Els nombres reals

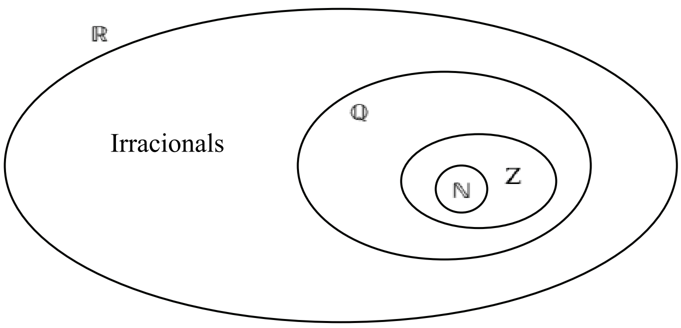
Els nombres reals

Nombres reals ($\mathbb{R}$)

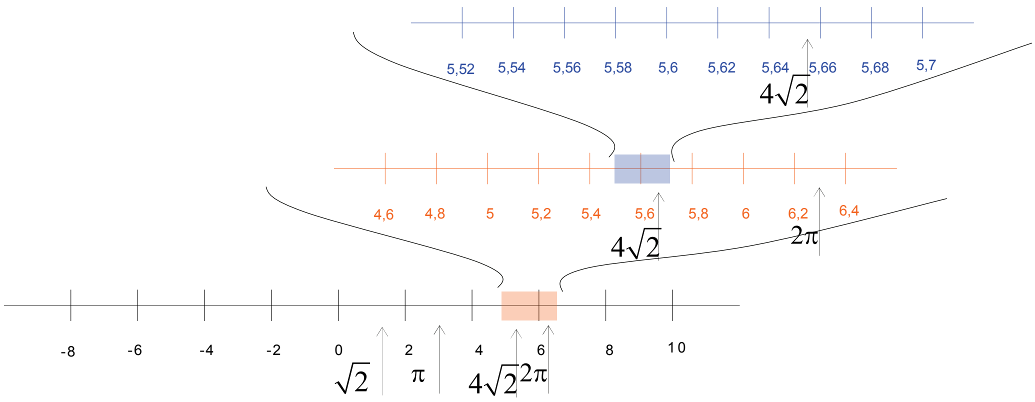
- Nombres racionals ($\mathbb{Q}$): inclou als nombres enters ($\mathbb{Z}$) que inclouen als nombres naturals ($\mathbb{N}$)

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

- Nombress irracionals: no poden expressar-se mitjançant una fracción de nombres enters



Representació dels nombres reals: recta real



Expressió dels reals: notació científica

$$\underbrace{1,352}_{\textit{Mantissa}} \cdot 10^{\overbrace{36}^{\textit{Exponent}}}$$

- Exponent: potència de deu
- Mantissa: nombre decimal el valor absolut del qual és major o igual que 1, i menor que 10.

Operacions bàsiques amb nombres reals: suma i multiplicació.

Elements destacats respecte de les operacions:

- L'element neutre de la suma és el 0: $a + 0 = 0 + a = a$.
- L'element neutre de la multiplicació és l'1: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
- L'oposat de qualsevol nombre real a és $-a$, i compleix: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
- L'invers de qualsevol nombre real a és $1/a$, i compleix: $a \cdot 1/a = 1/a \cdot a = 1$.

Operacions derivades de les operacions elementals:

- La resta de dos nombres és igual a la suma amb l'oposat: $a - b = a + (-b)$.
- La divisió de dos nombres és igual a la multiplicació amb l'invers: $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$.

Propietats de les operacions elementals:

$$\text{Suma}\begin{cases}\text{Propietat commutativa: } a+b=b+a \\ \text{Propietat associativa: } a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)\end{cases}$$

$$\text{Producte}\begin{cases}\text{Propietat commutativa:} \\ a\times b=b\times a \\ \text{Propietat associativa:} \\ a\times b\times c=(a\times b)\times c=a\times(b\times c) \\ \text{Propietat distributiva del producte respecte de la suma:} \\ a\cdot(b+c)=(b+c)\cdot a=a\cdot b+a\cdot c\end{cases}$$

La potenciació de nombres reals: si a és un nombre real, n i m són nombres enters:

$$a^{-\mathrm{n}} = 1/a^n$$

propietats de la potència, essent r i s nombres racionals:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$
$$a^r : a^s = a^{r-s}$$
$$\left(a^r\right)^s = a^{r\cdot s}$$
$$\left(a\cdot b\right)^r = a^r \cdot b^r$$
$$\left(a : b\right)^r = a^r : b^r$$
$$a^0 = 1 \quad \text{sempre que} \quad a \neq 0$$
$$a^1 = a$$

Hi ha nombres que no siguin racionals?

> La gran quantitat de nombres racionals que hi ha, i també la seva gran concentració en qualsevol petita secció de la recta que els representa, podria fer pensar que qualsevol nombre imaginable és, de fet, un nombre racional. Això no és així: hi ha els nombres irracionals, que no es poden expressar com una fracció.

Un nombre racional s'ha de poder expressar en forma de fracció de nombres enters o, el que és el mateix, en forma de nombre decimal exacte o periòdic. Hi ha nombres que no es poden expressar d'aquesta manera, és a dir, que per molts decimals que es calculin, no apareixen repeticions constants de xifres. Per exemple:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242096980 8...$$

$$\sqrt{3} = 1{,}7320508075688772935274463415058723 7...$$

Aquest tipus de nombres que no es poden expressar en forma d'un nombre decimal, exacte o periòdic, es denominen *nombres irracionals*. Dit d'una altra manera: els nombres irracionals són aquells que no es poden expressar en forma d'una fracció de nombres enters, és a dir, són aquells que no són racionals (de fet, el nom *irracional* ja fa referència a aquesta característica de no ser racionals).

No resulta fàcil demostrar que un nombre, com els anteriors, és irracional, ja que ningú no pot assegurar que en xifres decimals més avançades no es pugui trobar la part periòdica del nombre; tampoc no és senzill demostrar que un nombre no es pot expressar com una fracció de nombres enters.

Com es pot demostrar que $\sqrt{2}$ no és un nombre racional?

> La demostració que $\sqrt{2}$ (i en general qualsevol arrel d'un nombre primer) no és un nombre racional no és senzilla, però permet comprovar que, efectivament, hi ha nombres que no són racionals. En general, totes les arrels de nombres primers són irracionals.

La prova que l'arrel quadrada de 2 és irracional s'inicia suposant el contrari, és a dir, que $\sqrt{2}$ és un nombre racional. Veurem al final de la demostració que aquesta suposició és absurda (amb la qual cosa no quedarà cap dubte de la irracionalitat d'aquest nombre).

Així, doncs, comencem suposant que aquest nombre és racional: dit d'una altra manera, que es pot expressar com una fracció irreductible. És a dir, $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ de manera que a , b són nombres naturals i que el mcd(a, b) = 1.

El quadrat de $\sqrt{2}$ és, evidentment, 2; així, doncs, $2 = a^2/b^2$. Si es multipliquen ambdós costats d'aquesta igualtat per b^2, obtenim $2b^2 = a^2$.

En descompondre el nombre $2b^2$, obtindrem com a mínim un 2 (si no més). Per tant, com que a^2 ha de ser igual a $2b^2$, també la descomposició de a^2 haurà de contenir un 2. En altres paraules, hi ha d'haver un nombre a' de manera que $a = 2a'$. Per tant, $a^2 = (2a')^2 = 4a'^2$.

Recopilem aquestes dues informacions:

$$2b^2 = a^2 = 4a'^2$$

Així, doncs, $2b^2 = 4a'^2$; simplificant, $b^2 = 2a'^2$.

De manera similar a com s'acaba de fer per a a, existeix un nombre b' que compleix que $b = 2b'$. Així, doncs, de la mateixa manera que abans, $b^2 = (2b'^2) = 4b'^2$.

Hem arribat a la conclusió que:

d'una banda, $a = 2a'$

per l'altra, $b = 2b'$

llavors, a i b tenen un divisor comú: el 2. Però aquest fet no és possible: havíem afirmat que a i b havien de ser primers entre si, és a dir, que el mcd(a, b) = 1.

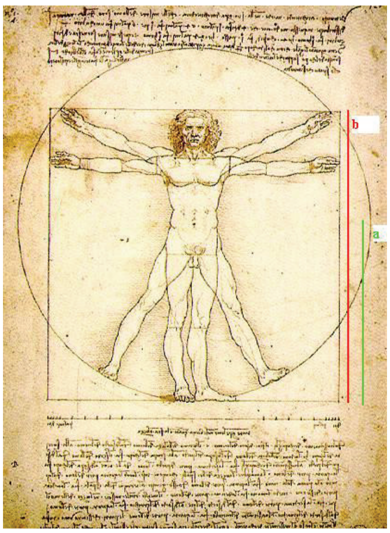
En definitiva, és absurd suposar que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, essent a i b primers entre si, ja que aquesta suposició ens duu a la conclusió que a i b mai no poden ser primers entre si. Aquest fet demostra que $\sqrt{2}$ no pot ser un nombre racional. Així, doncs, ha de ser un nombre irracional.

Es podria generalitzar aquest fet a qualsevol arrel d'un nombre primer, és a dir, es podria demostrar de manera semblant que tot nombre de la forma $\sqrt{p}$, amb p un nombre natural primer, és irracional.

Hi ha nombres irracionals que no siguin arrels?

> Les arrels de nombres primers no són els únics irracionals que hi ha; de fet, el nombre d'irracionals és infinit, superior fins i tot al de racionals, encara que la seva designació és difícil, ja que no es poden escriure en la forma decimal habitual.

Leonardo da Vinci, en el dibuix *L'home de Vitrubi*, que representa un home dintre d'un cercle i un quadrat, ha volgut representar la secció àuria: el quocient entre l'altura total de l'home (b) i l'altura fins al melic (a) és, aproximadament, la raó àuria, un nombre irracional.



En general, la major part de les arrels (de qualsevol índex) de qualsevol nombre racional és irracional. Però no s'acaben aquí els nombres irracionals perquè hi ha multitud de nombres irracionals que tampoc no es poden expressar com una arrel d'un nombre racional. Entre aquests nombres es troba el nombre denominat *pi,* a partir de la lletra de l'alfabet grec que el representa, π. El nombre π indica quantes vegades més gran és la longitud de la circumferència en relació amb el seu diàmetre, i la seva forma decimal és:

π = 3,14159265358979323846264338327950288419 72...

L'aproximació per les deumil·lèsimes és $\pi \approx 3{,}1416$.

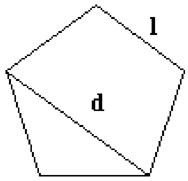
Un altre nombre irracional molt important és el denominat nombre e, el valor del qual és:

e = 2,71828182845904523536028747135266 24...

Es pot observar que els nombres irracionals coneguts, a part de les arrels, es designen amb una lletra (o fins i tot amb una expressió alfabètica, o amb el nom del seu descobridor, o amb el nom que la comunitat científica decideixi); això és fàcilment comprensible, ja que aquests nombres no es poden expressar de cap altra forma coneguda: ni mitjançant una expressió decimal (ni fraccionària), ni com a arrel.

És interessant conèixer l'origen d'alguns d'aquests nombres:

- La secció àuria o divina proporció, ϕ , és un nombre conegut des de molt antic per a expressar diferents relacions entre



elements de certes figures geomètriques. Per exemple, la relació entre la diagonal d'un pentàgon regular i un dels seus costats és igual a la secció àuria. La relació d/l d'un pentàgon regular és igual a ϕ. L'arquitectura grega és plena de temples que semblen tenir relació amb la secció àuria: el quocient entre el costat més llarg i el més curt de la seva base se sol acostar moltíssim a aquest nombre. Numèricament, la raó àuria es pot calcular de manera senzilla: $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

- La constant de Brun és la suma dels inversos de tots els primers bessons, és a dir, dels nombres primers de la forma p i $p + 2$. Es tracta de trobar aquesta suma:

$$B = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right)+\left(\frac{1}{29}+\frac{1}{31}\right)+\ldots$$

Brun va demostrar el 1919 que la suma de tots els primers bessons és un nombre, encara que no es pot assegurar amb total certesa que sigui un nombre irracional.

- La constant de Catalan (cognom del matemàtic belga del segle XIX Eugène Catalan), G, és la suma/resta alternada de la inversa de tots els nombres senars:

$$G = \frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}-\frac{1}{15^2}\ldots$$

Hi ha matemàtics que s'han dedicat a buscar el màxim nombre de xifres decimals possible d'alguns d'aquests nombres irracionals, amb el recurs de potents ordinadors i programes. En la taula següent es presenten alguns dels nombres irracionals més famosos, amb els seus primers dígits decimals, el màxim nombre de xifres decimals calculades, juntament amb el nom de qui les va trobar i la data (en molts casos no s'ha demostrat encara que es tracta de nombres irracionals, tot i que s'intueix que sí).

Nombres	Primers dígits	Xifres calculades	Qui i en quin any
Constant de Brun	1,902160582...	9	*T. Nicely – 1999* & *P. Sebah – 2002.*
Gauss–Kuzmin–Wirsing	0,30366300289873265...	468	*K. Briggs – 2003.*
Constant d'Artin	0,37395581361920228...	1.000	*G. Niklasch – 1999.*
Fransén-Robinson	2,80777024202851936...	1.025	*P. Sebah – 2001.*
Constant dels primers bessons	0,66016181584686957...	5.020	*P. Sebah – 2001.*
Constant de Khintchine	2,68545200106530644...	110.000	*X. Gourdon – 1998.*
Γ(13)	2,67893853470774763...	16.693.288	*S. Spännare – 2003.*
Γ(14)	3,62560990822190831...	51.097.000	*P. Sebah & M. Tommila – 2001.*
Constant d'Euler γ	0,57721566490153286...	108.000.000	*P. Demichel & X. Gourdon – 1999.*
Constant de Catalan G	0,91596559417721901...	201.000.000	*X. Gourdon & P. Sebah – 2002.*
Log 2.	0,69314718055994530...	600.001.000	*X. Gourdon & S. Kondo – 2002.*
ζ(3)	1,20205690315959428...	1.000.000.000	*P. Demichel – 2003.*
Secció àuria ϕ	1,61803398874989484...	3.141.000.000	*X. Gourdon & P. Sebah – 2002.*
e	2,71828182845904523...	50.100.000.000	*X. Gourdon & S. Kondo – 2003.*
√2.	1,41421356237309504...	137.438.953.444	*I. Kanada & D. Takahashi – 1997.*
π	3,14159265358979323...	1.241.100.000.000	*I. Kanada – 2002.*

Font: http://numbers.computation.free.fr/Constants/constants.html

En la pràctica, se sol utilitzar una aproximació decimal (per arrodoniment) de qualsevol nombre irracional, amb el nombre suficient de decimals segons la situació real en la qual ens trobem. Por exemple, aquestes són les aproximacions fins a la deumil·lèsima d'alguns nombres irracionals (suficient en la majoria de càlculs):

$\sqrt{2} \simeq 1{,}4142$

$\sqrt{3} \simeq 1{,}7321$

$\sqrt{5} \simeq 2{,}2361$

$\pi \cong 3{,}1416$

$i \simeq 2{,}7183$

$\phi \cong 1{,}618$

Així, doncs, qualsevol nombre irracional es pot aproximar per un nombre racional (en forma decimal, principalment), de manera que el nombre racional es trobi tan a prop del nombre irracional com es vulgui.

Què és la notació científica i per a què serveix?

> La notació científica és la forma habitual d'escriure els nombres, racionals o irracionals, en les disciplines científiques, especialment aquelles que fan servir nombres molt grans, o que usen nombres molt petits. Bàsicament, la notació científica permet evitar el gran nombre de zeros que requereixen alguns nombres.

Moltes ciències requereixen nombres molt grans o inusualment petits: l'astronomia, per exemple, necessita treballar amb nombres grans perquè també són immenses les distàncies amb què treballa; en canvi, la física de partícules, com que investiga ens diminuts, utilitza nombres molt petits. Per a evitar nombres d'aquest tipus:

1403400000000000000000000000000000000000000 , o bé,

0,000000000000000000000000000000000874.

es requereix una notació més compacta i eficient: la notació científica. Els nombres anteriors s'escriurien amb notació científica de la manera següent:

$1,4034 \cdot 10^{42}$

$8{,}74 \cdot 10^{-34}$

Es pot observar que l'expressió es descompon en dues parts:

1. Un nombre decimal el valor absolut del qual és més gran o igual a 1, i menor que 10, denominat *mantissa.*
2. Una potència de deu (de vegades anomenada, simplement, *exponent*).

El producte d'ambdós nombres ha de coincidir amb el nombre en qüestió. Es pot observar que aquesta forma d'escriure un nombre evita els zeros innecessaris; la informació de quants 0 s'han de posar es troba en l'exponent. Així, doncs:

- Per a expressar un nombre en notació decimal, s'ha de trobar la primera xifra diferent de zero, per l'esquerra del nombre.
    - La mantissa serà igual a un nombre la xifra de les unitats del qual és precisament aquesta, i les següents formen la seva secció decimal (evitant posar zeros innecessaris). Per exemple, la mantissa del nombre 0,000000000000323 és 3,23; la mantissa del nombre 180200000000000 és 1,802.
    - L'exponent de la potència de 10 és igual al nombre de xifres del nombre menys un, si el nombre no té decimals (el nombre és molt gran); per exemple, $180200000000000 = 1{,}802 \cdot 10^{14}$. En canvi, si

es tracta d'un nombre amb decimals (el nombre és molt petit), l'exponent és negatiu i és igual, en valor absolut, al nombre de zeros del nombre; per exemple, 0,000000000000323 = $3{,}23 \cdot 10^{-13}$. En tot cas, l'exponent compleix les regles habituals de potenciació.

- El pas de la notació científica a la usual és, també, molt senzill.
    - Si l'exponent és negatiu, s'ha de desplaçar la coma decimal de la mantissa cap a l'esquerra, tantes posicions com indiqui el nombre de l'exponent (sense signe), afegint-hi punts 0 com sigui necessari. Per exemple,

      $$1{,}032 \times 10^{-9} = 0{,}\underbrace{000000001}_{\text{9 posicions}}032$$

    - Si l'exponent és positiu, s'ha de desplaçar la coma decimal de la mantissa cap a la dreta, tantes posicions com indiqui l'exponent, afegint-hi els 0 que calgui. Per exemple.

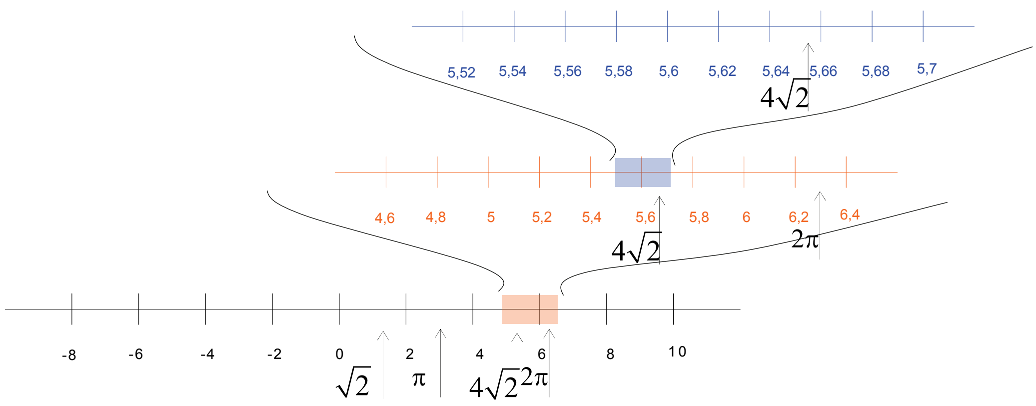
      $$5{,}201 \times 10^{11} = 5\underbrace{20100000000}_{\text{11 posicions}}$$

Què és un nombre real?

> Al conjunt de tots els nombres, racionals i irracionals, se l'anomena *conjunt dels nombres reals*, i qualsevol nombre, sigui del tipus que sigui, es troba dintre d'aquest conjunt.

Tots els nombres, racionals o irracionals, formen part del denominat conjunt de nombres reals. El nombre 1/3 és un nombre real que és racional, mentre que el nombre π és un nombre real que és irracional.

Els nombres reals estan ordenats de més petit a més gran, igual que tots els nombres analitzats fins ara. Així, es poden representar els nombres reals en una recta, denominada *recta real*. El fet que hi hagi molts més nombres irracionals que racionals dóna una idea dels "buits" que hi ha en la representació dels nombres racionals en una recta. Això no passa amb els nombres reals: la recta real està completament plena de nombres reals, és a dir, cada punt de la recta es correspon amb un nombre real.

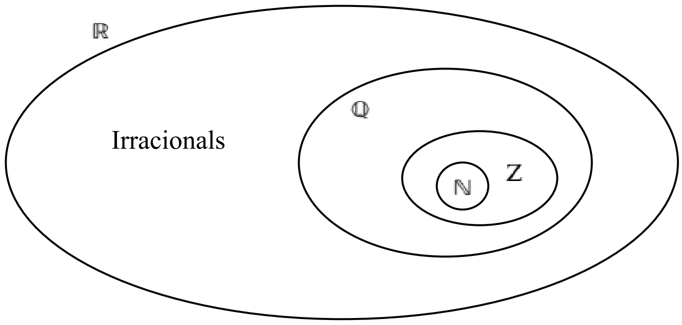


El conjunt de tots els nombres reals se simbolitza amb $\mathbb{R}$. A més, cadascun dels conjunts numèrics estudiats també es designa amb un símbol: $\mathbb{N}$ designa el conjunt de nombres naturals; $\mathbb{Z}$ designa el conjunt de nombres enters i $\mathbb{Q}$ designa el conjunt de nombres racionals.

Els diferents conjunts de nombres (naturals, enters, racionals i reals) mantenen relacions d'inclusió. És a dir, el conjunt dels nombres naturals es troba inclòs dintre del conjunt de nombres enters; aquest, al seu torn, es troba inclòs en el conjunt de nombres racionals; finalment, aquest últim està inclòs en el conjunt de nombres reals. Per a assenyalar relacions d'inclusió es fa servir el símbol $\subset$, que indica que el conjunt que se situa a la seva esquerra està inclòs en el conjunt que se situa a la seva dreta.

Així, doncs: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Aquesta representació gràfica mostra la relació d'inclusió entre els diferents conjunts numèrics.



Quines són les operacions bàsiques entre nombres reals i quines són les seves propietats?

> Les operacions bàsiques entre nombres reals són la suma, la resta, la multiplicació, la divisió i la potenciació/radicació. Aquestes operacions tenen les mateixes propietats que les operacions entre nombres racionals.

Les operacions bàsiques entre nombres reals són la suma i la multiplicació. La resta i la divisió es defineixen a partir de la suma i de la multiplicació. Amb aquesta finalitat, cal definir uns elements especials:

- L'element neutre de la suma és el 0, la propietat principal del qual és: si a és un nombre real, $a + 0 = 0 + a = a$.

- L'element neutre de la multiplicació és l'1, la propietat principal del qual és: si a és un nombre real, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

A partir d'aquests elements, es poden definir:

- L'oposat de qualsevol nombre real a, que és $-a$, i que compleix: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

- L'invers de qualsevol nombre real a (excepte el 0), que és $1/a$, i que compleix $a \cdot 1/a = 1/a \cdot a = 1$.

A partir d'aquests elements, es poden definir:

- La resta de dos nombres és igual a la suma amb l'oposat. És a dir, si a, b són nombres reals: $a - b = a + (-b)$.

- La divisió de dos nombres és igual a la multiplicació amb l'invers. És a dir, si *a, b* són nombres reals, i $b \neq 0$, $\dfrac{a}{b} = a \times \dfrac{1}{b}$.

Els nombres reals tenen les propietats següents, essent *a, b* i *c* nombres reals qualssevol:

- Pel que fa a la suma:
  Propietat commutativa: $a + b = b + a$
  Propietat associativa: $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$
- Pel que fa al producte:
  Propietat commutativa: $a \cdot b = b \cdot a$
  Propietat associativa: $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Propietat distributiva del producte respecte de la suma:
  $a \cdot (b + c) = (b + c) \cdot a = a \cdot b + a \cdot c.$

La potenciació de nombres reals es defineix així (sempre que sigui possible): si *a* és un nombre real, *n* i *m* són nombres enters,

$$a^{-n} = 1/a^n \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

i compleix les propietats següents, essent *r* i s nombres racionals:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$a^r : a^s = a^{r-s}$$

$$\left(a^r\right)^s = a^{r \cdot s}$$

$$\left(a \cdot b\right)^r = a^r \cdot b^r$$

$$\left(a : b\right)^r = a^r : b^r$$

$$a^0 = 1 \quad \text{sempre que} \quad a \neq 0$$

$$a^1 = a$$