Les equacions dels elements geomètrics

Les equacions dels elements geomètrics

La suma d'un punt més un vector

Si P és un punt i $\vec{v}$ és un vector, la suma del punt P més el vector $\vec{v}$ és un altre punt, Q, de manera que $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$. La suma s'expressa així:

$$Q = P + \vec{v}$$

Propietats:

1. Si P és un punt i $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són dos vectors, llavors:
   $P + \left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \left(P + \vec{u}\right) + \vec{v}$
2. Si P és un punt, llavors:
   $P + \vec{0} = P$
3. Si P i Q són punts, hi ha un únic vector que compleix:
   $Q = P + \vec{v}$ i aquest vector és, precisament, $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$

Equacions d'una recta

Una recta del pla es pot expressar de diferents maneres. Si es denomina r la recta del pla, $P = (p_1, p_2)$ un punt concret d'aquesta recta i $\vec{v} = (v_1, v_2)$ un vector director de la recta,

- L'expressió dels punts (x,y) de la recta r en forma paramètrica és la següent:
  $(x, y) = P + \alpha\vec{v} = (p_1, p_2) + \alpha(v_1, v_2)$

essent α paràmetre de l'equació. Qualsevol altre punt es pot obtenir substituint el paràmetre α per un nombre concret.

- L'expressió dels punts (x,y) de la recta r en forma cartesiana és la següent:
  $x = p_1 + \alpha v_1$
  $y = p_2 + \alpha v_2$

essent α el mateix paràmetre de l'equació anterior. Qualsevol altre punt es pot obtenir substituint el paràmetre α per un nombre concret, tenint en compte que les dues coordenades s'han de trobar utilitzant el mateix paràmetre.

- L'expressió dels punts (x,y) de la recta r en forma explícita és la següent:
  $\dfrac{x - p_1}{v_1} = \dfrac{y - p_2}{v_2}$

Per a trobar altre punt de la recta, s'ha de donar un valor a la x o a la y, i resoldre l'equació lineal resultant.

- L'expressió dels punts (x,y) de la recta r en forma implícita és la següent:

  $Ax + By + C = 0$ on $A = v_2$, $B = -v_1$ i $C = -p_1v_2 + p_2v_1$

en aquest cas, no es pot conèixer de manera immediata un punt de la recta; per a fer-ho, s'ha de substituir una de les coordenades per un valor, i a continuació resoldre l'equació resultant. On el vector director de la recta és (–B, A).

Relacions entre un punt i una recta

Donat un punt P = (p_1, p_2) i una recta r: A x + By + C = 0 , es poden produir dues situacions:

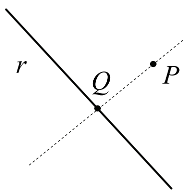
- El punt P pertany a la recta r: en aquest cas, les coordenades del punt compleixen l'equació de la recta, és a dir:

$$\mathrm{A}p_1 + \mathrm{B}p_2 + \mathrm{C} = 0$$

- El punt P no pertany a la recta r.

Hi ha un fórmula que permet calcular de manera senzilla la distància d'un punt P = (p_1, p_2) a una recta r: A x + By + C = 0

$$\mathrm{d}(P,r) = \frac{|\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}$$



Aquesta fórmula resulta de calcular la distància entre P i Q, essent Q la intersecció de la recta r amb una recta perpendicular a la recta r que passi pel punt P.

Relacions entre dues rectes del pla

Dues rectes en el pla es poden intersecar en un punt, coincidir, o bé, ser paral·leles. A partir de l'equació implícita de cada recta, es pot esbrinar a quina d'aquestes situacions correspon:

- Dues rectes s'intersequen en un punt si el sistema d'equacions format per les equacions de les rectes té una única solució, és a dir, si el sistema és compatible determinat. La solució d'aquest sistema correspon a les coordenades del punt d'intersecció.

En aquest cas, a més, és possible trobar els angles entre ambdues rectes, obtenint un vector director de cada recta, i calculant l'angle entre ambdós vectors. Així, doncs, si les rectes són:

r: Ax + By + C = 0
s: A'x + B'y + C' = 0

Els vectors directors d'ambdues rectes són: $\vec{u}$ = (–B,A) i $\vec{v}$ = (–B',A'); per tant, el cosinus d'un dels angles que formen aquestes rectes és igual a:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

Si els angles són tots de 90º, es diu que les rectes són perpendiculars.

- Dues rectes coincideixen si el sistema d'equacions format per les equacions de les rectes té infinites solucions, és a dir, si el sistema és compatible indeterminat. En aquest cas, ambdues equacions són equivalents.

- Dues rectes són paral·leles si el sistema d'equacions format per les equacions de les rectes no té solucions, és a dir, si el sistema és incompatible.

En aquest cas, es pot trobar de manera senzilla la distància entre aquestes dues rectes, si es considera que qualsevol punt de la primera recta està a la mateixa distància de l'altra recta. Per això, n'hi ha prou de calcular la distància d'un punt de la primera recta a un punt de la segona recta.

El postulat de les paral·leles d'Euclides

Euclides d'Alexandria (segle IV aC) és un dels matemàtics grecs més importants i la seva obra *Els elements* és una de les obres més editades de la història. Està dividida en tretze llibres o capítols, dels quals els sis primers són sobre geometria plana elemental i els tres últims, sobre geometria en l'espai (per això, la geometria clàssica, que s'estudia en aquest curs, també s'anomena *geometria euclidiana*). Per tant, es tracta d'una obra gairebé enterament dedicada a la geometria, que per als antics era la pedra angular de les matemàtiques. L'obra s'inicia amb una sèrie de definicions generals (d'un punt, d'una recta, etc.); a continuació hi ha una llista de cinc postulats i, finalment, cinc nocions comunes. Els postulats són concebuts per Euclides com a enunciats convincents per ells mateixos, veritats indiscutibles però que no es poden demostrar. Entre els cinc postulats, els quatre primers mai no han aixecat cap controvèrsia; en canvi, el cinquè ha estat sempre font d'acalorades discussions. Es tracta del denominat *postulat de les paral·leles*, que diu així: "si una línia recta talla dues línies rectes més formant amb elles angles interiors del mateix costat menors que dos angles rectes, les dues línies rectes, perllongades indefinidament, es tallen del costat pel qual els angles són menors que dos angles rectes". Una altra manera d'expressar-ho: "per un punt aliè a una recta, només es pot traçar una paral·lela".

El problema d'aquest postulat radica en el fet que molts, al llarg de la història, han considerat que és possible demostrar-lo i, per tant, no s'hauria de considerar un postulat. Són molt nombrosos els intents que des del segle III aC fins al segle XIX s'han fet per a provar el cinquè postulat d'Euclides. Aquests estudis els van fer persones de diferents cultures. El rabí Gersónides, amb els denominats quadrilàters equilàters i equiangles, el musulmà Omar Khayyam o el jesuïta Girolamo Saccheri. Totes les demostracions contenien alguna errada que normalment consistia en una afirmació que és correcta en geometria euclidiana i que en cert sentit sembla que sigui evident, que no cal demostrar. Totes aquestes afirmacions, i moltes altres, de la geometria absoluta són equivalents al cinquè postulat. És a dir, que es pot substituir el cinquè postulat per una qualsevol d'elles. En aquest cas, l'afirmació triada adquireix el caràcter de postulat i, per tant, tota la feina s'ha fet endebades.

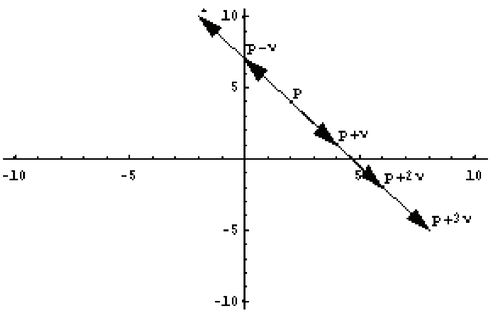
Cal parar una atenció especial als resultats obtinguts per Girolamo Saccheri (1667–1733), que indubtablement són els primers d'importància en la geometria no euclidiana, que no es va desenvolupar pràcticament fins al segle XIX. El mètode de treball de Saccheri, negant el cinquè postulat, espera trobar una contradicció, i va obrir la porta al descobriment de la geometria no euclidiana. Realment Saccheri havia descobert la geometria no euclidiana però la seva fe cega que la veritat del cinquè postulat el va dur a recórrer a fal·làcies més o menys elaborades. Avui sabem que negar el cinquè postulat no duu a cap contradicció, sinó només obre la porta a altres geometries, que són de vital importància en grans teories científiques del segle XX, com la teoria de la relativitat.

Com se suma un vector a un punt del pla?

> La suma entre punts i vectors és una operació imprescindible per a la definició de les equacions dels elements geomètrics. El resultat de la suma d'un punt més un vector és altre punt, que es troba aplicant l'origen del vector sobre el punt; d'aquesta manera, el punt de l'extrem del vector correspondrà al resultat d'aquesta suma. Per a fer aquesta suma, s'han de sumar les coordenades del punt amb les components corresponents del vector.

Es pot sumar a qualsevol punt del pla qualsevol vector del pla. S'ha de tenir en compte que aquesta operació no és la mateixa que la suma de vectors, encara que com es veurà, formalment, hi té força semblances. La idea és molt senzilla: es tracta d'aplicar l'origen del vector sobre el punt, i el punt de l'extrem del vector correspondrà al resultat d'aquesta suma. Així, doncs, es pot dir que si P és un punt, i $\vec{v}$ és un vector, la suma del punt P més el vector $\vec{v}$ és un altre punt, Q, de manera que $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$. Aquesta suma s'expressa així:

$$Q = P + \vec{v}$$



El gràfic mostra un punt P = (2, 4) i un vector $\vec{v}$ = (2–, 3), i diversos punts que es troben a partir d'aquests dos elements. Per exemple:

$$P + \vec{v} = (2,4) + (2,-3) = (4,1)$$

$$P + 2\vec{v} = (2,4) + 2(2,-3) = (6,-1)$$

$$P - 2\vec{v} = (2,4) - 2(2,-3) = (-2,10)$$

$$P - \vec{v} = (2,4) - (2,-3) = (0,7)$$

Aquesta operació compleix aquestes propietats:

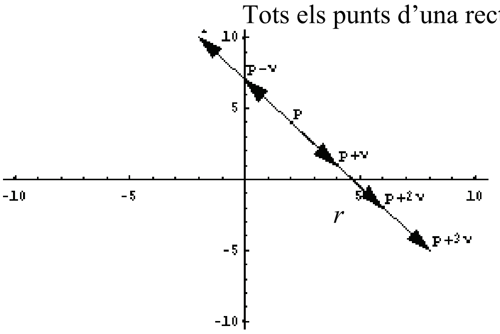
1. Si P és un punt i $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són dos vectors, llavors:
   $$P + \left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \left(P + \vec{u}\right) + \vec{v}$$
2. Si P és un punt, llavors:
   $$P + \vec{0} = P$$
   És a dir, si qualsevol punt P sumat amb el vector $\vec{0}$ no es modifica el punt *P*.
3. Si P i Q són punts, hi ha un únic vector que compleix:
   $$Q = P + \vec{v}$$
   evidentment, aquest vector és, precisament, $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$.

Finalment, s'ha d'insistir que, encara que en la seva expressió un punt i un vector s'assemblin molt, no són el mateix objecte ni es poden manipular de la mateixa manera. Aquest advertiment pot ser d'ajuda per a evitar, per exemple, la suma de punts, cosa que és impossible de fer.

Què són l'equació paramètrica i l'equació cartesiana d'una recta, i com es poden trobar?

> Tots els punts d'una recta es poden trobar sumant a un punt determinat de la recta un vector amb la mateixa direcció de la recta. L'equació que resulta d'aquest fet es denomina *equació paramètrica de la recta*. Si es descompon aquesta equació vectorial en els elements que la componen, s'obté l'equació cartesiana de la recta, que de fet es correspon a dues equacions que ens indiquen com es troba la x i la y de la recta.

Tots els punts d'una recta es poden trobar sumant a un punt determinat de la recta, un vector amb la mateixa direcció de la recta. En el gràfic es pot observar que tots els punts de la recta es poden trobar sumant al punt P, que es troba sobre la recta, un vector que sigui múltiple de $\vec{v}$. És a dir, qualsevol punt de la recta, (x, y), es pot trobar de la manera següent:



$$(x, y) = P + \alpha \vec{v}$$

o sigui,

$$(x, y) = P + \alpha \vec{v} = (p_1, p_2) + \alpha(v_1, v_2)$$

essent α un nombre.

Aquesta igualtat es denomina *equació paramètrica de la recta*, ja que els punts de la recta depenen del paràmetre α. En l'exemple, si el punt P = (2, 4) i el vector $\vec{v}$ = (2–, 3):

quan $\alpha = 1$ $\quad (x, y) = P + \overrightarrow{1 \cdot v} = (2,4) + (2,-3) = (4,1)$

quan $\alpha = 2$ $\quad (x, y) = P + 2\vec{v} = (2,4) + 2(2,-3) = (6,-1)$

quan $\alpha = -2$ $\quad (x, y) = P - 2\vec{v} = (2,4) - 2(2,-3) = (-2,10)$

Si s'igualen les coordenades de cada element en la fórmula original:

$$x = p_1 + \alpha v_1$$
$$y = p_2 + \alpha v_2$$

Aquest grup de dues expressions, amb les coordenades dels punts de la recta s'anomena *equació cartesiana de la recta*.

En l'exemple, com que P = (2,4) i $\vec{v}$ = (2–, 3), l'equació paramètrica de la recta és:

(x, y) = P + $\alpha \vec{v}$ = (2, 4) + α(2–, 3)

és a dir, tots els punts (x, y) que compleixen l'equació cartesiana (que s'obté descomponent l'expressió anterior):

$x = 2 + 2\alpha.$

$y = 4 - 3\alpha.$

pertanyen a la recta r.

És evident que el punt P podria ser qualsevol punt de la recta, i el vector $\vec{v}$ podria ser qualsevol vector que tingués la mateixa direcció. Qualsevol d'aquests vectors s'anomena *vector director de la recta*, perquè és el que dóna la direcció de la recta. Per exemple, en la recta de l'exemple, un vector director és (2–, 3), però podria ser qualsevol dels seus múltiples, per exemple: (4, –6) o (–2,3).

Què són l'equació explícita i l'equació implícita d'una recta, i com es poden trobar?

> Si es descompon l'equació cartesiana de la recta s'obté l'equació explícita de la recta, aïllant el paràmetre de la primera i igualant els membres. A partir de l'equació explícita de la recta se'n pot obtenir l'equació implícita, agrupant tots els termes de l'equació explícita i eliminant-ne els denominadors. Aquest últim tipus és la forma més usual d'expressar una recta.

Si r és una recta, l'equació cartesiana de la qual és:

$$x = p_1 + \alpha \cdot v_1$$
$$y = p_2 + \alpha \cdot v_2$$

es pot fer la transformació següent: s'aïlla l'α de les dues igualtats:

$$\alpha = (x - p_1)/v_{1.}$$
$$\alpha = (y - p_2)/v_{2.}$$

Per tant, els dos membres de la dreta de cadascuna de les igualtats són iguals:

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}$$

Aquesta expressió s'anomena *equació explícita de la recta*. També es pot modificar aquesta expressió, de manera que no quedin denominadors i que no quedi cap terme a la dreta de la igualtat, de la manera següent:

$$(x - p_1)v_2 = (y - p_2)v_{1.}$$
$$v_2x - p_1v_2 = v_1y - p_2v_{1.}$$
$$v_2x - v_1y - p_1v_2 + p_2v_1 = 0$$

En definitiva, i per a simplificar, queda una equació del tipus:

$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$ on $\mathrm{A} = v_2$, $\mathrm{B} = -v_1$ i $\mathrm{C} = -p_1v_2 + p_2v_1$

Aquesta forma d'expressar els punts de la recta es denomina *equació implícita de la recta*. En aquest cas, un vector director és (–B, A).

En el cas de l'exemple anterior, la recta tenia aquesta equació cartesiana:

$$x = 2 + 2.\ \alpha.$$
$$y = 4 - 3.\ \alpha.$$

per a convertir-la en equació explícita, cal aïllar α

$$\alpha = (x - 2)/2$$
$$\alpha = (y - 4)/{-3}$$

i, per tant,

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y - 4}{-3}$$

és l'equació explícita d'aquesta recta.

Si es desenvolupa aquesta expressió:

$$-3(x - 3) = 2(y - 4)$$
$$-3x + 9 - 2y + 8 = 0$$
$$-3x - 2y + 17 = 0.$$

s'obté aquesta última expressió, que és l'equació implícita de la recta. Per a evitar començar per un signe negatiu, l'equació implícita de la recta queda de la manera següent:

$$3x + 2y - 17 = 0$$

A més, podem assegurar que un vector director d'aquesta recta podria ser (–2, 3), és a dir, un vector els components del qual siguin

component x: coeficient y de l'equació canviat de signe.

component y: coeficient x de l'equació canviat de signe.

L'equació implícita és la manera més usual d'expressar una recta. Així, doncs, normalment s'expressarà una recta r com a r: Ax + By + C = 0.

Quina informació es pot obtenir de les equacions d'una recta?

> Cadascun dels tipus d'equacions amb els quals es pot expressar una recta ofereix informació essencial sobre la recta: d'una banda, es pot trobar un punt (o els que es vulguin) que pertanyi a aquesta recta (o fins i tot, comprovar si un determinat punt pertany a aquesta recta); d'altra banda, es pot trobar un vector director de la recta.

Cada equació té unes característiques que permeten conèixer certa informació sobre la recta:

- L'equació paramètrica d'una recta presenta de manera evident un punt de la recta i un vector director:

  $$(x, y) = (p_1, p_2) + \alpha(v_1, v_2)$$

  El punt és (p_1, p_2) i el vector director (v_1, v_2). Qualsevol altre punt es pot obtenir substituint el paràmetre α per un nombre concret.
  Per exemple, si l'equació paramètrica d'una recta és:

  $$(x, y) = (3–, 3) + \alpha(1–, 4)$$

  Es pot assegurar que (3–, 3) és un punt de la recta, mentre que (1, –4) és un vector director d'aquesta recta. Per a trobar un altre punt de la recta, s'ha de substituir el paràmetre α per un nombre. Per exemple, si $\alpha = 3$

  $$(x, y) = (3,-3) + 3(1,-4) = (6,-15)$$

  Així, doncs, (6, –15) és un altre punt d'aquesta recta.

- L'equació cartesiana d'una recta també permet trobar de manera senzilla un punt de la recta i un vector director. L'equació cartesiana de la recta és:

  $$x = p_1 + \alpha{\cdot}v_1$$
  $$y = p_2 + \alpha{\cdot}v_2$$

  un punt de la recta és (p_1, p_2) i un vector (v_1, v_2). Qualsevol altre punt es pot obtenir substituint el paràmetre α per un nombre concret, tenint en compte que les dues coordenades s'han de trobar utilitzant i mateix paràmetre. Per exemple, si l'equació cartesiana és:

  $$x = 3 - 4\alpha$$
  $$\text{i} = 5 + 2\alpha$$

  Un punt de la recta pot ser (3,5), ja que són els termes sense a de l'expressió anterior. Un vector director és (–4,2), perquè són els coeficients d'ambdues expressions. Per a trobar un altre punt d'aquesta recta, s'ha de substituir α per un nombre; per exemple, si $\alpha = -2$, el punt obtingut té coordenades:

  $$x = 3 - 4{\cdot}(-2) = 11$$
  $$y = 5 + 2{\cdot}(-2) = 1$$

  Per tant, aquest punt de la recta és (11,1).

- L’expressió explícita d’una recta té per expressió:

$$\frac{x-p_1}{v_1}=\frac{y-p_2}{v_2}$$

de manera immediata es pot trobar un punt, (p_1, p_2) i un vector director, (v_1, v_2). Per a trobar un altre punt de la recta, s’ha de donar un valor a la *x* o a la *y*, i resoldre l’equació lineal que en resulta. Per exemple, l’equació:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-4}$$

correspon amb una recta del pla; un dels seus punts és (2, –1) (observa que s’ha de canviar de signe el nombre que acompanya cadascuna de les variables). Un vector director d’aquesta recta és (3, –4). Per a trobar un altre punt d’aquesta recta se substitueix, per exemple, la *y* per 3, i es resol l’equació resultant:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{3+1}{-4}$$

$-4(x-2) = 3\cdot 4$

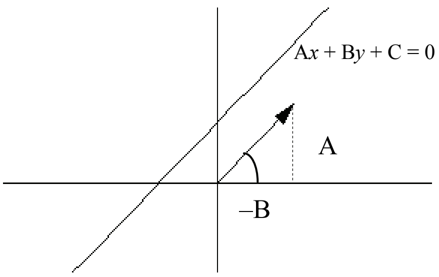
$-4x + 8 = 12$

$-4x = 4$

$x = -1$

Per tant, si $y = 3$, llavors $x = -1$. Així, doncs, un altre punt de la recta és (–1,3).

- L’expressió d’una recta en forma implícita és del tipus:



$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$$

En aquest cas, no es pot conèixer de manera immediata un punt de la recta; per a fer-ho s’ha de substituir una de les coordenades per un valor, i a continuació resoldre l’equació resultant. En canvi, és conegut que un vector director d’aquesta recta és (–B,A). Per exemple, si una recta té equació

$$x - 2y + 6 = 0$$

Per a trobar un punt d’aquesta recta, es pot substituir, posem per cas, la *y* per 1. D’aquesta manera, s’obté l’equació següent:

$$x - 2\cdot 1 + 6 = 0$$

Resolent-la, resulta que $x = -4$. Així, doncs, el punt (–4,1) pertany a la recta l’equació de la qual és $x - 2y + 6 = 0$.

- Un vector director d’aquesta recta pot ser (2,1), ja que –2 és el coeficient de la *y* en l’equació, i 1 és el coeficient de la *x* en l’equació.
  També és possible comprovar si un punt determinat pertany o no a la recta en qüestió. Per exemple, es pot investigar si el punt (–2,6) pertany a la recta d’equació $x - 2y + 6 = 0$. Per a fer-ho n’hi ha prou de comprovar si les coordenades del punt són solució d’aquesta equació. Vegem-ho:

$$-2 - 2\cdot 6 + 6 = -8 \neq 0$$

per tant, el punt (–2,6) no pertany a aquesta recta.

Quines són les possibles relacions entre un punt i una recta?

> Donats un punt P i una recta *r*, o bé, el punt P pertany a la recta *r*, en aquest cas, les coordenades del punt compleixen l’equació de la recta, o bé el punt P no pertany a aquesta recta; en aquest cas, hi ha una fórmula que permet calcular la distància del punt P en la recta *r*.

Donat un punt $P = (p_1, p_2)$ i una recta r: $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$, es poden donar dues situacions:

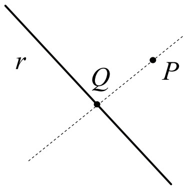
- El punt P pertany a la recta *r*: en aquest cas, les coordenades del punt compleixen l’equació de la recta, és a dir:

$Ap_1 + Bp_2 + C = 0$

Per exemple, el punt P = (–4,1) pertany a la recta r: $x - 2y + 6 = 0$, ja que: $-4 - 2\cdot1 + 6 = 0$.

- El punt P no pertany a la recta r. En aquest cas, podem assegurar que:

  $Ap_1 + Bp_2 + C \neq 0$

  És possible definir la distància d'aquest punt i la recta. En primer lloc, heu d'observar que si un punt, P, no pertany a una recta r, la distància més curta entre r i P s'obté seguint la recta perpendicular a r, que passa per P (recta puntejada). D'aquesta manera, es troba Q, que és el punt d'intersecció entre r i la perpendicular que passa per P. La distància del punt P a la recta r és, precisament, la distància entre P i Q. Per exemple, si r: $x - y + 2 = 0$, i P = (3,1), es pot veure que aquest punt no pertany a la recta, ja que $3 - 1 + 2 \neq 0$. A quina distància de la recta es troba aquest punt? Per a saber-ho, s'ha de construir la recta perpendicular a la recta r, que contingui el punt P. Com que la recta r té vector director (1,1), una recta perpendicular pot tenir vector director (–1,1). Així, l'equació paramètrica de la recta perpendicular a r que passa per P és:

  s: $(x,y) = (3,1) + \alpha(-1,1)$

  En forma implícita, aquesta equació es converteix en s: $x + y - 4 = 0$.

  La intersecció d'aquesta recta amb la recta r (que es pot trobar buscant la solució del sistema d'equacions format per les dues equacions implícites de les rectes) coincideix amb el punt (1,3). Així, doncs, la distància del punt P a la recta r és:

  $$d(P,r) = d(P,Q) = \sqrt{(1-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8}$$

  Hi ha un fórmula que permet abreujar el càlcul de la distància d'un punt $P = (p_1, p_2)$ a una recta r: $Ax + By + C = 0$

  $$d(P,r) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

  Es pot comprovar amb la recta i el punt de l'exemple:

  $$d(P,r) = \frac{|3-1+2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \sqrt{8}$$

Com s'esbrina la relació entre dues rectes del pla per mitjà de les seves equacions?

> Dues rectes del pla es poden intersecar en un punt si el sistema d'equacions format per les equacions de les rectes té una única solució, és a dir, si el sistema és compatible determinat; les dues rectes coincideixen si el sistema d'equacions format per les equacions de les rectes té infinites solucions, és a dir, si el sistema és compatible indeterminat; finalment, dues rectes són paral·leles si el sistema d'equacions format per les equacions de les rectes no té solucions, és a dir, si el sistema és incompatible. En aquest cas, es pot calcular la distància entre les rectes.

Dues rectes del pla poden intersecar-se en un punt, o bé ser paral·leles; també es pot donar el cas que ambdues rectes siguin la mateixa. L'estudi del sistema d'equacions format per les equacions d'ambdues rectes determinarà en quina situació, d'entre aquestes tres, es troben les dues rectes:

- Dues rectes s'intersequen en un punt si el sistema d'equacions format per les equacions de les rectes té una única solució, és a dir, si el sistema és compatible determinat. En aquest cas, la solució del sistema és el punt d'intersecció. Per exemple, les rectes r: $x + y - 3 = 0$, i s: $2x - y - 3 = 0$ s'intersequen en un punt perquè el sistema d'equacions:

  $$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

té com a única solució $x = 2$ i $y = 1$.

En aquest cas, és possible, a més, conèixer els angles entre ambdues rectes. En primer lloc es troba un vector director de cada recta:

vector director de r : (–1,1)

vector director de s : (1,2)

Es calcula a continuació l'angle entre ambdós vectors, tenint en compte que l'angle α entre els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ té per cosinus:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

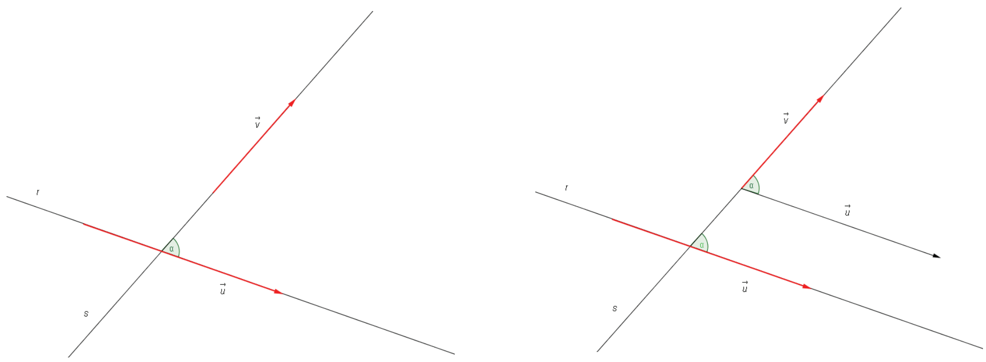
i, per tant:

$$\cos\alpha = \frac{(-1,1)\cdot(1,2)}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{-1+2}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \simeq 0{,}3162$$

Per tant, aquest angle α és, aproximadament, de 71,6º. Els altres angles entre les rectes són de 180 – 71,6 = 108,4º, aproximadament.

Si els quatre angles formats entre ambdues rectes són angles rectes, és a dir, de 90º, es diu que les rectes són perpendiculars.

Si r i s són dues rectes i $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són els seus vectors directors, α és l'angle entre les rectes r i s , és a dir, l'angle entre les rectes és l'angle que formen els vectors.



- Dues rectes coincideixen si el sistema d'equacions format per les equacions de les rectes té infinites solucions, és a dir, si el sistema és compatible indeterminat. En aquest cas, ambdues equacions són equivalents. Per exemple:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 4x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

Es tracta d'un sistema compatible indeterminat; per tant, té infinites solucions. Es pot observar que l'equació $4x + 2y – 6 = 0$ és equivalent a $2x + y – 3 = 0$.

- Dues rectes són paral·leles si el sistema d'equacions format per les equacions de les rectes no té solucions, és a dir, si el sistema és incompatible. Per exemple,

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ 4x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

Es tracta d'un sistema incompatible perquè el rang de la matriu del sistema i el de la matriu ampliada són diferents. En aquest cas, es pot observar que els vectors directors tenen la mateixa direcció, perquè un és múltiple de l'altre:

(–2,4) = 2·(–1,2).

Es pot trobar de manera senzilla la distància entre aquestes dues rectes, si es considera que qualsevol punt de la primera recta està a la mateixa distància de l'altra recta. Per això, n'hi ha prou de calcular la distància d'un punt de la primera recta a un punt de la segona recta. En l'exemple, un punt de la primera recta, r: $2x + y – 5 = 0$, podria ser (0,5). La distància d'aquest punt a la recta s: $4x + 2y – 6 = 0$ és:

$$d(P,r) = \frac{|2\cdot5-6|}{\sqrt{4^2+2^2}} = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{20}}{5}$$