Matrius i determinants

Matrius i determinants

Matrius

Una matriu és un grup de nombres organitzats en files i columnes, limitats per parèntesis:

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \overset{1}{\downarrow} & \overset{2}{\downarrow} & \overset{3}{\downarrow} & & \overset{n}{\downarrow} \end{array} & \\ \text{columnes} & \text{Files} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow 1 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 3 \\ \\ \leftarrow m \end{array} \end{array} \qquad \text{dimensió } m \times n$$

Un element d'una matriu s'expressa de forma general:

a_{ij} *i* indica la fila, *j* indica la columna

Matrius importants

- La matriu quadrada: matriu de dimensió $n \times n$.
- La matriu diagonal: els seus elements són 0, excepte els de la diagonal.
- La matriu identitat I_n: matriu diagonal en la qual tots els elements de la diagonal són 1.
- La matriu transposada d'una matriu A, A^T , és la matriu que resulta de canviar filles per columnes de la matriu A.

Operacions amb matrius:

- Suma i resta

si $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ són matrius de dimensió $m \times n$:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$
$$A - B = (a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$$

- Multiplicació per escalar

si *r* és un nombre real, i $A = (a_{ij})$ és una matriu, el producte de la matriu per l'escalar és:

$$r \cdot A = r \cdot (a_{ij}) = (r \cdot a_{ij})$$

- Multiplicació

Si $A = (a_{ij})$ és una matriu $m \times n$ i $B = (b_{ij})$ és una matriu $n \times r$, la matriu producte de A per B, $P = (p_{ij}) = A \times B$, és una matriu $m \times r$, i els seus elements es calculen de la manera següent:

$$p_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} \ldots a_{in} b_{nj}$$

Si el producte de dues matrius quadrades de dimensió $n \times n$, A i B, és igual a I_n

$$A \times B = B \times A = I_n$$

llavors es diu que B és la matriu inversa de A, i es denota per $B = A^{-1}$

Per exemple, la matriu inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Determinants

El determinant d'una matriu quadrada és un nombre que, entre d'altres aplicacions, és molt útil per a saber si una matriu té inversa i per a calcular-la. Per a indicar que s'està calculant el determinant d'una matriu, els elements d'aquesta s'han de posar entre dos segments verticals.

- Càlcul del determinant

Matriu 1×1: igual al nombre que compon la matriu.
Matriu 2×2: igual al producte dels elements de la diagonal menys el producte dels altres dos elements.
Matriu 3×3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Matriu 4×4: càlcul de forma recursiva, a partir de matrius 3×3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\alpha_{11} - a_{21}\alpha_{21} + a_{31}\alpha_{31} - a_{41}\alpha_{41}$$

essent α_{ij} el menor complementari de a_{ij}, és a dir, el determinant que resulta d'eliminar la fila i i la columna j del determinant.

Càlcul de la inversa d'una matriu

Una matriu quadrada $n \times n$ es pot invertir sempre que la seva determinant no sigui 0.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(A')^T$$

essent A' la matriu d'adjunts dels elements de la matriu A. Un adjunt d'un element a_{ij} de la matriu A se denota a_{ij}

$A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$ essent α_{ij} el menor complementari de a_{ij}

Resolució de sistemes amb matrius

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \xrightarrow[\text{es pot escriure}]{} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A·X = B

- El sistema té solució si rang(A) = rang(A^*)
    - Si rang(A) = n la solució és única: $X = \overline{A}^{-1} \cdot \overline{B}$, essent $\overline{A}$ un menor d'ordre n de la matriu A que el seu determinant no és 0 i $\overline{B}$ les files de B que coincideixin amb les files del menor d'ordre n escollit.
    - Si rang(A) < n el sistema té infinites solucions.

- El sistema no té solució si rang(A) ≠ rang(A^*).
- També es poden utilitzar matrius per a resoldre un sistema pel mètode de Gauss.

Què és una matriu i quins són els seus elements?

> Una matriu és un conjunt de nombres organitzats en files i columnes, i tancats entre un parèntesi. Els elements de la matriu de designen a partir de la posició que hi ocupen (fila i columna), i la forma general de denominar una matriu és amb una lletra minúscula amb subíndexs *ij* (*i* per a les files, *j* per a les columnes), tancat entre parèntesis: (a_{ij}).

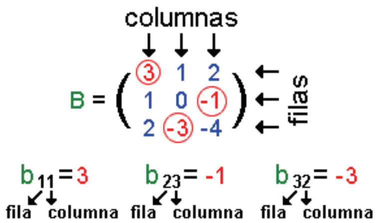
Una matriu és un conjunt de nombres organitzats en files i columnes, i tancats entre dos parèntesis. Aquests són alguns exemples de matrius:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -7 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 & 23 \\ 6 & 11 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

En forma general, una matriu s'escriu de la manera següent:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

L'element de la fila *i* i columna *j* de la matriu A se representa com a_{ij}. Per exemple, en la matriu següent B, es poden determinar alguns dels elements:



La forma general de designar una matriu utilitza una lletra minúscula amb subíndexs *ij* (*i* per a les files, *j* per a les columnes), tancat entre parèntesis: (a_{ij}); també es pot utilitzar la mateixa lletra en majúscules, sense subíndexs:

$$A = (a_{ij})$$

Si una matriu té *m* files i *n* columnes, es diu que té dimensió $m \times n$. Així, per exemple, la matriu A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 & 23 \\ 6 & 11 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

té dimensió 2×4.

Dues matrius són iguals sempre que tots els seus elements siguin iguals i ocupin les mateixes posicions; és a dir

$$(a_{ij}) = (b_{ij}) \qquad \text{si } a_{ij} = b_{ij} \qquad \text{per a qualssevol } i, j$$

Algunes matrius especials són:

- La matriu quadrada: la que té el mateix nombre de files que de columnes, és a dir, de dimensió $n \times n$. La diagonal d'una matriu està formada per aquells elements la fila i la columna dels quals tenen el mateix nombre, és a dir, a_{11}, a_{22}, a_{33} …
- La matriu diagonal: la matriu quadrada els elements de la qual són 0 excepte els de la diagonal.

- La matriu identitat: matriu diagonal en la qual tots els elements de la diagonal són 1. La matriu identitat de dimensió $n \times n$ s'indica amb I_n.
- La matriu transposada d'una matriu A, denominada A^T , és la matriu que resulta de canviar files per columnes en la matriu A. Per exemple

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -7 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

es pot observar que, per exemple, la primera fila d'A, (–1 3 5), coincideix amb la primera columna de la transposada. Es pot comprovar que això passa en tots els parells files/columnes.

Com es fa la suma i resta de matrius, i la multiplicació per un nombre?

> Dues de les operacions principals entre matrius són la suma (resta) de matrius, i el producte d'una matriu per un nombre, denominat també *escalar*. Dues matrius es poden sumar o restar quan les seves dimensions són les mateixes. En aquest cas, la suma de les matrius és igual a la suma ordenada dels elements que ocupin la mateixa posició. El producte d'una matriu per un nombre sempre es pot fer, i consisteix a multiplicar tots els elements de la matriu per aquest nombre.

Dues matrius es poden sumar o restar únicament si les seves dimensions són les mateixes. En aquest cas, la suma de les matrius és igual a la suma ordenada dels elements que ocupen la mateixa posició, i el resultat de la qual s'haurà de posar en la matriu suma, en la mateixa posició. És a dir, si A = (a_{ij}) i B = (b_{ij}) són matrius de dimensió $m \times n$, llavors

la suma és $\quad A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$

la resta és $\quad A - B = (a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$

Alguns exemples poden ajudar a entendre aquestes operacions. Es consideren aquestes matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

En primer lloc, es pot assegurar que no es poden sumar ni restar A i C, ni tampoc B i C, perquè no tenen la mateixa dimensió. En canvi es poden fer la suma i la resta d'A i B, de la manera següent:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+1 & -3-3 \\ 2+2 & 1+0 & -2-1 \\ -1+3 & 3+4 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

es pot comprovar que la suma de l'element de la fila 1 i columna 2 (en verd) de la matriu A, se suma amb l'element que ocupa la mateixa posició en la matriu B, i el resultat que ocupa la mateixa posició en la matriu suma 2 + 1 = 3. Així es fa la suma amb tots els parells d'elements de les matrius A i B.

De manera semblant es fa la resta d'ambdues matrius:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En aquest cas, en lloc de sumar, es resten els elements de la segona matriu als elements de la primera. Per exemple, a l'element de la fila 1 i columna 2 (en verd) de la matriu A, se li resta l'element que ocupa la mateixa posició en la matriu B, i el resultat ocupa la mateixa posició en la matriu resta: 2 − 1 = 1.

Les propietats de la suma de matrius són molt semblants a les propietats de la suma de nombres, tenint en compte que sempre han de ser matrius de la mateixa dimensió:

- Commutativa: A + B = B + A
- Associativa: A + B + C = A + (B + C) = (A + B)+ C
- Element neutre: hi ha una matriu, denominada *element neutre*, que sumada a qualsevol altra matriu de la mateixa dimensió, A, té com a resultat sempre A. A; aquesta matriu es denomina 0_{mn} o *matriu nul·la*, és a dir, la matriu de dimensió $m \times n$ que té totes les seves posicions ocupades per 0. Per exemple, la matriu 0_{22} és igual

$$0_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Tota matriu té un element oposat, que sumat amb l'original resulta l'element neutre. L'element neutre d'A es denomina −A. Per exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad -A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ +1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

ja que

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ +1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El producte d'una matriu per un nombre sempre es pot fer, i consisteix a multiplicar tots els elements de la matriu per aquest nombre. És a dir, si r és un nombre real, i $A = (a_{ij})$ és una matriu, el producte de la matriu per l'escalar és:

$$r \cdot A = r \cdot (a_{ij}) = (r \cdot a_{ij})$$

Per exemple, continuant amb la mateixa matriu A dels exemples anteriors:

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 6 & 3 & -6 \\ -3 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Per a dividir una matriu per un nombre s'ha de multiplicar aquesta matriu per l'invers del nombre.

Com es fa el producte de matrius?

> El producte de dues matrius solament es pot fer en el cas que el nombre de columnes de la primera matriu coincideixi amb el nombre de files de la segona matriu. Si això és així, el producte d'ambdues matrius és una altra matriu que té el mateix nombre de files que la primera matriu, i el mateix nombre de columnes que la segona matriu. Per a trobar un element de la matriu producte, s'han de multiplicar ordenadament els elements de la fila corresponent de la primera matriu pels elements de la columna corresponent de la segona matriu; a continuació s'han de sumar tots aquests productes.

Per a multiplicar dues matrius, A i B, per a obtenir A × B, s'ha de comprovar que el nombre de columnes de la matriu A coincideixi amb el nombre de files de la matriu

B. És a dir, si A és una matriu de dimensió $m \times n$, només es pot multiplicar per la matriu B si aquesta té dimensió $n \times r$. En el cas que això sigui així, la matriu producte, P = A × B, té dimensió $m \times r$, és a dir, el mateix nombre de files que la matriu A, i el mateix nombre de columnes que la matriu B. Per a trobar l'element p_{ij}, s'han de multiplicar ordenadament els elements de la fila i de la matriu A, pels elements de la columna j de la matriu B. Finalment, p_{ij} és la suma de tots aquests productes. Un exemple il·lustrarà aquest procediment:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En primer lloc, podem observar que A × B es pot fer perquè A té 3 columnes i B té 3 files; la matriu resultant tindrà 4 files (igual que A) i 2 columnes (igual que B). En canvi, B × A no es pot fer, perquè B té 2 columnes, mentre que A té 4 files.

Per a trobar l'element p_{11} (en vermell) de la matriu producte, P = A × B, s'han de multiplicar ordenadament els elements de la fila 1 de la matriu A (en verd), amb els elements de la columna 1 de la matriu B (en blau):

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \\ p_{31} & p_{32} \\ p_{41} & p_{42} \end{pmatrix}$$

és a dir, $p_{11} = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 3.$

per a trobar p_{12}, s'ha de multiplicar la fila 1 per la columna 2:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \\ p_{31} & p_{32} \\ p_{41} & p_{42} \end{pmatrix}$$

és a dir,

$$p_{12} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7.$$

i així successivament fins a trobar el producte

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \\ 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Així, doncs, es pot dir en general que si A = (a_{ij}) és una matriu $m \times n$ i B = (b_{ij}) és una matriu $n \times r$, la matriu producte d'A per B, P = (p_{ij}) = A × B, és una matriu $m \times r$, i els seus elements es calculen de la manera següent:

$$p_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} \ldots a_{in}b_{nj}$$

El producte de matrius té les següents propietats:

- Associativa: A × B × C = A × (B × C) = (A × B) × C
- L'element neutre del producte de matrius quadrades és la matriu identitat, I_n. És a dir, si A és una matriu quadrada $n \times n$, A × I_n = I_n × A = A.
- De vegades (encara que no sempre), hi ha matrius quadrades que tenen element invers. Aquesta matriu, quan existeix, es denomina *inversa*; també es diu que la matriu A és *invertible*. La matriu inversa d'una matriu quadrada de dimensió $n \times n$ A, s'indica $A^{-}1$, i compleix:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$$

- En general, el producte de matrius NO és commutatiu. És a dir, si A i B són dues matrius, quan es poden fer els productes A × B i B × A, generalment:

$$A \times B \neq B \times A$$

encara que algunes vegades, molt poques, podria ser igual.

Què és el determinant d'una matriu quadrada i quina és la seva utilitat?

> El determinant d'una matriu quadrada és un nombre. Per a trobar-lo s'han de fer una sèrie d'operacions amb els elements de la matriu. El determinant d'una matriu és molt útil per a esbrinar si una matriu té inversa i és de gran ajuda en el càlcul de la inversa de la matriu, sempre que aquesta es pugui invertir.

Per a cada matriu quadrada es pot definir un nombre que és de gran ajuda, entre altres coses, per a determinar si aquesta matriu és invertible, i en cas afirmatiu, també és imprescindible per al càlcul de la inversa d'aquesta matriu. Aquest nombre es denomina *determinant de la matriu.*

Per a indicar el determinant d'una matriu, els elements d'aquesta s'han de posar entre dos segments verticals, i no entre parèntesis. Per exemple, el determinant de la matriu A s'indica com segueix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{el seu determinant s'inidica així}]{} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

també es pot indicar d'aquesta altra manera: det(A).

Es definirà el determinant de manera recursiva, és a dir, primer per a matrius de dimensió 1×1, a continuació per a matrius de dimensió 2×2, i així successivament.

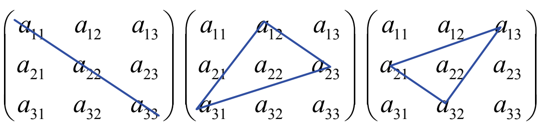
El determinant d'una matriu 1×1 és igual al nombre que compon la matriu. Per exemple,

si A = (3) det(A) = |3| = 3

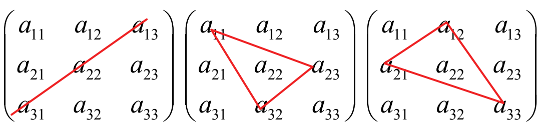
El determinant d'una matriu 2×2 és igual al producte dels elements de la diagonal menys el producte dels altres dos elements. Per exemple,

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 = 6$$

El determinant d'una matriu 3×3 es calcula sumant aquests tres productes:



i restant aquests tres productes:



És a dir,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

per exemple, en l'exemple anterior, el determinant d'A és igual a:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) \cdot 3 - (-1) \cdot 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1(-2) \cdot 3 = -14$$

Per a calcular el determinant de matrius de dimensió 4×4, s'ha de descompondre el determinant de la manera següent:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

és a dir, es tracta de multiplicar cada element de la primera columna pel determinant de la matriu 3×3 que resulta d'eliminar la fila i la columna corresponent a aquest element; a més, s'han d'alternar els signes, començant sempre pel signe +. Per exemple, l'element a_{11} s'ha de multiplicar pel determinant de la matriu que resulta d'eliminar la fila 1 i la columna 1, és a dir,

$$\begin{array}{cccc} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} & \cancel{a_{14}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \cancel{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array} \xrightarrow{\text{se elimina fila 1, columna 1}} \begin{array}{ccc} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}$$

l'element a_{21}, aquesta vegada canviat de signe, s'ha de multiplicar pel determinant de la matriu que resulta d'eliminar la fila 2 i la columna 1, és a dir:

$$\begin{array}{cccc} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} & \cancel{a_{24}} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \cancel{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array} \xrightarrow{\text{se elimina fila 2, columna 1}} \begin{array}{ccc} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & & \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}$$

i d'aquesta manera amb tots els elements de la primera columna. Al determinant que resulta d'eliminar la fila *i* i la columna *j* se l'anomena *menor complementari de l'element* a_{ij}, i s'indica α_{ij} (α, alfa, és la primera lletra de l'alfabet grec). Per exemple, en el cas de la matriu 4×4 anterior, el menor complementari d'a_{31} és

$$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Així, doncs, l'expressió que calcula el determinant 4×4 es pot simplificar encara més:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\alpha_{11} - a_{21}\alpha_{21} + a_{31}\alpha_{31} - a_{41}\alpha_{41}.$$

per exemple, es pot calcular aquest determinant seguint la fórmula anterior:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

Per a calcular el determinant de qualsevol matriu quadrada se segueix el mateix procediment: es multiplica cada element de la primera columna pel seu menor complementari; a més, s'han d'alternar els signes, començant sempre pel signe +. És a dir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\alpha_{11} - a_{21}\alpha_{21} + a_{31}\alpha_{31} \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}\alpha_{n1}.$$

El càlcul del determinant es pot fer amb qualsevol columna (o fila) de la matriu (amb un petit canvi de signe en les columnes parells); s'ha utilitzat tan sols la primera columna per a simplificar l'explicació.

Quan es pot invertir una matriu quadrada i com es fa?

> Una matriu quadrada es pot invertir sempre que la seva determinant no sigui 0. Per a trobar la inversa d'una matriu que compleixi aquesta condició, s'ha de calcular la seva matriu d'adjunts, transposar-la i, finalment, dividir el resultat entre el determinant de la matriu inicial.

Una matriu quadrada $n \times n$ es pot invertir sempre que la seva determinant no sigui 0. Per a trobar la inversa d'una matriu s'ha de definir, primer, el concepte d'*adjunt d'un element de la matriu*: l'adjunt de l'element a_{ij} de la matriu A, s'indica amb A_{ij}, i es defineix de la manera següent:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij} \qquad \text{essent } \alpha_{ij} \text{ el menor complementari de } _{ij}$$

Es pot observar que si $i+j$ és un nombre parell, $A_{ij} = \alpha_{ij}$; en canvi, si $i+j$ és un nombre senar, $A_{ij} = -\alpha_{ij}$. És a dir, el signe que s'ha d'anteposar al menor complementari per a obtenir l'element corresponent adjunt es regeix per la matriu de signes següent:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots & \\ - & + & - & \cdots & \\ + & - & + & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & & + \end{pmatrix}$$

Per exemple, l'adjunt de l'element a_{34} és $A_{34} = (-1)^{3+4}\alpha_{34} = -\alpha_{34}$.

La matriu formada per tots els adjunts dels elements de la matriu A s'anomena matriu d'adjunts d'A, i s'indica amb A'.

Una vegada trobada la matriu d'adjunts d'A, és molt senzill trobar la matriu inversa d'A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(A')^T$$

Dit d'una altra manera, la matriu inversa d'A és la matriu d'adjunts, transposada i dividida entre el valor del determinant d'A. És evident que, com ja s'ha dit, el determinant d'A ha de ser diferent de 0; en cas contrari, la fórmula no es pot aplicar.

Per exemple, si la inversa d' $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, es calcula així:

sabem que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -14$

calculem la matriu d'adjunts i la seva transposada:

$A' = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 7 \\ -11 & -2 & -5 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $(A')^T = \begin{pmatrix} 7 & -11 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 7 & -5 & -3 \end{pmatrix}$

Per tant, la inversa d'A és:

$$A^{-1} = \frac{-1}{14}\begin{pmatrix} 7 & -11 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 7 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

cosa que es pot comprovar fàcilment:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{-1}{14}\begin{pmatrix} 7 & -11 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 7 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{14}\begin{pmatrix} -14 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} = I_n$$

De la mateixa manera es pot comprovar fàcilment que $A^{-1} \cdot A = I_n$.

Com es poden fer servir les matrius per a determinar si un sistema d'equacions lineals té solució?

> Un sistema d'equacions lineals es pot expressar en forma matricial. Per a saber si el sistema té solucions i quantes en té, s'han de conèixer els conceptes de menor d'ordre *k* d'una matriu, el rang de la matriu i de la matriu ampliada. Si una matriu i la seva ampliada tenen el mateix rang, el sistema té solució; en cas contrari, el sistema no té solució.

Un sistema d'equacions lineals com el següent:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

es pot expressar en forma matricial de la manera següent:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

que es denomina *equació matricial*, del tipus A·X = B, essent X una matriu $n \times 1$ d'elements desconeguts.

Per a conèixer el nombre de solucions d'un sistema matricial s'han d'introduir alguns conceptes: menor d'ordre *k*, rang d'una matriu i matriu ampliada d'un sistema matricial.

- Donada una matriu A, si se seleccionen *k* files i *k* columnes d'aquesta matriu, i es calcula el determinant d'aquestes *k* files i *k* columnes, a aquest determinant se l'anomena *menor d'ordre k* de la matriu A. En cas que s'escullin totes les files excepte una, i totes les columnes excepte una, com és sabut, ens trobem davant un menor complementari. Vegem-ne un exemple:

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{eliminant files 1,2} \\ \text{i columnes 2,3}}]{\text{menor d'ordre 2}} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

De vegades, també s'anomena *menor d'ordre k* a la matriu, sense calcular el determinant. En l'exemple anterior també podria denominar-se menor d'ordre 2 a la matriu $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. El context ens aclarirà el significat concret, tot i que el més habitual és que designi el determinant, i no només la matriu.

- El rang d'una matriu és l'ordre màxim dels menors de la matriu que no són 0. L'ordre d'una matriu A s'indica rang(A). Per a trobar-lo, s'han de calcular menors d'ordre màxim, per si n'hi hagués algun de diferent de 0; si no és així, es calculen tots els menors d'ordre una unitat menor, per si n'hi hagués algun de diferent de 0. I així successivament. L'ordre del primer menor diferent de 0 serà el rang de la matriu. Per exemple, en el cas de la matriu anterior; s'observa que el determinant és 0 (és a dir, el menor d'ordre 4 és 0), així, s'ha de comprovar si hi ha algun menor d'ordre 3 que no sigui 0:

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{eliminant fila 1} \\ \text{i columna 1}}]{\text{menor d'ordre 3}} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

per tant, aquesta matriu té rang 3, perquè un dels seus menors d'ordre 3 no és 0.

- La matriu ampliada d'un sistema matricial A·X = B és la matriu formada per la matriu A més la columna B; generalment, aquestes dues parts de la matriu ampliada se separen per una línia. Normalment, la matriu ampliada s'indica A^* . En el sistema matricial inicial, la matriu ampliada és:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Donat un sistema matricial A·X = B, essent A una matriu $m \times n$:

- El sistema té solució en els casos que el rang de la matriu A i el de la matriu ampliada són iguals:

rang(A) = rang(A*)

i es poden donar els casos següents:

- Si rang(A) = $n = m$ la solució és única, és a dir, hi ha una única matriu $n\times 1$ que compleix que A·X = B.
- Si rang(A) < n la solució no és única; de fet, en aquestes condicions, el sistema té infinites solucions.

- El sistema no té solució si el rang de la matriu A, i el de la matriu ampliada són diferents, és a dir, si

rang(A) ≠ rang(A*)

per exemple, el sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ \quad y - z + w = -1 \\ 3x \quad + 6z - 6w = 6 \\ \quad -y + z - w = 1 \end{cases} \text{ equival a } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en aquest cas, rang(A) = rang(A*) = 2 < n = 4. Per tant, aquest sistema té infinites solucions (com es pot comprovar en el tema dedicat a sistemes d'equacions).

Com es calcula el rang d'una matriu?

> Hi ha diverses tècniques per a calcular el rang d'una matrius. Són procediments no gaire complicats, però poden arribar-se a fer molts llarg pels càlculs que comporten. Veurem un procediment que usa els conceptes de determinant i de menor, i que és prou efectiu quan les dimensions de les matrius no són molt grans.

Aplicant aquest procediment sempre trobarem el rang de la matriu. Segons la matriu que utilitzem el procediment podria abreujar-se, però això no ho podem garantir sempre. Per tant, encara que de vegades el procés s'allargui una mica, és convenient seguir aquesta guia:

1. Es busca un menor d'ordre 1 no nul.
   - Si no existeix, aleshores el rang(A)=0, i el procediment s'ha acabat.
   - Si existeix, aleshores el rang(A) és com a mínim 1, i continuem amb el pas següent.
2. Es calculen els menors d'ordre 2 que contenen el menor d'ordre 1 anterior.
   - Si tenen determinant 0 o no existeixen, aleshores, el rang(A)=1.
   - Si n'existeix un de diferent de 0, aleshores, el rang(A) és com a mínim 2, i continuem amb el pas següent.
3. Es calculen els menors d'ordre 3 que contenen el menor d'ordre 2 anterior.
   - Si són 0 o no existeixen, aleshores, el rang(A)=2.
   - Si n'existeix un diferent de 0, aleshores, el rang(A) és com a mínim 3, i continuem amb el pas següent.
4. Es va repetint el procés fins que no sigui possible fer menors d'ordre superior.

És evident que el procediment sempre s'aturarà en algun moment, i donarà un valor concret per al rang de la matriu.

Per exemple, si volem calcular el rang de la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hem de fer:

1. Seleccionem el valor 1, que no és 0, de la primera fila/primera columna.
2. Prenem un menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ que inclou l'1 del menor anterior. Per tant, cal mirar un altre menor que també contingui l'1. Prenem $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$, diferent de 0, per tant, el rang és com a mínim 2.
3. Prenem un menor que inclogui el menor anterior $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Per exemple, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$, per tant, diferent de 0. El rang és com a mínim 3.
4. No hi ha cap menor d'ordre 4, per tant, el rang de la matriu és 3.

Com es troben les solucions d'un sistema expressat matricialment?

> Les solucions d'un sistema matricial es troben transformant el sistema inicial en un altre la matriu principal del qual sigui quadrada i de determinant diferent de 0. A partir d'aquest sistema, i usant la inversa d'aquesta última matriu és relativament senzill trobar les solucions del sistema.

Si el sistema matricial A·X = B té solució única (és a dir, es compleix que rang(A) = rang(A*) = n = m), es tria un menor d'ordre n de la matriu A el determinant del qual no sigui 0 (i se l'anomena $\overline{A}$) i es trien les files de B que coincideixin amb les files del menor d'ordre n escollit (a aquestes files s'anomenen $\overline{B}$). Per a resoldre el sistema A·X = B, n'hi ha prou amb resoldre $\overline{A}{\cdot}X = \overline{B}$. Ara bé, com que $\overline{A}$ és una matriu quadrada el seu determinant de la qual no és 0, existeix la seva inversa. Per tant, podem fer multiplicar a banda i banda per $\overline{A}^{-1}$:

$$\overline{A}^{-1}{\cdot}\overline{A}{\cdot}X = \overline{A}^{-1}{\cdot}\overline{B}$$

Sabem que $\overline{A}^{-1}{\cdot}\overline{A} = I_n$, per tant, la solució del sistema és:

$$X = \overline{A}^{-1}{\cdot}\overline{B}$$

Per exemple, la solució del sistema:

$$\begin{cases} x+y+z = 0 \\ 2x-5y-2z = -2 \\ 3x+4y+z = 8 \\ 2x+2y+2z = 0 \end{cases} \text{ equivalent a } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

és única perquè rang(A) = rang(A*) = 3. Per a resoldre'l s'ha d'escollir un menor d'ordre 3 que no sigui 0 (per exemple, les tres primeres files)

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ i la solució del sistema és } X = \overline{A}^{-1} \cdot \overline{B}$$

$$\overline{A}^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -8 & -2 & 4 \\ 23 & -1 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow X = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -8 & -2 & 4 \\ 23 & -1 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Així, doncs, $x = 1$, $y = 2$, $z = -3$.

En el cas que el rang(A) = rang(A*) = $r < n$, s'ha de fer el mateix; però una vegada escollit el menor d'ordre r, s'ha de transformar el sistema d'equacions inicial, de manera que les incògnites que no corresponguin amb una columna del menor anterior, s'han de situar a l'altre costat del signe igual. Així s'obtindrà un sistema amb r incògnites, que es podrà expressar en forma matricial. Així, també la B contindrà alguna de les incògnites. Ara ja es podrà resoldre el nou sistema de la mateixa forma (perquè es tracta d'un sistema amb r incògnites, la matriu de la qual té rang r). S'ha d'assenyalar que la solució, en aquest cas, vindrà donada en termes d'algunes de les incògnites, per la qual cosa no serà una solució única.

Per exemple, el sistema

$$\begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ \quad y - z + w = -1 \\ 3x \quad + 6z - 6w = 6 \\ \quad -y + z - w = 1 \end{cases} \text{ que equival a } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en aquest cas, rang(A) = rang(A*) = 2 < 4. Per tant, primer s'ha de modificar el sistema original:

$$\begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ \quad y - z + w = -1 \\ 3x \quad + 6z - 6w = 6 \\ \quad -y + z - w = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - z + w \\ \quad y = -1 + z - w \\ 3x \quad = 6 - 6z + 6w \\ \quad -y = 1 - z + w \end{cases}$$

que en forma matricial s'expressa així:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - z + w \\ -1 + z - w \\ 6 - 6z + 6w \\ 1 - z + w \end{pmatrix}$$

si escollim un menor de rang 2 obtenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - z + w \\ -1 + z - w \end{pmatrix}$$

per tant,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 - z + w \\ -1 + z - w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 - z + w \\ -1 + z - w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2z + 2w \\ -1 + z - w \end{pmatrix}$$

podem donar el valor que vulguem a z i w, i per cadascun d'aquests tindrem una solució del sistema.

Com es fan servir les matrius per a agilitar el mètode de Gauss?

> Es pot reescriure el mètode de Gauss par a la resolució d'equacions, utilitzant només la matriu ampliada del sistema, sense necessitat d'escriure repetidament les incògnites.

Es pot utilitzar el mètode de Gauss par a la resolució d'equacions transformant només la matriu ampliada, sense necessitat d'escriure repetidament les incògnites. Així, per exemple, per a resoldre aquest sistema:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y + z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases}$$

els passos a seguir utilitzant Gauss serien:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y + z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases} \xrightarrow{2^a - 2 \cdot 1^a} \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{intercanvi } 2^a/3^a}$$

$$\xrightarrow{\text{intercanvi } 2^a/3^a} \begin{cases} x - y = 0 \\ y + w = 0 \\ z + 2w = 4 \\ 2z + w = 5 \end{cases} \xrightarrow{4^a - 2 \cdot 3^a} \begin{cases} x - y = 0 \\ y + w = 0 \\ z + 2w = 4 \\ -3w = -3 \end{cases}$$

i a continuació s'usa la substitució cap a enrere.

Aquests passos es poden escriure matricialment, utilitzant la matriu ampliada:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & & & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 4 \\ & 1 & & 1 & 0 \\ & & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{2^a - 2 \cdot 1^a} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & & & 0 \\ & & 1 & 2 & 4 \\ & 1 & & 1 & 0 \\ & & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{intercanvi } 2^a/3^a}$$

$$\xrightarrow{\text{intercanvi } 2^a/3^a} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & & & 0 \\ & 1 & & 1 & 0 \\ & & 1 & 2 & 4 \\ & & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{4^a - 2 \cdot 3^a} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & & & 0 \\ & 1 & & 1 & 0 \\ & & 1 & 2 & 4 \\ & & & -3 & -3 \end{array}\right)$$

i, a continuació, s'aplica la substitució cap a enrere. D'aquesta manera se simplifica bastant l'expressió de la resolució.