Equacions de primer i segon grau

Les equacions de primer i segon grau

<table>
<tr><th colspan="6">Equacions de primer grau amb una incògnita</th></tr>
<tr><th colspan="6">Exemple</th></tr>
<tr><td colspan="6">$3x - 5 = x + 5$ és una equació de primer grau amb una incògnita:</td></tr>
<tr><td colspan="2">és una equació perquè és una igualtat entre expressions algebraiques.</td><td colspan="2">té una incògnita, que és la x.</td><td colspan="2">és de primer grau perquè la incògnita x no es multiplica mai per cap altra incògnita, inclosa ella mateixa.</td></tr>
<tr><th colspan="6">Elements d’una equació</th></tr>
<tr><td colspan="2">Terme</td><td colspan="4">Cadascun dels sumands de l’equació.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Coeficient de la incògnita</td><td colspan="4">El nombre que multiplica a la incògnita.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Terme numèric</td><td colspan="4">Terme que no conté incògnita.</td></tr>
<tr><th colspan="6">Resolució de $3x - 5 = x + 5$</th></tr>
<tr><td colspan="3">1. Agrupar termes numèrics</td><td colspan="3">$3x = x + 5 + 5$</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Agrupar termes amb incògnita</td><td colspan="3">$3x - x = 10$</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Eliminar el coeficient de la incògnita</td><td colspan="3">$x = 10/2 = 5$</td></tr>
<tr><th colspan="6">Forma normal d’una equació de primer grau amb una incògnita</th></tr>
<tr><td colspan="6">Equació equivalent el membre de la dreta de la qual és zero, i el de l’esquerra està completament simplificat. Exemple: la forma normal de $3x - 5 = 2x + 4$ és $x - 9 = 0$.</td></tr>
<tr><th colspan="6">Solució d’una equació de primer grau en forma normal</th></tr>
<tr><td colspan="6">Si $ax + b = 0$ és l’equació en forma normal, la solució és $x = -b/a$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">No existeix</td><td colspan="4">Si el coeficient de la incògnita és igual a 0, i el terme numèric no és 0: $a = 0$, $b \neq 0$.</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Existeix</td><td colspan="4">Si el coeficient de la incògnita és diferent de 0: $a \neq 0$, existeix una sola $x = b/a$.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Si $a = 0$ i $b = 0$, qualsevol nombre és solució de l’equació.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">Les equacions de segon grau amb una incògnita</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Concepte</td><td>Tenen una única incògnita, un terme de grau 2 i altres termes de grau menor.</td><td>L’equació
$3x^2 + 3x - 5 = 2x^2 - 7$
és una equació de segon grau amb una incògnita.</td></tr>
<tr><td>La forma normal d’una equació de segon grau:
El membre de la dreta és 0.
El membre de l’esquerra té un terme de grau 2, i termes de grau menor.</td><td>La forma normal de l’equació anterior és:
$x^2 + 3x + 2= 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Elements d’una equació de segon grau en forma normal</td><td>Terme: cadascun dels sumands del membre de l’esquerra.</td><td>Els termes de l’equació anterior són: x^2, $3x$ i 2.</td></tr>
<tr><td>Coeficient de grau 2: nombre que multiplica el terme de grau 2.</td><td>El coeficient del terme de grau 2 és 1.</td></tr>
<tr><td>Coeficient de grau 1: nombre que multiplica el terme de grau 1.</td><td>El coeficient del terme de grau és 3.</td></tr>
<tr><td>Terme independent: nombre que no multiplica la incògnita.</td><td>El terme independent és 2.</td></tr>
<tr><th colspan="3">La resolució d’una equació de segon grau</th></tr>
<tr><td colspan="3">La fórmula per a la resolució de l’equació en forma normal</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Elements de la fórmula</td><td>El coeficient del terme de grau 2 es denomina a</td><td>$a = 1$</td></tr>
<tr><td>El coeficient del terme de grau 1 es denomina b.</td><td>$b = 3$</td></tr>
<tr><td>El terme independent es denomina c.</td><td>$c = 2$</td></tr>
<tr><td>La fórmula</td><td>$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
el signe ± (més-menys) permet abreujar l’expressió de les dues solucions possibles.</td><td>$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$
és a dir, les solucions són –1 i –2.</td></tr>
<tr><td></td><td>El discriminant és
$\Delta = b^2 - 4ac$</td><td>El discriminant és $3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Nombre de solucions d’una equació de segon grau</td></tr>
<tr><td colspan="2">Si el discriminant és positiu, l’equació té dues solucions.</td><td>L’equació $2x^2 + 3x - 4 = 0$ té dues solucions, ja que $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 41$ és positiu.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Si el discriminant és 0 , l’equació té una única solució, denominada solució doble.</td><td>L’equació $x^2 - 4x + 4 = 0$ té una única solució ja que $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Si el discriminant és negatiu, l’equació no té cap solució real.</td><td>L’equació $3x^2 - 4x + 5 = 0$ no té cap solució, ja que $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = -46$ és negatiu.</td></tr>
</table>

Què és una equació de primer grau, quantes solucions pot tenir i de quin tipus són?

> Una equació de primer grau amb una incògnita és una equació amb una única incògnita que apareix amb exponent 1. Una equació de primer grau té, en general, una única solució que és un nombre real.

Com és sabut, una equació de primer grau, o lineal, amb una incògnita és una equació amb una única incògnita que apareix amb exponent 1. Per exemple, una equació de primer grau (amb una incògnita) és:

$$3x - 2 = 5x + 6$$

Pel que fa al tipus de solució, si n'hi ha, pot ser un nombre natural, enter, racional o real. Així, per exemple:

$x = -1$ és la solució de l'equació $1 - x = 2x + 4$
$x = 3/4$ és la solució de l'equació $2 - 3x = x - 1$

Pel que fa a les solucions, una equació lineal amb una incògnita pot:

- No tenir cap solució. Per exemple, $5x - 7 = 5x + 12$ no té solució. Aquests casos són igualtats algebraiques falses.
- Tenir solució. En aquest cas es poden donar dues possibilitats:
    - Qualsevol nombre és solució de l'equació. Per exemple, l'equació $5x - 3 = 5x - 3$ té com a solució qualsevol nombre. Es tracta, en aquests casos, d'igualtats algebraiques certes.
    - Hi ha una única solució. Per exemple, l'equació $2x - 1 = 3x + 4$ només té una solució, que és $x = -5$.

La major part d'equacions de primer grau i, és clar, les més interessants, són d'aquest últim tipus. La resolució d'una equació de primer grau s'haurà assolit quan es trobi aquesta única solució.

Què s'ha de fer abans de resoldre una equació de primer grau amb una incògnita?

> Abans de resoldre una equació, aquesta s'ha de simplificar al màxim, agrupant en cada membre els termes. Si l'equació conté denominadors, és molt recomanable buscar una equació equivalent que no en tingui.

Abans de començar a resoldre una equació, s'ha de simplificar al màxim, és a dir, s'ha de reduir cada membre a una expressió amb un únic terme numèric, i un únic terme de grau 1. Per exemple, si s'ha de resoldre l'equació:

$$4x + 3 - 2x - 1 = 10 + 6x - 2 - x$$

en primer lloc, s'han de simplificar ambdós membres: el de l'esquerra quedaria com a $2x + 2$; el de la dreta, $8 + 5x$. Així, doncs, l'equació es convertiria en:

$$2x + 2 = 8 + 5x$$

En els casos en què l'equació conté nombres fraccionaris, convé (tot i que no és imprescindible), o bé utilitzar els nombres decimals equivalents, o bé transformar l'equació en una altra d'equivalent que no contingui denominadors. Per exemple, per a eliminar el denominador de l'equació $\frac{3x}{5} - \frac{2}{3} = 4x - \frac{1}{3}$, es pot seguir aquest procediment:

1. Es busca el mcm dels denominadors. En el cas de l'exemple, mcm(5,3) = 15.
2. S'escriu el mateix denominador en tots els termes, dividint el mcm entre el denominador que tenen (si no en tenen, és sabut que aquest és igual a 1) i multiplicant el resultat pel numerador.
   En l'exemple, l'equació anterior s'escriuria:

   $$\frac{9x}{15}-\frac{10}{15}=\frac{60x}{15}-\frac{5}{15}\text{ , és a dir, }\frac{9x-10}{15}=\frac{60x-5}{15}$$

3. S'elimina el denominador d'ambdós membres, (multiplicant-los per aquest mateix denominador). D'aquesta manera, queda una equació equivalent sense denominadors.
   En l'exemple, es multipliquen els dos membres per 15:

   $$15\cdot\frac{9x-10}{15}=15\cdot\frac{60x-5}{15}\text{, per tant, }9x-10=60x-5$$

aquesta última ja és una equació sense denominadors.

Quins són els passos de la resolució d'una equació de primer grau?

> Els passos per a la resolució d'una equació de primer grau són, fonamentalment, tres: l'agrupació de termes numèrics, l'agrupació de termes de grau 1 i l'eliminació del coeficient de la incògnita.

La resolució d'una equació de primer grau consta de diversos passos. Aquests passos es fan amb l'objectiu de convertir l'equació inicial en una equació equivalent, però més senzilla de resoldre. Si aquest procés es repeteix, al final s'obtindrà una equació de resolució immediata. Com que totes les equacions són equivalents, la solució obtinguda també ho serà de l'equació plantejada inicialment.

De vegades, aquest pas se'l coneix amb l'expressió *passar el terme numèric a l'altre membre, restant*. Això és així perquè sembla que aquesta sigui la transformació que es fa:

$$2x + 2 = 8 + 5x - 2.$$

Encara que aquesta afirmació sigui falsa, és una bona manera de recordar i accelerar aquest pas; en tot cas, és convenient no oblidar l'autèntic procés que té lloc.

- El primer pas de la resolució d'una equació de primer grau consisteix a agrupar tots els termes numèrics que hi apareixen. Normalment, se solen agrupar en el membre de la dreta. D'aquesta manera, només quedarà un terme numèric en l'equació.

El procediment és senzill: s'ha de restar a ambdós membres el terme numèric de l'esquerra, de manera que l'equació resultant serà equivalent de la inicial. Agafem un exemple anterior:

$$2x + 2 = 8 + 5x$$

el terme numèric de l'esquerra és 2; el restem en ambdós membres:

$$2x + 2 \mathbf{- 2} = 8 + 5x \mathbf{- 2.}$$

que, una vegada simplificada, es transforma en:

$$2x = 6 + 5x$$

una equació més senzilla que la inicial perquè el membre de l'esquerra no té terme numèric. En tot cas, és una equació equivalent a $2x + 2 = 8 + 5x$.

De vegades, aquest pas es coneix com *passar el terme de grau 1 a l'altre membre, restant.* Això és així perquè aparentment aquest és el procés que se segueix:

$$2x - 5x = 6 + 5x$$

Encara que aquesta afirmació no sigui certa, és una bona manera de recordar i accelerar aquest pas; en qualsevol cas, és convenient no oblidar l'autèntic procés que té lloc.

- El segon pas de la resolució consisteix a agrupar els termes amb incògnita. Habitualment, s'agrupen els termes amb incògnita en el membre de l'esquerra.

El procés és similar al que agrupa el terme numèric: s'ha de restar a banda i banda el terme de grau 1 del membre de la dreta. D'aquesta manera s'obtindrà una equació equivalent més senzilla. En l'exemple, el terme de grau 1 del membre de la dreta de l'equació $2x = 6 + 5x$ és $5x$. Es resta, doncs, a ambdós membres:

$$2x \mathbf{- 5x} = 6 + 5x \mathbf{- 5x}$$

que es pot simplificar així:

$$-3x = 6.$$

En aquest pas es pot esbrinar si l'equació té solució o no en té:

- Si el coeficient de la incògnita és el mateix en tots dos membres:
  - No hi ha solució si el terme numèric no és 0. Per exemple, en l'equació:

    $3x = 3x - 2$

    després de fer aquest pas quedaria:

    $0 = -2$

    igualtat falsa i, per tant, l'equació no té solució.
  - En canvi, si el terme numèric és 0, qualsevol nombre és solució de l'equació. Per exemple, en l'equació:

    $8x = 8x$

    és senzill adonar-se que qualsevol nombre que substitueixi la x és solució de l'equació perquè es tracta d'una igualtat algebraica certa.
- En cas contrari, l'equació té una única solució.

- L'últim pas de la resolució d'una equació de primer grau consisteix a "eliminar" el coeficients de la incògnita, perquè aquesta quedi sola o aïllada en el membre de l'esquerra.

El procediment és, també, senzill: es tracta de dividir ambdós membres de l'equació entre el coeficient del terme de grau 1 del membre de l'esquerra. Per exemple, en el cas anterior, el coeficient de grau 1 del membre de l'esquerra de l'equació $-3x = 6$ és -3. Si dividim ambdós membres entre aquest nombre el resultat és:

$$\frac{-3x}{-3} = \frac{6}{-3}$$

és a dir,

$$x = -2$$

és evident, doncs, que la solució de l'equació plantejada inicialment és -2, ja que les equacions intermèdies que s'han anat obtenint són totes elles equivalents:

$4x + 3 - 2x - 1 = 10 + 6x - 2 - x$

$2x + 2 = 8 + 5x$

$2x = 6 + 5x$

$-3x = 6$

$x = -2.$

Aquest últim pas també se sol descriure com *passar el coeficient de la x a l'altre membre*. Això és així perquè, aparentment, aquest és el procés que se segueix:

$$-3\ x = \frac{6}{-3}$$

Aquesta afirmació és, evidentment, incorrecta; en qualsevol cas, és una bona manera de recordar i accelerar aquest pas (encara que és convenient no oblidar l'autèntic procés que té lloc).

la comprovació és ben senzilla: només cal substituir la x de l'equació inicial per -2:

$$4 \cdot (-2) + 3 - 2 \cdot (-2) - 1 = 10 + 6 \cdot (-2) - 2 - (-2)$$

en tots dos membres el resultat és -2.

Així, doncs, el procés de resolució d'una equació de primer grau consisteix, fonamentalment, a aïllar la incògnita en un dels membres de l'equació; en l'altre membre apareix la solució de l'equació.

Què significa aïllar la incògnita d'una equació de primer grau?

> El procés pel qual la incògnita d'una equació de primer grau (o de grau més gran) queda en solitari en un dels membres s'anomena *aïllar la incògnita de l'equació*; aquest procés és a la base de la resolució d'una equació de primer grau.

El procés de solució d'una equació de primer grau (però, també, de grau superior) es pot denominar aïllar la incògnita de l'equació, i consta de tres passos principals, una vegada simplificats els membres de l'equació. Per exemple, si es vol resoldre l'equació $2x - 4 = 14 - 4x$, s'ha de procedir així:

1. S'agrupen els termes numèrics:

$$2x - 4 - (-4) = 14 - 4x - (-4)$$

és a dir

$$2x = 18 - 4x$$

2. S'agrupen els termes de grau 1:

$$2x - (-4x) = 18 - 4x - (-4x)$$

és a dir

$$6x = 18$$

3. S'elimina el coeficient de la x:

$$\frac{6x}{6} = \frac{18}{6}$$

és a dir

$$x = 3$$

La solució, després d'aïllar la incògnita, és $x = 3$.

Existeix una fórmula per a trobar la solució d'una equació de primer grau?

> La manera més senzilla de trobar la solució d'una equació de primer grau és transformar-la en una equació del tipus $ax + b = 0$ ($a \neq 0$), ja que la fórmula de la solució d'aquesta equació és $x = -b/a$.

La solució d'una equació de primer grau es pot obtenir, també, a partir d'una fórmula senzilla, que es dedueix dels passos proporcionats anteriorment. Per a això, en primer lloc, s'ha de convertir en una equació equivalent, el membre de la dreta de la qual sigui 0. Per exemple, l'equació, $4x - 3 = 2x + 5$ és equivalent de $2x - 8 = 0$. La solució d'aquesta equació, evidentment, és el terme numèric canviat de signe, dividit entre el coeficient de la incògnita; en l'exemple, la solució és $x = 8/2 = 4$.

Per a generalitzar aquest fet, una equació de primer grau es pot escriure sempre d'aquesta manera, anomenada *forma normal*:

$$ax + b = 0$$

De manera que a és el coeficient de la incògnita (que no pot ser 0), b és el terme numèric i, evidentment, x és la incògnita. D'aquesta manera, la solució d'una equació d'aquest tipus és:

$$x = -\,b/a.$$

Per exemple,

la solució de l'equació	$3x - 5 = 0$	és	$x = 5/3$
la solució de l'equació	$2x + 5 = 0$	és	$x = -5/2$
la solució de l'equació	$-3x - 1/2 = 0$	és	$x = -1/6$

Com s'expressa una equació de segon grau amb una incògnita en forma normal?

> Per a trobar la forma normal d'una equació de segon grau s'ha de transformar en una equació equivalent del tipus $ax^2 + bx + c = 0$, essent $\mathrm{mcd}(a, b, c) = 1$.

Una equació de segon grau amb una incògnita ha de contenir termes de segon grau, a més de termes numèrics i termes de primer grau. Per exemple, són equacions de segon grau:

$$3x^2 + 6x - 4 = 2x + 5$$

$$2x^2 - 4x + 5 = 3x^2 - 5x + 4.$$

Per a trobar la solució d'una equació de segon grau, aquesta s'ha d'expressar, primer, en forma normal. Per a trobar una forma normal d'una equació de segon grau, el membre de la dreta ha de ser igual a 0; també és convenient que el coeficient de grau 2 sigui positiu (en tot cas, això no és imprescindible). Així, per exemple, la forma normal de $x^2 + 4x - 5 = 3x^2 - 6x + 7$ és:

$$x^2 + 4x - 5 - 3x^2 + 6x - 7 = 0$$

i, simplificant,

$$-2x^2 + 10x - 12 = 0$$

Si es vol que el coeficient de la x^2 no sigui negatiu, només s'han de multiplicar ambdós membres per -1, amb la qual cosa obtindrem una equació equivalent:

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

També es pot simplificar més dividint tots els coeficients pel mcd de tots ells. En aquest cas, el $\mathrm{mcd}(2, -10, 12) = 2$. Per tant, els coeficients de l'equació anterior es poden dividir entre 2:

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Quines són les equacions de segon grau fàcils de resoldre?

> Resulten fàcils de resoldre aquelles equacions de segon grau el coeficient de grau 1 de les quals és 0, o bé és 0 el terme independent. Una equació de segon grau sense terme independent, és a dir, del tipus $ax^2 + bx = 0$, té com a solució el 0 i un altre nombre, $-b/a$. Les solucions d'una equació de segon grau del tipus $ax^2 + c = 0$ són $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$, sempre que $-c/a$ sigui un nombre positiu.

Són fàcils de resoldre aquelles equacions de segon grau el coeficient de grau 1 de les quals és 0, o bé, és 0 el terme independent. Per exemple:

- $3x^2 - x = 0$ és una equació de segon grau sense terme independent. Per a resoldre-la tan sols és necessari observar que es pot extreure una x de factor comú:

  $$3x^2 - x = x(3x - 1) = 0$$

Per tant, la primera equació pot transformar-se en:

$x(3x - 1) = 0$

Es tracta d'un producte de nombres, x i $3x - 1$, que ha de ser 0. Per tant, algun d'ells ha de ser 0, és a dir:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{o be} \\ 3x - 1 = 0 \quad \text{és a dir, } x = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Així, doncs, l'equació de segon grau $3x^2 - x = 0$ té com a solucions el 0 i 1/3. En general, tota equació de segon grau sense terme independent, és a dir, del tipus $ax^2 + bx = 0$, té com a solució el 0 i un altre nombre, $-b/a$.

- $2x^2 - 18 = 0$ és una equació de segon grau sense terme de grau 1. En aquest cas, s'ha d'aïllar la x^2, com si es tractés d'una equació de primer grau:

  $x^2 = 18/2 = 9$

  és a dir, les solucions són aquells nombres el quadrat dels quals sigui 9. És a dir, les solucions són 3 i -3 o, dit d'una altra manera, utilitzant el símbol $\pm$, les solucions són $x = \pm 3$.

  En general, les solucions d'una equació de segon grau del tipus $ax^2 + c = 0$ són $x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$, sempre que $-\dfrac{c}{a}$ sigui un nombre positiu (ja que no hi ha cap nombre real el quadrat del qual sigui igual a un nombre negatiu).

Com es resol una equació de segon grau?

> Hi ha una fórmula per a trobar totes les solucions d'una equació de segon grau expressada en forma normal, $ax^2 + bx + c = 0$:
>
> $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
>
> el símbol $\pm$ indica que s'han de distingir dos casos: un en què es fa servir el + i l'altre, en el qual s'utilitza el $-$.

De manera general, una equació de segon grau en forma normal es pot escriure així:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

essent x la incògnita, a el coeficient de grau 2 (sempre diferent de 0), b el coeficient de grau 1 i c, el terme numèric. Les solucions d'aquesta equació es poden trobar d'aquesta manera:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ i } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Normalment s'utilitza aquesta fórmula general per a donar les solucions d'una equació de segon grau conjuntament:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

en la qual el símbol $\pm$ significa que s'han de distingir dos casos: un en el qual s'utilitza el + i un altre en el qual s'utilitza el $-$, tal com es pot comprovar en les fórmules anteriors.

Així, per exemple, les solucions de l'equació $2x^2 - 10x + 12 = 0$ són, segons aquesta fórmula:

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4\cdot 2\cdot 12}}{2\cdot 2} = \frac{10\pm 2}{4}$$

és a dir, les solucions són $x = 3$ i $x = 2$, com es pot comprovar fàcilment.

Vegem que aquesta fórmula és correcta per a qualsevol equació de segon grau. Només cal substituir els valors en l'equació general. Per exemple: substituïm $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ en $ax^2 + bx + c = 0$:

$$a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) + c =$$

$$= a\left(\frac{b^2+b^2-4ac-2b\sqrt{b^2-4ac}}{4a^2}\right) + b\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) + c =$$

$$= \frac{b^2-2ac-b\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b^2+b\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + c =$$

$$= \frac{b^2-2ac-b\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b^2+b\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{2ac}{2a} =$$

$$= \frac{b^2-2ac-b\sqrt{b^2-4ac}-b^2+b\sqrt{b^2-4ac}+2ac}{2a} = \frac{0}{2a} = 0$$

En el cas de $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, la comprovació és molt semblant.

Quantes solucions té una equació de segon grau?

> Una equació de segon grau en forma normal, $ax^2 + bx + c = 0$, té, pel cap alt, dues solucions. El nombre de solucions es pot determinar a partir del valor discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$: si és positiu, té dues solucions; si és negatiu, cap, i si és 0, una única solució, denominada *solució doble.*

L'estudi de l'arrel quadrada que es troba en la fórmula de la solució d'una equació de segon grau proporciona el nombre de solucions de l'equació. L'expressió continguda dintre de l'arrel quadrada de la solució se l'anomena *discriminant*, i s'indica amb la lletra grega delta majúscula, Δ. Així, doncs, el discriminant de la solució d'una equació de segon grau és: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Aquest element permetrà establir el nombre de solucions de qualsevol equació de segon grau:

- Si el discriminant és positiu, es pot assegurar que l'equació té dues solucions diferents, que s'obtenen aplicant la fórmula. Per exemple, l'equació $x^2 - 3x + 2 = 0$ té dues solucions perquè

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0.$$

Les seves solucions són, aplicant la fórmula, $x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1}$, és a dir, són $x = 1$, $x = 2$.

- Si el discriminant és 0, es pot assegurar que l'equació té una única solució, denominada *solució doble*, que s'obté aplicant la fórmula. Per exemple, l'equació $x^2 - 4x + 4 = 0$ té una única solució perquè

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0.$$

En aquest cas, la solució és $x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$, és a dir, $x = 2$.

- Si el discriminant és negatiu, es pot assegurar que l'equació no té cap solució. Per exemple, l'equació $2x^2 - 3x + 5x = 0$ no té cap solució, ja que:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9 - 40 = -31 < 0.$$

En aquest cas, és impossible aplicar la fórmula perquè no existeix l'arrel quadrada d'un nombre negatiu.

Què són les equacions de tipus quadràtic i com es resolen?

> Una equació de tipus quadràtic és aquella que, en forma normal, té terme independent, un terme de grau qualsevol, i un altre terme el grau del qual és el doble de l'anterior. La resolució d'aquest tipus d'equacions és semblant a la d'una equació de segon grau, ja que l'expressió de l'equació és similar.

Hi ha equacions de grau major que dos que es poden resoldre amb l'ajuda de la fórmula per a les equacions de segon grau. Es tracta d'equacions que, en forma normal, tenen com a molt tres termes: el terme numèric, un terme de qualsevol grau, i altre terme de grau doble a l'anterior. Per exemple, equacions de tipus quadràtic són:

$$4x^8 + 5x^4 + 10 = 0 \qquad\qquad 3x^{10} + x^5 - 15 = 0$$

Per a resoldre aquest tipus d'equacions només cal adonar-se que es poden reescriure d'aquesta altra forma:

$$4(x^4)^2 + 5x^4 + 10 = 0 \qquad\qquad 3(x^5)^2 + x^5 - 15 = 0$$

Observant aquestes equacions, es pot comprovar la seva gran semblança amb una equació de segon grau. L'única diferència és que se substitueix la incògnita per una potència d'aquesta incògnita. En tot cas, la fórmula ha de ser molt semblant a la fórmula de l'equació de segon grau.

El cas més senzill d'equació de tipus quadràtic és la denominada *equació biquadrada*, equació de quart grau que, en forma normal, només té els termes de grau 4, 2 i el terme independent. Per exemple:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

és una equació biquadrada. Reescrivint aquesta equació de manera que s'assembli a una equació de 2n grau, queda:

$$(x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Si considerem que la incògnita d'aquesta equació és x^2, llavors la solució ve donada per:

$$x^2 = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2}$$

Per tant, $x^2 = 4$, o bé, $x^2 = 9$. Falta, ara, descobrir el valor de la x: en el primer cas, $x = \pm\sqrt{4}$, mentre que en el segon cas, $x = \pm\sqrt{9}$. És a dir, les solucions de l'equació biquadrada són 2, –2, 3 i –3, com es pot comprovar de manera senzilla. Es pot concloure que una equació biquadrada pot tenir des de cap fins a 4 solucions.

La resta d'equacions de tipus quadràtic es poden resoldre de manera semblant. Per exemple, $3x^8 - 6x^4 - 9 = 0$ es transforma en $3(x^4)^2 - 6x^4 - 9 = 0$, les solucions de la qual són de la forma:

$$x^4 = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-9)}}{2 \cdot 3}$$ és a dir, $x^4 = 3$, o bé, $x^4 = -1$.

Per tant, en el primer cas, $x = \pm\sqrt[4]{3}$, mentre que en el segon cas, no hi ha solució, ja que no existeix cap nombre que elevat a 4 resulti –1. En definitiva, las solucions de l'equació anterior són $+\sqrt[4]{3}$ i $-\sqrt[4]{3}$.

En el cas de les equacions de tipus quadràtic, com a màxim tindran un nombre de solucions igual al grau de l'equació.

Què és una inequació i què és una solució d'una inequació?

> Una inequació és una desigualtat entre expressions algebraiques que, de manera semblant a l'equació, pot tenir solucions, complint aquestes que en substituir-les en la inequació, la desigualtat numèrica resultant és certa.

Una inequació és una desigualtat (el signe de la qual pot ser <, >, ≤ i ≥) entre expressions algebraiques. Per exemple, $3x - a < 2x - 1$ és una inequació. Com en el cas de les equacions, las incògnites de cada membre d'una inequació es poden substituir, també, per valors numèrics. Per exemple, en la inequació $2x + 4y - 5 \geq 4x - 5y$ es poden substituir la x per1, i la y, per 5:

$$2 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{1} + 4 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ y}}{5} - 5 \geq 4 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{1} - 5 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ y}}{5}$$

D'aquesta manera, la inequació es transforma en una desigualtat entre expressions numèriques. En cas que sigui certa, es diu que s'ha trobat una solució de la inequació. Així, una solució de la inequació $2x + 4y - 5 \geq 4x - 5y$ consisteix a substituir la x per 2 i la y per 1; dit d'una altra manera, $x = 2$ i $y = 1$ és una solució de la inequació anterior. S'ha de tenir en compte que:

- Una solució d'una inequació ha d'atorgar un valor a cadascuna de les seves incògnites.
- Una inequació pot tenir més d'una solució. Per exemple, en el cas de la inequació anterior, $2x + 4y - 5 \geq 4x - 5y$, altra solució podria ser $x = 1$ i $y = 3$, ja que $2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 5 \geq 4 \cdot 1 - 5 \cdot 3$.

Dues inequacions que tenen les mateixes solucions es denominen *equivalents*. Es pot trobar una inequació equivalent a una altra utilitzant procediments similars als coneguts per a les equacions:

- Sumant o restant a ambdós membres el mateix nombre.
- Multiplicant o dividint ambdós membres pel mateix nombre (diferent de 0). En aquest cas, cal destacar que si el factor pel qual es multipliquen (o es divideixen) ambdós membres és negatiu, llavors el signe de la desigualtat canvia d'orientació (és a dir, < es transforma en >, i > es transforma en <). Per exemple, una inequació equivalent a l'equació $3x + 4 < 2 - x$, es pot obtenir multiplicant ambdós membres per –2, i és:

$-2 \cdot (3x + 4) > -2 \cdot (2 - x)$

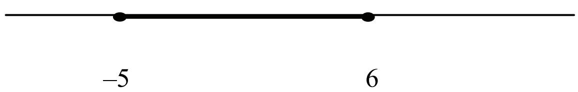
és a dir, $-6x - 8 > -4 + 2x$.

Això és així perquè és sabut que en multiplicar (o dividir) ambdós membres d'una desigualtat per un nombre negatiu, la desigualtat ha de canviar la seva orientació.

Què és un interval?

> Un interval és un segment de la recta real formada per un conjunt de nombres que són contigus, i és molt útil per a expressar la solució d'una inequació.

Un interval és el conjunt de tots els nombres més petits (o iguals) que un nombre donat, i més grans (o iguals) que un altre. Aquests dos nombres són els extrems de l'interval. Per exemple, els nombres compresos entre el –5 i el 6 formen un interval, els extrems del qual són el –5 i el 6. Aquest interval es pot representar en la recta real d'aquesta manera:



➢ En cada interval s'ha d'indicar si algun dels extrems està inclòs en l'interval en qüestió: si un extrem pertany a l'interval es denomina *interval tancat per aquest extrem* (i es denota amb un claudàtor); si un extrem no pertany a l'interval es denomina interval *obert per aquest extrem* (i es denota amb un parèntesi). Per exemple, l'interval obert per l'esquerra i tancat per la dreta, d'extrems –5 i 6, s'escriu (–5,6], i la seva representació és (el punt ple indica que aquest valor pertany a l'interval, un punt blanc o la punta d'una fletxa indica que el valor no hi pertany):

De vegades, s'ha de representar un interval que té un extrem, però no l'altre; es fa servir el símbol ∞ (amb signe + o –), que es llegeix "infinit", per a expressar-lo: per exemple, tots els nombres reals fins el 5, el 5 inclòs, conformen l'interval $(-\infty,5]$; tots els nombres més grans que –3, el -3 no inclòs, es representen amb l'interval $(-3,+\infty)$.

Com es resolen les inequacions de primer i segon grau?

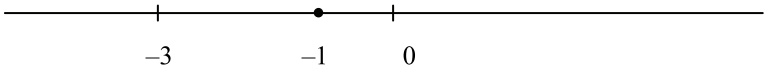
> Per a resoldre inequacions de primer i segon grau amb una incògnita, primer s'han de resoldre les equacions associades, assenyalar les solucions en la recta real, i decidir quins intervals d'aquesta recta resolen l'equació en qüestió.

Per a resoldre una inequació de primer grau s'han de seguir aquests passos:

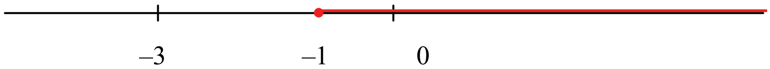
1) Es resol l'equació associada a la inequació lineal. L'equació associada a una inequació és aquella que s'obté canviant el signe de desigualtat pel signe igual. Per exemple, si es vol resoldre $2x + 5 \geq 2 - x$, hem de resoldre, en primer lloc, $2x + 5 = 2 - x$. És fàcil comprovar que la solució és $x = -1$. Així, aquesta solució divideix la recta real en tres zones: $(-\infty,-1)$, –1 i $(-1,+\infty)$. Els passos següents volen conèixer quines d'aquestes tres zones pertanyen a la solució de la inequació.
2) Es tria un nombre que es trobi dintre d'aquestes zones. En l'exemple, es poden triar aquests dos valors: –3 i 0.

3) Se substitueixen els valors anteriors (el de la solució de l'equació associada, i els del pas 2) a la inequació, i es comprova quin d'ells és solució. Per exemple:

- Si $x = -1$, la desigualtat resultant és certa: $2 \cdot (-1) + 5 \geq 2 - (-1)$ és cert.
- Si $x = -3$, la desigualtat resultant és falsa: $2 \cdot (-3) + 5 \geq 2 - (-3)$ és fals.
- Si $x = 0$, la desigualtat resultant és certa: $2 \cdot 0 + 5 \geq 2 - 0$ és cert.



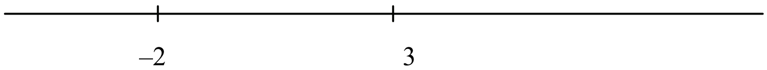
4) La solució de la inequació està formada pels nombres que es troben en la mateixa zona que les solucions del pas anterior. En l'exemple, les zones de solució són: –1 i $(-1, +\infty)$. És a dir, la solució és $[-1, +\infty)$.



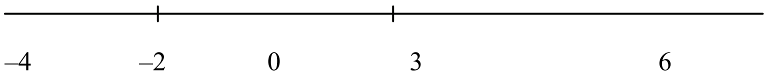
També es poden resoldre de manera similar inequacions de segon grau. Heus-ne aquí els passos:

1) Es resol l'equació associada a la inequació de 2n. grau. Per exemple, si la inequació és $2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$, l'equació associada és $2x^2 - 2x - 2 = x^2 - x + 4$. Les seves solucions són $x = 3$, $x = -2$.

2) Es marquen en la recta real les solucions anteriors, que divideixen la recta real en diverses zones:



3) Se selecciona un nombre (qualsevol) de cadascuna de les zones:



4) Es comprova quin d'ells és una solució de la inequació:

–4	no és solució de	$2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$
–2	és solució de	$2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$
0	és solució de	$2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$
3	és solució de	$2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$
6	no és solució de	$2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$.

5) La solució és igual a la reunió de totes les zones del pas anterior en les quals el nombre escollit era solució. Així, en l'exemple, la solució és l'interval [–2,3].

En el cas de la inequació $2x^2 - 2x - 2 > x^2 - x + 4$, la seva solució estaria formada per tots els nombres de $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$. El símbol $\cup$ és el símbol de la unió de conjunts i indica que cal reunir tots els nombres d'un interval amb els de l'altre.