Potències i arrels

Potències i arrels

$$\text{Potència} \quad \xleftrightarrow[\textit{inverses}]{\textit{operacions}} \quad \text{Arrel}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{base}}}{7}^{\overset{\text{exponent}}{\downarrow}\,3} = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343 \qquad \rightarrow \qquad \sqrt[\overset{\text{índex}}{\downarrow}\,3]{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{base}}}{343}} = 7$$

Per a unificar ambdues operacions, es defineix la potència d'exponent fraccionari:

$$a^{b/c} = \sqrt[c]{a^b}$$

Característiques especials de les potències i les arrels, segons el tipus de nombres:

- Nombres naturals

Potències	**Arrels**
• Base i exponent són nombres naturals.	• Índex i base són nombres naturals.

- Nombres enters

Potències	**Arrels**
• Base i exponent són nombres enters.	• Base entera i índex natural. • Si l'índex és parell, la base ha de ser positiva.

- Nombres racionals

<table>
<tr><th>Potències</th><th>Arrels</th></tr>
<tr><td colspan="2">• Base i exponent són nombres fraccionaris.
• Índex i exponent són inversos.
• La base ha de ser positiva si el denominador de l'exponent és parell.</td></tr>
</table>

Propietats de les potències (i arrels)

En general, les propietats de les potències (i arrels) d'un nombre racional es poden enunciar així, essent *a, b*, *p*, *q* nombres racionals:

- La potència d'exponent 1 és igual a la base

$$a^1 = a$$

- El producte de potències amb la mateixa base

Per a multiplicar potències amb la mateixa base, n'hi ha prou de sumar els exponents, deixant la base sense modificacions.

$$a^p \times a^q = a^{p+q}$$

- El quocient de potències de la mateixa base

Per a dividir potències amb la mateixa base, n'hi ha prou de restar els exponents, deixant la base sense modificacions.

$$a^p : a^q = a^{p-q}$$

- La potència d'exponent 0 és igual a 1

Qualsevol potència (amb base distinta del 0) d'exponent 0 resulta sempre igual a

$$a^0 = 1$$

- La potència d'una potència

El resultat d'elevar una potència qualsevol a un altre exponent és igual a una potència que té per base la base de la potència, i l'exponent de la qual és el producte d'exponents

$$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$$

- El producte de potències amb el mateix exponent

El resultat de multiplicar diferents potències amb el mateix exponent és igual a una potència la base de la qual és el producte de les bases, i l'exponent és l'exponent comú.

$$a^p \times b^p = (a \times b)^p$$

- El quocient de potències amb el mateix exponent

El resultat de dividir dues potències amb el mateix exponent és igual a una potència la base de la qual és el quocient de les bases, i l'exponent és l'exponent comú.

$$a^p : b^p = (a : b)^p$$

Com es fa la potenciació de nombres i quines són les seves propietats?

> Encara que la potenciació es fa de la mateixa manera per a qualsevol nombre, cada tipus de nombre té unes característiques especials que requereixen una atenció especial. Les propietats bàsiques de la potenciació es donen per als nombres naturals, però es poden estendre a la resta de nombres.

Com és sabut, quan es té una expressió amb un grup de multiplicacions amb els mateixos factors, per a abreujar-la es pot fer servir una potència. Per exemple: $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5$. Es pot observar que la potència està formada per dos nombres:

- La base de la potència, que és el nombre repetit en la multiplicació. En l'exemple, la base és 7.
- L'exponent de la potència, que indica el nombre de vegades que es repeteix la base en la multiplicació. En l'exemple, l'exponent és 5, perquè el 7 es repeteix 5 vegades.

Per a designar una potència s'usa el terme *elevat a*. En l'exemple, 7^5 es llegeix "set elevat a cinc", o fins i tot, "set elevat a la cinquena potència", excepte en dos casos: si l'exponent és 2, s'utilitza el terme *al quadrat* (per exemple, 8^2 es llegeix "vuit al quadrat"); i si l'exponent és 3, s'utilitza el terme *al cub* (per exemple, 5^3 es llegeix "cinc al cub").

Per a simplificar els càlculs amb potències, és útil utilitzar aquestes propietats:

- La potència d'exponent 1
  El resultat d'una potència d'exponent 1 és igual a la base. Per exemple,
  $5^1 = 5$
- El producte de potències de la mateixa base
  Per a multiplicar potències amb la mateixa base, n'hi ha prou de sumar els exponents, deixant la base sense modificacions. Per exemple,
  $3^4 \cdot 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$. Això és així perquè
  $3^4 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$
- El quocient de potències de la mateixa base
  Per a dividir potències amb la mateixa base, n'hi ha prou de restar els exponents, deixant la base sense modificacions. Per exemple, $7^6 : 7^4 = 7^2$. Això és així perquè
  $7^6 : 7^4 = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) : (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) = 7 \cdot 7 = 7^2$
- La potència d'exponent 0
  Qualsevol potència (amb base diferent del 0) d'exponent 0 resulta sempre igual a 1. Això és així perquè, per exemple, seguint la propietat anterior,
  $9^0 = 9^{3-3} = 9^3 : 9^3 = 1$
- Potència d'una potència
  El resultat d'elevar una potencia qualsevol a un altre exponent és igual a una potència que té per base la base de la potència, i l'exponent de la qual és el producte d'exponents. Per exemple, $(5^4)^3 = 5^{4 \cdot 3} = 5^{12}$, ja que
  $(5^4)^3 = 5^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4 = 5^{4+4+4} = 5^{12}$
- Producte de potències amb el mateix exponent
  El resultat de multiplicar diverses potències amb el mateix exponent és igual a una potència la base de la qual és el producte de bases, i l'exponent és l'exponent comú. Per exemple, $8^3 \cdot 5^3 = (8 \cdot 5)^3 = 40^3$, ja que
  $8^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = (8 \cdot 5) \cdot (8 \cdot 5) \cdot (8 \cdot 5) = (8 \cdot 5)^3 = 40^3$

- Quocient de potències amb el mateix exponent
  El resultat de dividir dues potències amb el mateix exponent és igual a una potència la base de la qual és el quocient de bases, i l'exponent és l'exponent comú. Per exemple, $12^5 : 3^5 = (12 : 3)^5 = 4^5$, ja que
  $12^5 : 3^5 = (12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12) : (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) =$
  $= (4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3) : (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) =$
  $= 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$

Quines són les característiques de la potenciació de nombres enters?

> Les regles de la multiplicació de signes d'un nombre enter permeten establir una manera senzilla de trobar el signe d'una potència d'un nombre enter. A més, s’ha de tenir cura a expressar correctament la potència (amb o sense parèntesi, segons quin sigui el cas) per a evitar errors en el resultat.

Igual que en els nombres naturals, l'ús de potències en els nombres enters és una manera d'abreujar un producte reiterat d'un mateix nombre. Per exemple:

$$(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-3)^4$$

Ara bé, és imprescindible en aquest cas posar-hi el parèntesi perquè l'exponent afecta tant el nombre com el signe. En cas contrari, no s'estaria indicant la mateixa operació, és a dir:

$$-3^4 = -3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

o sigui, l'exponent només afecta el nombre i no el signe.

Per a establir el signe de la potència d'un nombre enter, s’han de tenir en compte el signe del nombre i la potència:

- Si el signe del nombre és positiu, el nombre resultant serà positiu. Per exemple, $(+2)^3 = 2^3$.
- Si el signe del nombre és negatiu, el nombre resultant:
  - serà positiu si l'exponent és parell. Per exemple, $(-2)^4 = 2^4$, ja que el producte de 4 vegades un nombre negatiu és positiu;
  - serà negatiu si l'exponent és senar. Per exemple, $(-2)^5 = -2^5$, ja que el producte de 5 vegades un nombre negatiu és negatiu.

Quines són les característiques de la potenciació de nombres fraccionaris?

> En el cas de les fraccions, cal destacar que l'exponent també pot ser un nombre negatiu.

La potència d'una fracció és igual a una altra fracció amb el mateix numerador i denominador, però elevats a l'exponent de la potència. Així, per exemple:

$$\left(\frac{7}{5}\right)^3 = \frac{7^3}{5^3}$$

Es pot definir, a més, una potència amb exponent negatiu, que és igual a l'invers de la mateixa potència amb exponent positiu. Per exemple,

$$\left(\frac{7}{9}\right)^{-6} = \frac{1}{\left(\frac{7}{9}\right)^{6}}$$

Les propietats de la potenciació de nombres enters i naturals s'apliquen de la mateixa manera a la potenciació de fraccions, fins i tot en el cas d'exponents negatius.

Com se simplifica una expressió amb potències del tipus $\frac{25 \cdot 8 \cdot 7^7 \cdot 5^4}{3^5 \cdot 25^2 \cdot (-5)^3 .49^3}$?

> Per a simplificar una expressió amb potències s'han d'aplicar les propietats de les potències fins a obtenir una fracció irreductible.

Per a simplificar qualsevol expressió, s'han d'aplicar les propietats de les potències amb la finalitat d'agrupar les potències amb la mateixa base i, posteriorment, eliminar les potències repetides tant en el numerador com en el denominador. Així, per a simplificar aquesta expressió, s'ha de fer el següent:

Només es poden simplificar factors iguals del numerador i denominador quan en tots dos (numerador i denominador) només hi ha multiplicacions, **mai amb sumes**.

$$\frac{25 \cdot 8 \cdot 7^7 \cdot 5^4}{3^5 \cdot 25^2 \cdot (-5)^3 .49^3} \underset{\uparrow}{=} -\frac{2^3 \cdot 7^7 \cdot 5^6}{3^5 \cdot 5^7 \cdot 7^6} \underset{\uparrow}{=}$$

Descomponem cadascun dels factors, tant del numerador com del denominador. Es treu fora el signe del denominador, perquè és negatiu

Ordenem els factors, i dels que tenen base comú, descomponem el que té exponent més gran

$$= -\frac{2^3 \cdot \cancel{5^6} \cdot \cancel{7^6} \cdot 7}{3^5 \cdot \cancel{5^6} \cdot 5 . \cancel{7^6}} \underset{\uparrow}{=} -\frac{2^3 \cdot 7}{3^5 \cdot 5}$$

Simplifiquem els factors comuns al numerador y al denominador

El resultat final també pot expressar-se com $-2^3 \cdot 7 \cdot 3^{-5} \cdot 5^{-1}$

Què és i com es calcula l'arrel d'un nombre?

> La radicació és una operació oposada a la potenciació; per a calcular-la, s'ha de tenir en compte el signe del nombre perquè no hi ha l'arrel d'índex imparell d'un nombre negatiu.

De la mateixa manera que la diferència és l'operació oposada a la suma, i la divisió és l'operació oposada a la multiplicació, la radicació és l'operació oposada a la potenciació. Els tipus més importants de radicació són:

- L'arrel quadrada
  Es tracta en aquest cas de l'operació oposada a “elevar al quadrat”. Usa el signe $\sqrt{\ }$, o signe radical, amb el nombre a l’interior. Per exemple, com que 5 al quadrat és 25, llavors, l'arrel quadrada de 25 és igual a 5

  $5^2 = 25$ ——> $\sqrt{25} = 5$,

  i es llegeix “l'arrel quadrada de 25 és 5”; de la mateixa manera,

  $7^2 = 49$ ——> $\sqrt{49} = 7$

  $11^2 = 121$ ——> $\sqrt{121} = 11$, etc.

  Al nombre que es troba en l'interior del signe radical se l’anomena *radicant.* Al resultat, de vegades, se l’anomena, simplement, *arrel.*

- L'arrel cúbica
  L'arrel cúbica és l'operació oposada a “elevar al cub”. Fa servir el signe $\sqrt[3]{\ }$, amb el nombre a l’interior. En aquest cas, es diu que el 3 (que es troba a la part superior del signe) és l'índex de l'arrel. Per exemple, com que 5 al cub és igual a 125, llavors, l'arrel cúbica de 125 ha de ser igual a 5:

  $5^3 = 125$ ——> $\sqrt[3]{125} = 5$,

  i es llegeix “l'arrel cúbica de 125 és 5”; de la mateixa manera,

  $2^3 = 8$ ——> $\sqrt[3]{8} = 2$, etc.

De manera similar a l'arrel cúbica, es poden fer arrels de diferents índexs. Així, per exemple,

- L'arrel d'índex 4, o més breument, l'arrel quarta, de 625 és 5 ($\sqrt[4]{625} = 5$), ja que $5^4 = 625$.
- L'arrel d'índex 5, o més breument, l'arrel cinquena, de 32 és 2 ($\sqrt[5]{32} = 2$), ja que $2^5 = 32$.

En el cas dels nombres negatius, s’ha de tenir en compte que no és possible calcular l'arrel d'índex parell. Per exemple, l'expressió $\sqrt{-4}$ és incorrecta perquè no hi ha cap nombre enter el quadrat del qual sigui –4; en general, no existeix cap nombre el quadrat del qual sigui un nombre negatiu.

En el cas dels nombres fraccionaris, la seva arrel també és fàcil de calcular:

$$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \qquad \text{perquè} \qquad \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

En tot cas, l’arrel d'una fracció sempre es pot expressar com una fracció d'arrels. Per exemple, $\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{3}{5}$.

Tota arrel es pot expressar, també, com una potència l'exponent de la qual és un nombre fraccionari igual a l'invers de l'índex. Per exemple, $\sqrt{16} = 16^{\frac{1}{2}}$, o també, $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}}$. D'aquesta manera, es pot expressar conjuntament l'arrel d'una potència. Per exemple: $\sqrt[3]{27^2} = \left(27^2\right)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{2}{3}}$. És a dir, l'arrel d'una potència és igual a una potència l'exponent de la qual és una fracció, de numerador igual al de la potència i de denominador igual a l'índex de l'arrel. Un altre exemple:

$$\sqrt[4]{\left(\frac{16}{81}\right)^{-3}} = \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{-3}{4}}$$

Quines són les propietats bàsiques de la radicació?

> Les propietats de la radicació i de la potenciació són exactament les mateixes, ja que sabem que ambdues operacions es poden expressar en forma de potència d'exponent fraccionari.

Si una arrel (o una potència i una arrel), s'expressa en forma de potència d'exponent fraccionari, les propietats bàsiques són les mateixes que les propietats de les potències:

- El resultat d'una potència d'exponent 1 és igual a la base. Per exemple, $(-3)^1 = -3$.
- Per a multiplicar potències amb la mateixa base se sumen els exponents, deixant la base sense modificacions. Per exemple:

$$\left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}} \times \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{11}{4}} = \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}+\frac{11}{4}} = \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{21}{4}}$$

- Per a dividir potències amb la mateixa base s'han de restar els exponents, deixant la base sense modificacions. Per exemple:

$$\left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}} : \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{11}{4}} = \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}-\frac{11}{4}} = \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{-1}{4}}$$

- La potència d'exponent 0 (amb base distinta del 0) resulta sempre igual a 1.
- El resultat d'elevar una potència qualsevol a un altre exponent és igual a una potència que té per base la base de la potència, i l'exponent de la qual és el producte d'exponents. Per exemple:

$$\left(\left(\frac{64}{729}\right)^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{64}{729}\right)^{\frac{7}{3}\times\frac{3}{2}} = \left(\frac{64}{729}\right)^{\frac{21}{6}}$$

- El resultat de multiplicar diverses potències amb el mateix exponent és igual a una potència la base de la qual és el producte de bases, i l'exponent és l'exponent comú. Per exemple:

$$\left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}} \times \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{8}{81}\times\frac{25}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{200}{324}\right)^{\frac{5}{2}}$$

- El resultat de dividir dues potències amb el mateix exponent és igual a una potència la base de la qual és el quocient de bases, i l'exponent és l'exponent comú. Per exemple:

$$\left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}} : \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{8}{81}:\frac{25}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{32}{2025}\right)^{\frac{5}{2}}$$

Com es poden expressar de manera general les propietats de les potències i arrels?

> Per a expressar les propietats de les potències de manera general, és molt útil indicar la base i l'exponent amb lletres, que representen un nombre racional qualsevol.

Si la base i l'exponent d'una potència s'expressen amb una lletra, les propietats de les potències es poden expressar així, de manera general:

- La potència d'exponent 1 és igual a la base
  $a^1 = a$
- El producte de potències amb la mateixa base
  Per a multiplicar potències amb la mateixa base, n'hi ha prou de sumar els exponents, deixant la base sense modificacions:
  $a^p \times a^q = a^{p+q}$
- El quocient de potències de la mateixa base
  Per a dividir potències amb la mateixa base, n'hi ha prou de restar els exponents, deixant la base sense modificacions:
  $a^p : a^q = a^{p-q}$
- La potència d'exponent 0 és igual a 1
  Qualsevol potència (amb base distinta del 0) d'exponent 0 resulta sempre igual a
  $a^0 = 1$
- La potència d'una potència
  El resultat d'elevar una potència qualsevol a un altre exponent és igual a una potència que té per base la base de la potència, i l'exponent de la qual és el producte d'exponents
  $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$
- El producte de potències amb el mateix exponent
  El resultat de multiplicar diferents potències amb el mateix exponent és igual a una potència la base de la qual és el producte de les bases, i l'exponent és l'exponent comú.
  $a^p \times b^p = (a \times b)^p$
- El quocient de potències amb el mateix exponent
  El resultat de dividir dues potències amb el mateix exponent és igual a una potència la base de la qual és el quocient de les bases, i l'exponent és l'exponent comú.
  $a^p : b^p = (a : b)^p$

S'ha de tenir en compte que aquestes propietats són correctes sempre que a, b, p, q siguin nombres racionals correctes per a l'operació que s'ha de fer. Per exemple, en el cas de la potència d'exponent 0, la base no pot ser 0; en el cas dels exponents, sabem que no poden tenir el denominador parell si la base és negativa (perquè no existeix l'arrel d'índex parell d'un nombre negatiu).

Finalment, s'ha d'anar en compte a l'hora d'aplicar d'aquestes propietats perquè de vegades es produeixen errors greus; per exemple, no és el mateix dir que el producte de potències sigui igual a la potència de la suma, que la suma de potències sigui igual a la potència del producte (això últim és fals). És a dir, no és cert que:

$$a^p + a^q = a^{p \cdot q}$$

Com se simplifica una expressió del tipus $\sqrt[\frac{3}{4}]{\sqrt[4]{\frac{8}{27}}}$?

> Per a simplificar una expressió amb arrels i potències, s'han de descompondre els nombres de la base i aplicar les propietats de les potències per a arribar a l'expressió més senzilla possible.

Per a simplificar $\sqrt[\frac{3}{4}]{\sqrt[4]{\frac{8}{27}}}$, s'han de seguir aquests passos:

$$\sqrt[\frac{3}{4}]{\sqrt[4]{\frac{8}{27}}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Es descompon} \\ \text{la base}}}{=} \sqrt[\frac{3}{4}]{\sqrt[4]{\frac{2^3}{3^3}}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Es transformen les} \\ \text{arrels en potències} \\ \text{de fracciones}}}{=} \left(\left(\frac{2^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3/4}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{S'operen els exponents} \\ \text{seguint les propietats} \\ \text{de les potències}}}{=} \left(\frac{2^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}} =$$

$$= \left(\frac{2^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{3}} = \frac{2}{3}$$

Què és la racionalització de fraccions?

> La racionalització d'una fracció consisteix en l'eliminació de les arrels del denominador per a obtenir una fracció equivalent.

No és usual deixar una fracció amb arrels en el denominador. Per això, és habitual eliminar-les, sempre que això sigui possible. A aquest procés se l'anomena *racionalització de la fracció*. Per a fer-lo és molt comú multiplicar numerador i denominador per alguna expressió que permeti eliminar les arrels del denominador. Un exemple de racionalització seria:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

En molts casos, també podem trobar-nos amb una suma o resta d'arrels en el denominador. En aquests casos, s'ha de multiplicar el denominador i el numerador per l'operació oposada, com es mostra en aquest exemple:

$$\frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{multipliquem} \\ \text{numerador i} \\ \text{denominador per} \\ \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}}{=} \frac{4\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)} = \frac{4\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5} =$$

$$= \frac{4\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{-2} = -2\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

Això és així perquè $\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 3-5 = -2$. I, en general, si *a i b* són dos nombres qualssevol, $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.