $A = \frac{d \cdot D}{2}$

  - L'àrea de qualsevol altre paral·lelogram

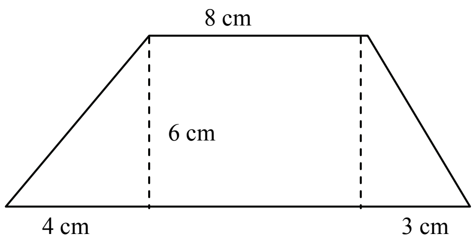
  Si b és la base del paral·lelogram, i h és la seva altura, l'àrea del paral·lelogram és $A = b \cdot h$.



Si b és la base menor d'un trapezi, B la base major, i h l'altura, aleshores la seva àrea és

$$A = \frac{(b+B) \cdot h}{2}$$

Per exemple, en el cas d'aquest trapezi:



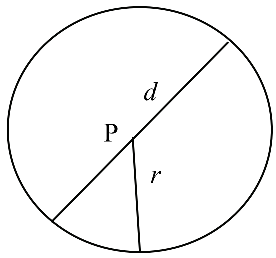
La seva àrea és igual a l'àrea del rectangle de 8 cm de base i 6 cm d'altura, més l'àrea dels dos triangles laterals. L'àrea del rectangle és $8 \cdot 6 = 48$ cm^2; l'àrea del triangle de l'esquerra és $4 \cdot 6/2 = 12$ cm^2; l'àrea del triangle de la dreta és $6 \cdot 3/2 = 9$ cm^2. Per tant, l'àrea total és $48 + 12 + 9 = 69$ cm^2. És el mateix resultat que s'obté amb la fórmula:

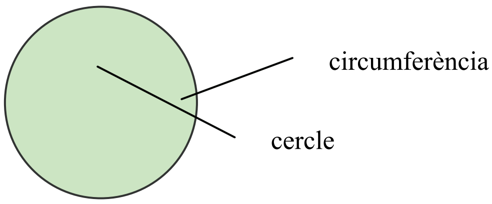
$$A = \frac{(b+B) \cdot h}{2} = \frac{(8+15) \cdot 6}{2} = 69 \text{ cm}^2$$

Què són la circumferència i el cercle i quins són els seus elements bàsics?

> Una circumferència és el conjunt de tots els punts situats a una mateixa distància d'un punt i un cercle és la superfície tancada per una circumferència. Els angles, els arcs i les cordes són els elements essencials de la circumferència. Els angles reben diferents denominacions segons el punt en el qual es tracen: angle central, angle inscrit, angle interior, etc. Un arc de circumferència és la part d'una circumferència que queda en l'interior d'un angle central. Una corda d'una circumferència és un segment que uneix dos punts qualssevol d'aquesta circumferència. El sector circular és una porció del cercle delimitada per dos radis.

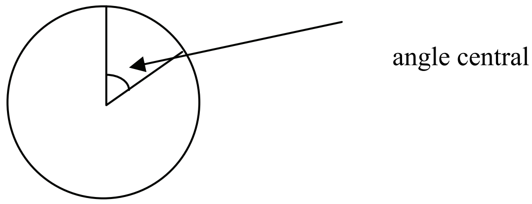
Una circumferència és el conjunt de tots els punts situats a una mateixa distància d'un punt donat. A aquest punt se l'anomena centre de la circumferència, i al segment que uneix el centre i qualsevol dels punts de la circumferència, radi, i, normalment, s'indica amb la lletra r. L'expressió completa seria: circumferència de centre P i radi r. Un diàmetre d'una circumferència és un segment que uneix dos punts de la circumferència passant pel seu centre, i sol denominar-se *d*. Així, $d = 2r$. El dibuix d'una circumferència es pot realitzar amb ajuda d'un compàs, obrint-lo fins a la mesura desitjada, fixant un dels seus extrems i realitzant un moviment circular amb l'altre braç del compàs. El radi de la circumferència és, precisament, l'amplitud del compàs.

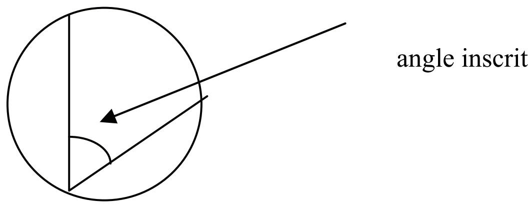




El cercle és la superfície tancada per la circumferència. Així, doncs, mentre la circumferència és una línia, el cercle és una superfície.

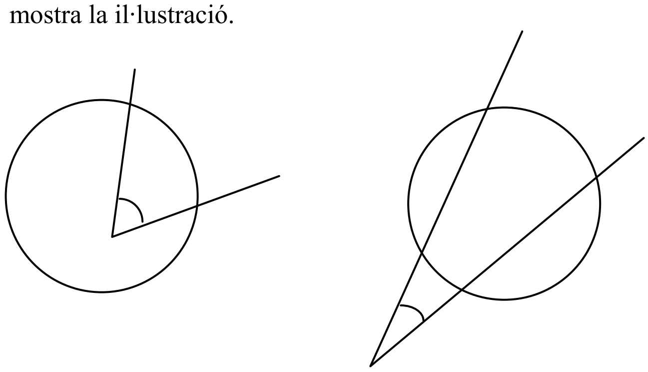
Els elements més destacables d'una circumferència són els angles, els arcs i les cordes. Dos radis d'una circumferència formen un angle, anomenat angle central. L'angle inscrit és el format per dos segments que uneixen un mateix punt amb d'altres dos punts de la circumferència, tal com mostra la il·lustració.





Es poden distingir dos tipus més d'angles respecte a la circumferència:

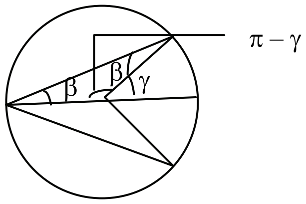
- L'angle interior, si té el vèrtex en l'interior del cercle.
- L'angle exterior, en cas que no tingui el vèrtex en l'interior del cercle. A més, els segments que forma l'angle han de tallar la circumferència, tal com mostra la il·lustració.

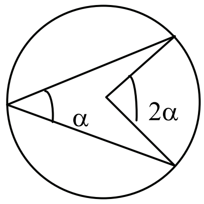


interior exterior

Les característiques més destacables dels angles són:

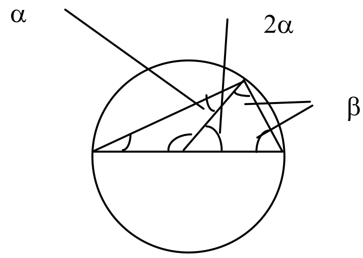
- Qualsevol angle inscrit és la meitat de l'angle central que talla la circumferència en els mateixos punts, cosa que es pot comprovar fàcilment observant aquest gràfic. Ja que $\beta + \beta + \pi - \gamma = \pi$, llavors $\gamma = 2\beta$.

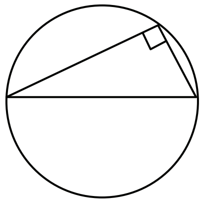




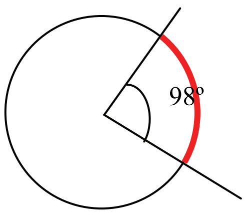
- L'angle inscrit els punts distints del qual del vèrtex formin part d'un diàmetre, és un angle recte. En efecte, l'angle en qüestió és $\alpha + \beta$. Ara bé, $2\alpha + \beta + \beta = \pi$; és a dir, $2\alpha + 2\beta = \pi$, o el que és el mateix, $\alpha + \beta = \pi/2$.

Observaràs que a cada exemple utilitzem graus o radians, segons convingui.



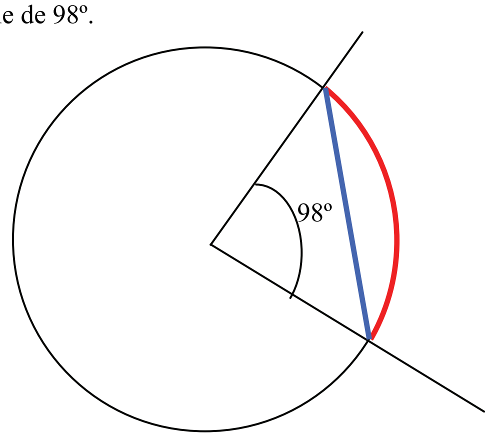


Un arc de circumferència és la part d'una circumferència que queda a l'interior d'un angle central. Per exemple, en la figura s'observa l'arc de circumferència (en vermell) de corresponent a un angle central de 98º.

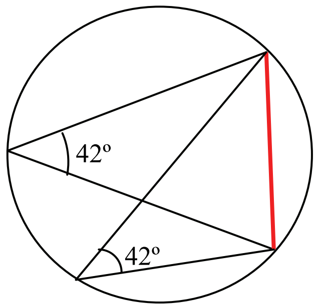


Si l'angle central és recte, l'arc corresponent es denomina quadrant. Si l'angle és pla, l'arc es denomina semicircumferència.

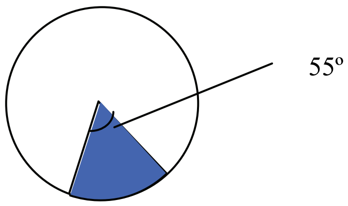
Una corda d'una circumferència és un segment que uneix dos punts qualssevol d'aquesta circumferència. Per exemple, un diàmetre és una corda. Una corda pot també definir-se a partir dels dos punts amb que un angle central talla a la circumferència. Per exemple, en la figura podem observar una corda (en blau) corresponent a l'angle de 98º.



Una propietat important d'arcs i cordes: tots els angles inscrits que comparteixen els extrems d'una mateixa corda o arc, mesuren exactament els mateix, tal com pot observar-se en la figura:



Un sector circular és una porció del cercle delimitada per dues radis. Així, per exemple, en la imatge s'ha acolorit un sector circular de 55º.



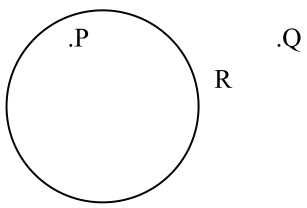
Si l'angle del sector circular és pla, el sector circular s'anomena semicercle.

Quin és la relació de la circumferència amb els altres elements del pla?

> Punts, rectes, circumferències i polígons poden adoptar diferents posicions respecte d'una circumferència donada.

Un punt pot ocupar tres posicions respecte d'una circumferència:

- Un punt és interior, si es troba en l'interior del cercle delimitat per la circumferència. En la imatge el punt P és interior.
- Un punt és exterior, si es troba fora de la regió delimitada per la circumferència. En la imatge el punt Q és exterior.
- Finalment, un punt pot pertànyer a la circumferència, com el punt R de la imatge.

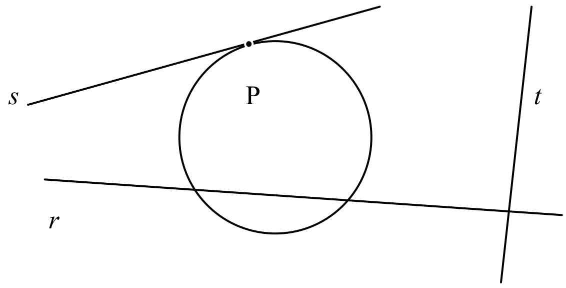


Una recta pot ocupar aquestes posicions pel que fa a una circumferència:

- La recta es denomina secant si talla la circumferència en dues punts, com la recta *r* de la imatge.

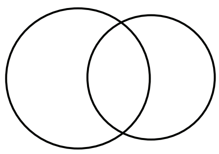
- La recta es denomina tangent si talla la circumferència en un únic punt, denominat punt de tangència. En la imatge, la recta *s* és tangent, i el punt P és el punt de tangència. També pot dir-se que la recta tangent es recolza sobre la circumferència.

Finalment, una recta pot ser que ni sigui secant ni tangent, com la recta *t* de la imatge.

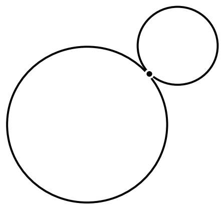


Dues circumferències es denominen:

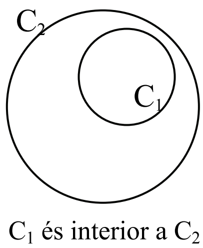
- Secants, si es tallen en dos punts.
- Tangents, si es tallen en un únic punt, el punt de tangència.
- Si una circumferència no comparteix cap punt en comú amb una altra, pot ser interior o exterior, segons la seva representació es trobi en el cercle o fora del cercle. Dues circumferències són concèntriques si comparteixen el mateix centre.



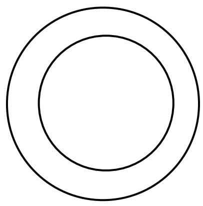
Circumferències secants



Circumferències tangents

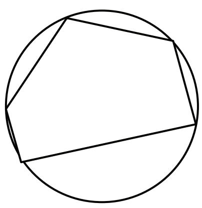


C_1 és interior a C_2

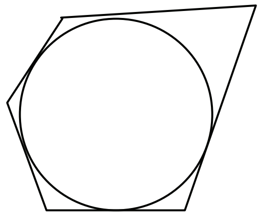


Circumferències concèntriques

Es diu que un polígon està inscrit en una circumferència, si tots els seus vèrtex són punts de la circumferència. En canvi, un polígon està circumscrit a una circumferència, si tots els seus costats li són tangents.



pentàgon inscrit



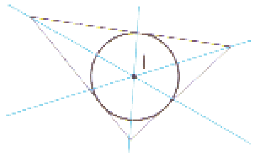
pentàgon circumscrit

Si un polígon està inscrit en una circumferència, també pot dir-se que la circumferència està circumscrita al polígon. En la figura de l'esquerra, la circumferència està circumscrita al pentàgon. De la mateixa manera, si un polígon està circumscrit a una circumferència, també es pot dir que la circumferència està inscrita en el polígon. En l'exemple de la dreta, la circumferència està inscrita en el pentàgon.

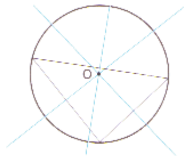
En el cas dels polígons regulars, el centre de la circumferència inscrita, de la circumscrita i del polígon regular sempre coincideixen.

Els triangles compleixen dos importants propietats:

- La circumferència inscrita a un triangle té el seu centre en l'incentre del triangle (d'aquí el seu nom).
- La circumferència circumscrita a un triangle té el seu centre en el circumcentre (d'aquí el seu nom).



circumferència inscrita



circumferència circumscrita

Com es calcula el perímetre de la circumferència i l'àrea del cercle?

> El perímetre de la circumferència és igual a $2\pi r$, sent r el radi de la circumferència. Per a calcular la longitud d'un arc de circumferència solament és necessari calcular $r\alpha$, sent α l'angle en radians de l'arc en qüestió. L'àrea d'un cercle és igual a πr^2, mentre que l'àrea d'un sector circular és $\alpha r^2/2$, sent α l'angle en radiants del sector.

La longitud de la circumferència, L, es calcula a partir del radi, r, seguint aquesta fórmula:

$$L = 2\pi r$$

sent π el nombre irracional pi, que és aproximadament igual a 3,1416. Per exemple, la longitud d'una circumferència de radi 1 cm és:

$$L = 2\pi \text{ cm} \cong 6{,}2832 \text{ cm}$$

Es pot observar que al dividir la longitud de la circumferència pel valor del seu diàmetre ($2r$), el resultat ha de ser sempre el nombre π.

La longitud d'un arc de circumferència, L_A, és proporcional a l'angle corresponent. Per a calcular-la tan només és necessari multiplicar la longitud de la circumferència pel quocient $\alpha/360$, on α representa aquest angle en graus sexagesimals. Si l'angle està expressat en radians, la longitud de la circumferència ha de multiplicar-se per $\alpha/\pi2$.

Per exemple, la longitud d'un arc de circumferència (de radi 1 cm) d'angle 99º és:

$$L_A = 99/360 \cdot 2\pi \cong 1{,}7279 \text{ cm}$$

De la mateixa manera, la longitud d'un arc de circumferència (de radi 1 cm) d'angle 1 rad és:

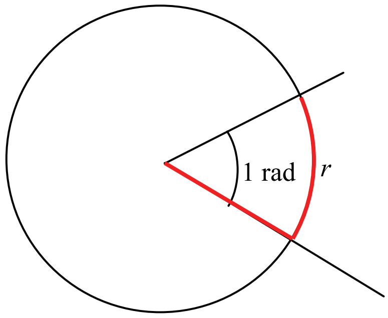
$$L_A = 1/2\pi \cdot 2\pi = 1 \text{ cm}$$

Un radian és aquell angle l'arc del qual és igual al radi de la circumferència.

Aquest últim resultat pot servir-nos per a definir de manera més precisa què és un radian: és aquell angle l'arc del qual és igual al radi de la circumferència, ja que la longitud d'un arc de 1 radian, corresponent a una circumferència de radi r és igual

$$L_A = 1/2\pi \cdot 2\pi r = r$$

és a dir, precisament el valor del radi, tal com pot observar-se a la imatge. El valor en graus sexagesimals d'un radian és de, aproximadament, 57,3º; és a dir, l'arc de circumferència corresponent a aquest arc és sempre igual al radi (és a dir, les dues línies acolorides de la imatge amiden el mateix).



L'àrea d'un cercle de radi *r* és igual a

$$A = \pi r^2$$

Per exemple, l'àrea d'un cercle de 2 cm de radi és igual a:

$$A\pi = \cdot 2^2 = 4\pi \cong 12{,}57 \text{ cm}^2$$

L'àrea d'un sector circular també és proporcional a l'angle, i es calcula multiplicant l'àrea total pel quocient $\alpha/360$, on α representa aquest angle en graus sexagesimals. Si l'angle està expressat en radians, l'àrea total ha de multiplicar-se per $\alpha/\pi 2$.

Per exemple, l'àrea d'un sector circular de 30º, d'una circumferència de radi 2 cm és igual a:

$$A_S = 30/360 \cdot \pi \cdot 2^2 \cong 1{,}047 \text{ cm}^2$$

en canvi, l'àrea d'un sector circular de 2 radians de la mateixa circumferència és igual a:

$$A_S = 2/2\pi \cdot \pi \cdot 2^2 = 4 \text{ cm}^2$$