TREBALL DE RECERCA

Títol **Disseny d'Organitzacions Didàctiques per connectar les Matemàtiques del Batxillerat amb les del 1er cicle d'Economia i Empresa**

Realitzat per: Lidia Serrano Martínez

Dirigit per: Dra. Marianna Bosch Casabò
Dr. Josep Gascón Pérez

Barcelona, Gener 2007

Moltes gràcies a tots aquells que, durant la realització d'aquesta memòria m'heu aconsellat, animat i estimat. Tot ha estat vital per a la finalització d'aquest treball.

> "La lucha es como un círculo, se puede empezar en cualquier sitio, pero nunca termina".
>
> *Cuentos del Viejo Antonio*
> Subcomandante Marcos

ÍNDEX

Capítol 1. Discontinuïtats matemàtiques i didàctiques entre la Secundària i la Universitat

1.1. Les dificultats dels alumnes de matemàtiques en el pas de secundària a la universitat

En els darrers anys ha anat creixent la convicció social de que “alguna cosa no va bé” en l’ensenyament de les matemàtiques, tant a la Secundària com a la Universitat, degut a les grans dificultats amb què es troben els alumnes quan inicien els primers cursos universitaris. Sens dubte la generalització de l’ensenyament secundari i, correlativament, de l’ensenyament universitari[1] és un dels principals factors del canvi i, en conseqüència, del desajust que s’ha produït entre les dues institucions docents, acostumades en un passat a ensenyar només a una elit social molt seleccionada. Des de fa uns anys, la impressió que s’ha creat una fissura entre l’ensenyament secundari i l’universitari ha fet sorgir un nombre important d’estudis sobre el *problema de la transició secundària – universitat* (o ensenyament secundari – ensenyament terciari) relatius a la majoria de disciplines ensenyades: infermeria, medecina, dret, educació, física, ciències, matemàtiques, estadística, informàtica, geografia, economia, comptabilitat, administració i empresa.[2]

Així per exemple, trobem que, a països com Austràlia, Canadà, Xina, Mèxic, Regne Unit o França, on hem tingut accés a investigacions en aquest camp,[3] hi ha la mateixa preocupació que a l’estat Espanyol. Els estudis van en la línia que la Universitat en els darrers anys s’ha “obert a tothom”, és a dir, abans era per una elit intel·lectual i ara hi pot accedir qualsevol alumne de Secundària. Aquesta entrada massiva d’alumnes provoca un augment de la diversitat que el sistema d’ensenyament universitari no ha sabut assimilar. La universitat segueix bàsicament amb els mateixos plans d’estudi, metodologies didàctiques i sistemes d’avaluació que fa 50 anys, no s’ha fet una adaptació a la nova situació, ni els plans d’estudi han estat modificats en funció de la nova realitat.

[1] Segons dades estadístiques de la Unesco, a Europa, l’any 1970 hi havia una mica més de 9 milions de matriculats en la Universitat. A finals dels 90, aquesta xifra s’havia triplicat.
[2] Evans (2004) presenta un recull molt complet d’aquestes investigacions, abastant des dels estudis més genèrics (sociològics o pedagògics) fins als específics de les diferents disciplines ensenyades. Sorprèn veure que hi ha estudis sobre el problema de la transició Secundària – Universitat relatius a la majoria de disciplines ensenyades.
[3] Bloch i Ghedamsi (2004), Dong(2004), Evans(2004), Hoyles (2001), Kajander(2005) i Luk(2005).

Més concretament, a nivell espanyol, trobem que, des de la implantació de la darrera reforma educativa (LOGSE) amb l'extensió de l'ensenyament secundari fins als 16 anys s'ha generat una diversitat enorme en l'extensió i l'aprofundiment dels coneixements matemàtics dels alumnes que posteriorment iniciaran els seus estudis universitaris. Això ha provocat una disminució, moltes vegades conscient, dels nivells d'exigència matemàtica, tant a l'ensenyament secundari com universitari. La distància entre la nova secundària i la universitat s'està agreujant tant, que algunes universitats espanyoles proposen des de fa uns anys uns "cursos pont" per tal de facilitar la transició entre ambdues institucions. En aquesta línea, un matemàtic imminent com Miguel de Guzmán, reconegut arreu per la seva dedicació a la millora de l'ensenyament de les matemàtiques, advocava al diari "El País" sobre la necessitat de la "creació i generalització dels cursos pont en les universitats espanyoles":

> [...] Se te cae el alma a los pies cuando comparas cómo llegan ahora a cómo llegaban los estudiantes hace 10 años. Parece otro país. Antes, muchas cosas se daban por sabidas; ahora te das cuenta de que las más elementales no las saben y los primeros meses no se enteran de nada.[4]

Veiem doncs que la sensació de fracàs que ja estava força estesa entre els professors de secundària, va acabar arribant també als professors universitaris. I la universitat comença a reaccionar per tal d'intentar pal·liar el problema. En el cas de les matemàtiques, Degans i Directors de Matemàtiques van organitzar reunions regulars per abordar el tema.[5] Algunes de les conclusions a les que van arribar són les següents:

- Necessitat d'adaptar els plans d'estudi universitaris al nou perfil d'alumne que arriba de Secundària
- Intervenció per part de la comunitat matemàtica en la formació del professorat d'ensenyament secundari.
- Promoció de la investigació I+D en Didàctica de les Matemàtiques.

[4] "Los científicos proponen un acceso a la universidad por áreas de conocimiento" ("El País", 24 de setembre de 2001).
[5] Santiago de Compostela, 18 i 19 de Febrer de 2000; Barcelona, 28 i 29 de novembre de 2000 i Valladolid, 18 i 19 de setembre de 2001.

No pretenem, en aquest treball, analitzar el fenomen sociològic de la transformació massiva de l'alumnat universitari. Tampoc no volem entrar en el debat sobre l'adequació entre la realitat i la percepció que en tenen els propis actors que viuen aquest fenomen. El treball que aquí presentem parteix de la situació actual en la qual la universitat proposa "cursos pont" o, com els anomenarem nosaltres, "cursos propedèutics". En aquest estat de fets, ens proposem analitzar les possibles funcions "remediadores" d'aquests cursos, fer-ne una proposta didàcticament fonamentada, experimentar-la i avaluar-la empíricament. Per això partirem dels resultats obtinguts per Cecilio Fonseca en la seva tesi doctoral en didàctica de les matemàtiques titulada: "Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad".[6] En ella s'hi mostra que el bagatge de coneixements matemàtics amb què els alumnes de Secundària arriben a la universitat són un conjunt molt poc articulat de nocions i tècniques molt puntuals i rígides. S'esgrimeix llavors la necessitat de dissenyar, experimentar i avaluar nous dispositius didàctics per tal de superar el que anomena la *desarticulació del currículum de Matemàtiques de Secundària* i poder sobrepassar així les discontinuïtats detectades. Nosaltres proposarem, al final del nostre estudi experimental, que el remei via un "curs pont" no és una solució viable. El problema de fons és una pèrdua general de sentit de les matemàtiques que s'ensenyen als dos nivells educatius i, malgrat que les conseqüències més visibles apareixen en el pas de Secundària a la Universitat, calen també nous dispositius didàctics per superar la desarticulació del currículum *universitari* de matemàtiques.

La nostra recerca, al igual que el treball de Fonseca que prenem com a punt de partida, se situen en l'àmbit d'investigació conegut com l'enfocament antropològic en didàctica de les matemàtiques. Presentarem breument els fonaments i principals elements teòrics d'aquest àmbit abans de centrar-nos amb més detall en el problema esmentat de la desarticulació del currículum de matemàtiques i formular el problema general d'investigació que presentem aquí.

[6] Fonseca (2004).

1.2. El marc teòric: la Teoria Antropològica del Didàctic

En aquest apartat presentem les nocions bàsiques del marc teòric en el que ens situem: la Teoria Antropològica del Didàctic (TAD) iniciada per Chevallard a finals dels anys 80. Ho farem proposant una "reconstrucció històrica" de les evolucions dels diversos enfocaments en investigació en didàctica seguint la proposta de Gascón (1998), alhora que proposarem una interpretació de l'ampliació progressiva de la problemàtica didàctica que conflueix en la Teoria Antropològica del Didàctic.

1.2.1. La Didàctica de les Matemàtiques com a disciplina científica

Tradicionalment es considerava que l'ensenyament de les matemàtiques era un art i, en conseqüència, no estava sotmès a les regles de la pràctica científica.
El que caracteritza l'enfocament clàssic en didàctica de les matemàtiques és la suposició acrítica que el *coneixement matemàtic no és problemàtic*, que el problema rau en el seu ensenyament i aprenentatge, i que els sabers que s'utilitzen per descriure i interpretar els fets educatius (pedagogia, psicologia, sociologia, etc.) poden ser "aplicats" però no poden ser modificats com a conseqüència d'aquesta aplicació. A partir d'aquí, es poden distingir dos enfocaments successius en el desenvolupament de la problemàtica didàctica clàssica. El primer, centrat en l'*aprenentatge de l'alumne*, té com a objecte primari d'investigació el *coneixement matemàtic de l'alumne* i la seva evolució, delegant explícitament a la *psicologia* la fonamentació científica de la didàctica. El segon enfocament amplia la problemàtica didàctica introduint *qüestions relatives al professor i a la seva formació professional*. L'objecte primari d'investigació és, per tant, *l'activitat i el pensament del professor*. En aquest cas, es necessita una base multidisciplinar molt més amplia que inclogui, entre d'altres, la *psicologia educativa*, la *sociologia* i l'*epistemologia de les matemàtiques* per tal de fonamentar la investigació.

Segons Gascón (1998), un cop superada aquesta etapa pre-científica centrada en la problemàtica espontània de l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques, en la qual els problemes didàctics es formulen en els termes propis de la institució d'ensenyament considerada, és possible distingir dos programes d'investigació: el *programa cognitiu* i el *programa epistemològic* que, en disposar d'un marc teòric específic per a la descripció dels fenòmens didàctics, també proposen una manera pròpia de delimitar la realitat didàctica i formular els problemes que s'hi plantegen. Sense entrar gaire en detall, podem dir que el Programa Cognitiu d'investigació en didàctica de les matemàtiques accepta com a hipòtesis bàsica que els fenòmens relatius a l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques (i en particular, els fenòmens indesitjables relatius al denominat "fracàs escolar") poden ser explicats a partir de les característiques individuals dels subjectes (actitudinals, cognitives, motivacionals, psicològiques, lingüístiques, etc.) i que aquestes constitueixen la principal porta d'entrada per actuar sobre ells. La forma particular d'integrar "el pedagògic" i "el matemàtic" que es duu a terme en aquest programa es fa prenent com a objecte primari d'estudi l'*aprenentatge (i el coneixement) matemàtic de l'alumne.*

A principis dels anys 70, l'investigador francès Guy Brousseau, va veure la necessitat de crear un model propi, explícit i contrastable de l'activitat matemàtica que no es pot reduir a l'estudi dels processos cognitius dels alumnes. L'objecte d'estudi no és l'alumne sinó la *situació didàctica* per mitjà de la qual els alumnes aconsegueixen apropiar-se d'un *saber matemàtic específic* ja constituït o en vies de constitució. Es passa així a considerar el *procés d'ensenyament-aprenentatge en situació*, entenent-se per *situació didàctica* el conjunt de relacions establertes explícitament o implícitament entre els diversos elements que la composen:

- l'*alumne* o el grup d'alumnes,
- la interacció de l'alumne amb un *medi* format per un conjunt d'objectes i instruments *sense intenció didàctica,*
- el *professor* o "instància ensenyant", que proposa a l'alumne diferents situacions amb la intenció de fer que s'apropiïn d'un saber matemàtic.

Es constitueix així el naixement de la Teoria de les Situacions Didàctiques (TSD), la principal revolució de la qual va ser postular la necessitat d'una modelització explícita i contrastable del *saber matemàtic* (en termes de situacions). L'ampliació clau va ser el postulat de Brousseau (1986) de que *tot fenomen didàctic té un component matemàtic essencial*, la qual cosa comporta la problematització del coneixement matemàtic i la necessitat d'elaborar *models epistemològics* d'aquest coneixement *específics de la didàctica*. D'aquí que la didàctica de les matemàtiques que preconitza Brousseau també sigui coneguda com l'*aproximació epistemològica* o *programa epistemològic* en didàctica de les matemàtiques, en contraposició al programa cognitiu que citàvem anteriorment.

La necessitat d'estudiar les condicions de creació i difusió del coneixement matemàtic en les diferents institucions socials, des d'aquelles productores o creadores del coneixement, fins a les que l'utilitzen com a instrument, passant per les institucions més pròpiament didàctiques, és a dir, centrades en l'ensenyament de les matemàtiques, és el punt de partida de l'anomenat *enfocament antropològic* creat per l'investigador Yves Chevallard, alumne de Brousseau, a finals dels anys 80. Aquest enfocament, que suposa una ampliació de la problemàtica de la Teoria de les Situacions Didàctiques, neix amb les primeres teoritzacions sobre el procés de *transposició didàctica* (Chevallard 1985/1991), que posa de manifest que no és possible interpretar la *matemàtica* ni l'*activitat matemàtica* que s'estudia a l'escola sense tenir en compte fenòmens relacionats amb els processos de *(re)construcció de les matemàtiques* que tenen l'origen en la institució productora dels sabers matemàtics.

Sense voler entrar en detall aquí, només direm que la teoria de la transposició didàctica distingeix diferents tipus de "sabers" (figura 1) que intervenen en tots els processos d'ensenyament i aprenentatge:

- El "saber savi" o saber matemàtic tal com el produeix la comunitat científica;
- El "saber matemàtic a ensenyar" tal com és designat oficialment pels programes oficials i llibres o tractats per a l'ensenyament;
- El "saber matemàtic ensenyat" tal com és realment ensenyat pels professors a l'aula;
- El "saber matemàtic après" o construït pels alumnes al final del procés d'ensenyament-aprenentatge i que esdevé disponible per a nous processos d'estudi.

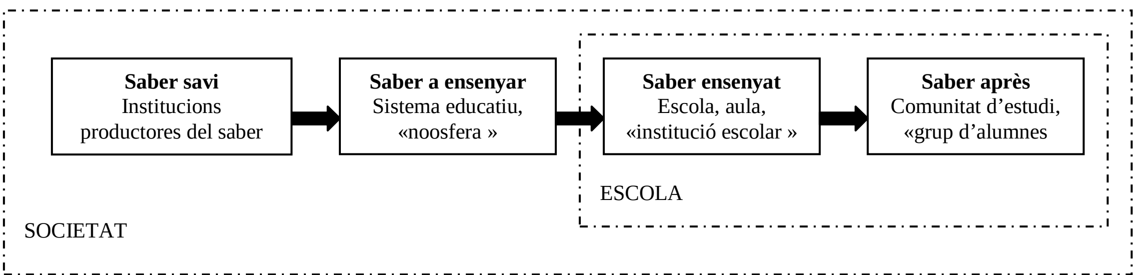


figura 1

Un cop posat en evidència el procés de transposició didàctica, amb la conseqüent ampliació de l'objecte d'estudi de la didàctica que això suposa, el que cal és disposar d'un model prou ric per poder descriure el saber matemàtic tant si se situa a la institució "sàvia" com si es tracta de la pràctica d'un estudiant universitari o d'un alumne de primària. En aquest punt el model de les situacions didàctiques proposat per Brousseau sembla plantejar dificultats importants i Chevallard introdueix la noció de *praxeologia* o d'*organització praxeològica* com a element bàsic per a la descripció del saber.

1.2.2. Com descriure l'activitat matemàtica: la noció d'organització matemàtica

Una de les nocions claus de la TAD és la noció d'"organització praxeològica" o "praxeologia matemàtica". Segons el mateix Chevallard (2006):

> Una praxeología es, de algún modo, la unidad básica en que uno puede analizar la acción humana en general. [...] ¿Qué es exactamente una praxeología? Podemos confiar en la etimología para guiarnos aquí –uno puede analizar cualquier acto humano en dos componentes principales interrelacionados: *praxis*, i.e. la parte práctica, por un lado, y el *logos*, por el otro. "*Logos*" es una palabra griega que, desde los tiempos pre-socráticos, ha sido utilizada constantemente para hacer referencia al pensamiento y razonamiento humano –particularmente sobre el cosmos. [...] [De acuerdo con] un principio fundamental de la TAD –la teoría antropológica de lo didáctico-, no pueden existir acciones humanas sin ser, al menos parcialmente, "explicadas", hechas "inteligibles", "justificadas", "contabilizadas", en cualquier estilo de "razonamiento" que pueda abrazar dicha explicación o justificación. La *praxis*, por tanto, implica el *logos* que, a su vez, implica volver a la *praxis*. En efecto, toda *praxis* requiere un apoyo en el *logos* porque, a la larga, ningún quehacer humano permanece sin cuestionar. Por supuesto, una praxeología podría ser deficiente, por ejemplo porque su "praxis" se compone de una técnica ineficaz –"técnica" es aquí la palabra oficial para designar una "forma de hacer"– y su componente "logos" consta casi completamente de puro sinsentido –¡al menos desde el punto de vista del praxeólogo!

La noció de praxeologia o d'organització matemàtica (OM) constitueix així una eina fonamental per modelitzar l'activitat matemàtica, sense atribuir-li cap especificitat, és a dir, considerant-la com una activitat humana més. Com tota obra humana, una OM sorgeix com una resposta a un conjunt de qüestions i alhora com un mitjà per realitzar, en el si de certa institució, determinades tasques problemàtiques. S'hi poden distingir dos aspectes inseparables:

- El nivell de la pràctica matemàtica o "*praxis*" (saber fer) que consta d'un conjunt de *tasques* materialitzades en diferents *tipus de problemes* (**T**)) i d'un conjunt de *tècniques* (τ) o "maneres de fer", més o menys sistemàtiques i compartides en la institució, que són útils per a dur a terme les tasques esmentades. És important subratllar que les tècniques matemàtiques només excepcionalment tenen un caràcter algorísmic.
- El discurs raonat sobre la pràctica o "*logos*" (saber), en el que se situen, en un primer nivell, el discurs que descriu, explica i justifica la tècnica i que anomenem la *tecnologia* (θ), i un segon nivell de fonamentació de la tecnologia, que anomenem *teoria* (Θ) i que fa respecte de la tecnologia el mateix paper descriptiu i justificatiu que el de la tecnologia respecta de la tècnica.

Cal afegir que les *tasques problemàtiques* o qüestions associades a una OM acaben cristal·litzant en un o més *tipus de problemes*, generats pel desenvolupament de l'activitat matemàtica d'estudi de les qüestions inicials. En general, podem dir que si tenim un tipus de problemes en una institució determinada és perquè en aquesta institució existeix una *tècnica matemàtica* que permet, no tan sols resoldre aquests problemes, sinó generar molts més problemes del mateix tipus. Cap tècnica no pot viure amb normalitat en una institució si no apareix com una manera de fer alhora correcta, comprensible i justificada per a la comunitat. Per tant, l'existència d'una *tècnica* suposa que existeixi en el seu entorn un *discurs interpretatiu* i *justificatiu de la tècnica*, que és el que s'anomena una *tecnologia* que, a més de justificar-la i fer-la intel·ligible, té la important funció d'aportar elements per modificar la tècnica amb la finalitat d'ampliar el seu abast per tal de superar les seves limitacions i fer possible la producció de noves tècniques. També formen part de la tecnologia associada a una tècnica les proposicions que descriuen el seu abast, la seva relació amb altres tècniques, les possible generalitzacions i les causes de les seves limitacions. La tecnologia associada a una tècnica és un discurs matemàtic que també requereix una interpretació i justificació institucional. La *teoria* (associada a una tecnologia) és la tecnologia d'aquesta tecnologia i constitueix l'últim nivell de justificació de l'activitat.

Aquesta breu descripció dels components d'una OM ja posa de manifest que, lluny de ser independents, estan fortament relacionats entre sí. Amb això volem dir que, per exemple, el desenvolupament de les tècniques genera nous tipus de problemes i provoca noves necessitats explicatives i justificatives. El sistema format per aquests dos nivells (*praxis* i *logos*), o aquests quatre components (tipus de problemes, tècniques, tecnologia i teoria), constitueix una praxeologia (o organització) matemàtica que considerem com la *unitat mínima d'anàlisi* en què pot ser descrita l'activitat matemàtica. Simbòlicament, **OM** = [**T**, τ, θ, Θ].

Totes les *nocions* vistes: "tipus de problemes", "tècniques", "tecnologia" i "teoria" són *doblement relatives*. En primer lloc, són *relatives a la institució de referència. considerada*. Això significa que el que és considerat com una tasca (o tècnica o tecnologia o teoria) matemàtica en una institució no té perquè ser-ho en una altra institució. De fet, donada una institució, només haurien de considerar-se com a tipus de tasques **T** aquelles per a les quals es disposa d'algun tipus de tècnica τ amb un mínim entorn tecnològic [θ, Θ], més o menys explícit (encara que aquest entorn sigui del tipus "ho fem així perquè sempre s'ha fet així"). Per exemple, a Secundària, la descomposició en factors primers de nombres "petits" és una tasca, però la de nombres "grans" no ho és, mentre que sí ho serà a l'ensenyament universitari de la teoria de nombres o en un centre de recerca sobre criptografia. Per simetria, es podria dir que les tècniques sempre donen resposta a algun dels tipus de tasques que es poden plantejar en la institució, encara que de vegades puguin existir eines i maneres de fer que responguin a qüestions que ja no es plantegin (veure, per a més detalls, Chevallard, Bosch i Gascón, 1997).

En segon lloc, les nocions de tipus de tasques, tècniques, tecnologia i teoria són relatives a la *funció* que fa cada objecte matemàtic en una activitat matemàtica determinada. Per exemple, el Teorema de Bolzano pot funcionar, en una mateixa institució, com una *tècnica* per trobar zeros de funcions de variable real (que consisteix en avaluar la funció en un interval, després en el punt mig de l'inteval, i comparar els signes dels valors obtinguts, etc.), com un element tecnològic o teòric (per exemple per justificar que tota funció continua en un interval [a,b] tal que $f(a)\cdot f(b) < 0$ té un zero en aquest interval) o, fins i tot, com a part d'una tasca (en la resolució d'un problema més ampli). Aquest és un dels interessos de la noció de praxeologia o organització matemàtica: la de permetre distingir les diferents funcions que poden prendre els objectes matemàtics en les diferents institucions socials i en les diferents activitats institucionals.

1.2.3. Classes de praxeologies: estructures de complexitat creixent

Per tenir eines més precises per analitzar els processos didàctics institucionals, Chevallard (1999) va introduir la distinció entre diferents tipus de praxeologies segons el grau de complexitat dels seus components:

(a) Direm que una *organització* (o *praxeologia*) *matemàtica* és *puntual* (OMP) en una institució si està generada pel que es considera en la institució com un únic *tipus de tasques* T. És per això que la noció d'OMP és relativa a la institució considerada i està definida, en principi, a partir del bloc practicotècnic [T/τ].

Per descriure cada OMP, hauríem de detallar amb certa precisió el tipus exacte de tasques que estem considerant i les petites variacions de la tècnica que es consideren en la institució de referència com una "mateixa tècnica". Fins i tot, seria precís especificar en quin punt una determinada variació d'una tècnica concreta ja no pot ser considerada per la institució de referència com la "mateixa" tècnica i, per tant, quines són les noves OMP que apareixen i quina és la seva relació amb l'OMP inicials. També s'haurien de descriure els elements tecnològics que permetrien descriure i interpretar aquesta activitat matemàtica (encara que quedin implícits) i, fins i tot, la teoria que constitueix l'horitzó en el que podria situar-se.

(b) Direm que una *organització* (o *praxeologia*) *matemàtica* és *local* (OML) en una institució si s'obté com a resultat de la integració de diverses praxeologies *puntuals*. Cada OML està caracteritzada per una *tecnologia*, θ, que serveix per a justificar, explicar, relacionar entre sí i produir les tècniques de totes les OMP que la integren. En general les OMP s'integren en OML per a poder donar resposta satisfactòria a un conjunt de *qüestions problemàtiques* que no es podien resoldre completament en cap de les OMP de partida. Al llarg del *procés d'estudi*, que és a la vegada un procés de (*re*)*construcció* d'una OML en la institució de referència, es va desenvolupant un *discurs tecnològic* comú que permet *descriure, interpretar, justificar, explicar i relacionar* entre sí a les antigues *tècniques matemàtiques*, així com *produir tècniques* "*noves*". De fet, en el pas d'un conjunt d'OMP a una única OML, es posa en funcionament i pren protagonisme en el discurs tecnològic θ que caracteritza l'OML en qüestió.

Aquestes noves qüestions problemàtiques haurien de constituir la "raó de ser" que donessin sentit a l'OML. Paradoxalment, en determinades institucions matemàtiques és té que, a mida que les OMP s'integren per a construir organitzacions més complexes, la relació entre la qüestió i la resposta tendeix a invertir-se, fins al punt que les "raons de ser" tendeixen a desaparèixer (Chevallard, 1999).

Una característica molt marcada del discurs tecnològic θ associat a una OML és la *preponderància de la funció justificativa* (que assegura que cada tècnica serveix per al que ha de servir i dóna el resultat que ha de donar) *per sobre de la funció explicativa* (que hauria d'aclarir per què la tècnica és correcta, pertinent i eficaç). Aquest fenomen té relació amb el fet que, en cada institució, per a qualsevol tipus de tasques, es tendeix a privilegiar una única tècnica que es considerada en aquesta institució com "la manera evident e inqüestionable de resoldre les tasques del tipus en qüestió". Aquesta tècnica privilegiada per la institució, al ser inqüestionable i no tenir una tècnica rival, pot arribar a assumir un caràcter *autotecnològic*[7] dificultant així el seu desenvolupament (perquè s'ignoren les seves limitacions) i la seva integració en praxeologies més àmplies. Aquest és doncs, un primer tret de la dificultat institucional per a integrar vàries OMP en una OML.

(c) Direm que una *organització* (o *praxeologia*) *matemàtica* és *regional* (OMR) en una institució si s'obté mitjançant la coordinació, articulació i posterior integració, al voltant d'una *teoria matemàtica* comú Θ, de diverses OML. La reconstrucció institucional d'una teoria matemàtica requereix elaborar un *llenguatge comú* que permeti descriure, *interpretar*, *relacionar*, *justificar* i *produir* les diferents tecnologies de les OML que integren l'OMR.

[7] Es tracta de tècniques tant naturalitzades i transparents, que no semblen "necessitar" cap justificació externa a elles mateixes, més enllà del fet que "funcionen".

De la mateixa forma que era fàcil *citar* exemples d'*etiquetes* d'OMP concretes, també és relativament senzill *citar* mitjançant etiquetes exemples d'OMR específiques. En efecte, per a fer referència a una OMR hi haurà suficient en citar la *teoria matemàtica* comú Θ que serveix, en cada cas, per a unificar-la. Però, de nou, s'ha de reconèixer, que per a descriure adequadament una OMR seria precís descriure, a més de la teoria unificadora, les OML que la integren, les relacions que s'estableixen entre les OML constituents i les noves qüestions problemàtiques que poden abordar-se en la OMR final i que no podien abordar-se en cap de les OML inicials.

(d) Finalment, direm que una *organització* (o *praxeologia*) *matemàtica* és *global* (OMG) en una institució determinada quan s'obté agrupant varies praxeologies considerades com a regionals en aquesta institució a partir de la integració de diferents teories.

Les nocions d'organització matemàtica puntual, local, regional i global són centrals en el treball que aquí presentem. En particular, jugarà un paper primordial el que anomenem, seguint Fonseca (2004) i Bosch, Fonseca i Gascón (2004), *organitzacions matemàtiques locals completes* o relativament completes. Aquesta caracterització de les OML, que especificarem més endavant (§ 1.3.1), fa referència al fet que les OML considerades integrin tots els ingredients praxeològics necessaris per constituir una bona articulació de les OMP que contenen. És a dir, ens servirà per distingir la integració de diferents OMP entorn a un discurs tecnologicoteòric comú del que seria una simple juxtaposició d'OMP independents i poc relacionades entre sí.

1.2.4. El procés d'estudi d'una organització matemàtica: moments de l'estudi i organitzacions didàctiques

A les institucions socials constantment apareixen situacions que requereixen una resposta per part dels subjectes. Quan no es coneix aquesta resposta, és a dir, quan la institució no disposa d'una tècnica coneguda per abordar la situació, aquesta esdevé problemàtica. La resposta que busquem no és una simple informació, sinó que per poder abordar el problema eficientment serà necessària l'elaboració d'una tècnica i, més concretament, una praxeologia completa que contingui el tipus de problema plantejat. La creació o reconstrucció de la nova praxeologia constitueix un *procés d'estudi*.

Les praxeologies matemàtiques no sorgeixen de forma instantània en les institucions, ni apareixen acabades de forma definitiva: més aviat tot el contrari, són el resultat d'un treball complex i continuat. Apareixen aquí dos aspectes inseparables del treball matemàtic: per una banda, el procés de construcció matemàtica, corresponent al *procés d'estudi* i, per altra banda, el resultat de la construcció, és a dir, la praxeologia matemàtica cristal·litzada. En efecte, *no hi ha organitzacions matemàtiques sense un procés d'estudi que les generi, però tampoc hi ha procés d'estudi sense organització matemàtica en construcció.*

La consideració de diversos processos de construcció matemàtica permet detectar aspectes invariants presents en tots ells, és a dir, dimensions o aspectes de l'activitat matemàtica que estructuren qualsevol procés d'elaboració matemàtica independentment de característiques culturals, socials, individuals, etc. La noció de *moment didàctic* s'utilitza, no tant en el sentit cronològic, com en el sentit de *dimensió de l'activitat*. Chevallard (1999) postula que el procés d'estudi se situa en un espai determinat per sis moments didàctics, sense pressuposar que l'estructura del procés sigui lineal.

Cada moment pot ser viscut amb diverses intensitats, en diversos temps, tantes vegades com es necessiti al llarg del procés d'estudi i fins i tot és habitual que alguns d'ells apareguin simultàniament. El que sí és important destacar és que cada un dels sis moments o dimensions de l'estudi té una funció específica necessària per portar a bon terme el procés i que existeix una *dinàmica interna global* que es manifesta en el caràcter invariant de certes relacions entre els citats moments. En altres paraules, el que és important no és l'ordre en que es realitzen els diferents moments del procés d'estudi, sinó l'estructura interna de les relacions que han d'establir-se entre ells.

Els sis moments didàctics són: el moment del *primer encontre*, el moment *exploratori*, el moment del *treball de la tècnica*, el moment *tecnologicoteòric*, el moment de la *institucionalització* i el moment de l'*avaluació*. En un cas "ideal" en el qual l'activitat matemàtica genera una OML relativament completa, els moments didàctics es caracteritzen pel següent:

OD1. El *moment del primer encontre* fa referència a la primera vegada que els estudiants entren en contacte amb algun tipus de tasca T_q associat a una qüestió matemàtica q “amb sentit” i que condueixi a algun lloc; això significa que la OML que conté aquest tipus de tasca T_q ha de respondre a certes qüestions que sorgeixen en una situació (matemàtica o extramatemàtica), qüestions que no poden ser respostes per cap OMP i que constitueixen les raons de ser de l’OML en qüestió. El primer moment es pot viure varies vegades al llarg de tot el procés d’estudi. La funció principal d’aquest moment és la de fer “existir” els components d’OML per a la comunitat d’estudi.

OD2. El *moment exploratori*. És el moment en el qual s’explora la tasca problemàtica ($\mathbf{T}_q$) i s’elabora una tècnica τ_q relativa a aquesta. Es poden diferenciar dues etapes: la primera que correspon a la recerca de tècniques o mecanismes per poder solucionar les qüestions problemàtiques que es plantegen i la segona en la que l’estudiant ha d’arribar a tractar els problemes concrets dins d’un camp de problemes i ser capaç d’utilitzar la tècnica matemàtica per resoldre’ls. Es forma així una dialèctica fonamental: estudiar problemes és un medi que permet crear i posar en funcionament una tècnica relativa als problemes d’un mateix tipus, i aquesta tècnica a la vegada passa a constituir un medi per resoldre de manera quasi rutinària els problemes del mateix tipus.

El procés de reconstrucció d’una OML ha de contenir aquests moments exploratoris en els quals la comunitat d’estudi tingui l’oportunitat de construir i començar a utilitzar una tècnica inicial τ_0 potencialment útil per a realitzar les tasques del tipus T_q. Aquesta exploració ha de permetre comparar les variacions de τ_0 que apareixen en abordar les diferents tasques del tipus T_q.

OD3. El *moment del treball de la tècnica* ha de completar, en cert sentit, el moment exploratori, que s’inicia *rutinitzant* τ_0 fins provocar un desenvolupament progressiu de la tècnica. Aquest desenvolupament ha de generar tècniques relativament noves per a la comunitat d’estudi. El treball de la tècnica ha de continuar fins que els estudiants assoleixin un *domini robust* del conjunt de les tècniques, el que provocarà l’ampliació progressiva de T_q a T_0 i l’aparició de nous tipus de tasques.

Observem que aquesta activitat matemàtica comporta un cert grau de *creativitat* de nous objectes matemàtics. El *moment del treball de la tècnica* és, per tant, un moment molt important del procés d'estudi però les institucions didàctiques actuals no disposen de cap dispositiu "oficial" en el qual pugui viure i desenvolupar-se aquesta dimensió de l'activitat matemàtica (Chevallard, Bosch i Gascón, 1997).

OD4. El *moment tecnologicoteòric* és el de la constitució d'un entorn tecnologicoteòric relatiu a la/les tècniques τ_i. En la reconstrucció d'una OML han d'aparèixer noves qüestions matemàtiques relatives a les tècniques τ_i (qüestions relatives a la interpretació, justificació, i assoliment de les tècniques, així com de les relacions que s'estableixen entre elles -anomenem "*qüestionament tecnològic*" al conjunt d'aquestes qüestions-). La resposta a aquestes qüestions requerirà la realització de noves tasques matemàtiques que també passaran a integrar-se en l'OML en construcció. És necessari utilitzar un marc *tecnologicoteòric* que és el que permetrà construir (a més de justificar, interpretar i relacionar) totes les tècniques necessàries. És per això que, quan no es fa referència al procés de construcció, es diu que una OML està caracteritzada per una *tecnologia*, θ, que engloba a totes les OMP que la integren.

OD5. El moment de la *institucionalització* té per objectiu precisar el que és exactament l'OML elaborada, especificant els elements que s'han fet servir en la construcció i que finalment han passat a formar part de l'OML, dotant-los d'un caràcter oficial i diferenciant-los clarament d'aquells altres elements que poden haver aparegut en la construcció però no han estat integrats en l'OML. Aquesta *institucionalització* no ha de referir-se únicament a elements praxeològics aïllats; la institucionalització de qualsevol component d'OML ha de fer referència (més o menys explícita) a l'OML en el seu conjunt, pel que podríem dir que el subjecte de la institucionalització és sempre, al menys virtualment, una OML.

OD6. El *moment de l'avaluació* correspon a la dimensió de l'activitat matemàtica que requereix avaluar *la qualitat dels components d'OML construïda*: els tipus de tasques (¿estan ben identificats?, ¿existeixen espècimens suficientment variats de cada tipus?, ¿a quines qüestions estan associats?,...); les tècniques (¿estan suficientment treballades?, ¿són fiables?, ¿són econòmiques?, ¿són las més pertinents per a realitzar las tasques presentades?....); i el discurs tecnològic (¿és suficientment explícit?, ¿ajuda efectivament a interpretar i justificar les tècniques?, ¿permet variar les tècniques en la direcció adequada per a construir noves tècniques?....).

És important constatar fins a quin punt el model del procés de construcció de les OML en termes de *moments* està relacionat amb l'estructura praxeològica de les OML. Podem dir llavors que en la mesura que es viuen i s'integren de manera funcional els diferents moments de l'estudi, llavors el que es construirà serà una OML més "completa".[8]

1.2.5. Descripció de les organitzacions didàctiques

Des del punt de vista de la TAD es postula que *tota activitat humana pot ser descrita en termes de praxeologies*. En el cas que l'activitat considerada sigui l'activitat d'estudi, no n'és una excepció. Això ens condueix a considerar organitzacions d'estudi o *organitzacions didàctiques* (OD). D'aquesta manera, tot procés d'estudi de les matemàtiques, com a procés de construcció o reconstrucció d'OM, consisteix en la utilització d'una determinada OD, amb el seu component pràctic (format per *tipus de tasques* i *tècniques didàctiques*) i el seu component teòric (format per *tecnologies* i *teories didàctiques*). De la mateixa manera en que les OM són les unitats mínimes d'anàlisi de les pràctiques matemàtiques, *les OD són les unitats mínimes d'anàlisi dels processos didàctics*.

Els moments de l'estudi proporcionen uns primers elements per descriure les OD. Si considerem com a exemple prototípic de tasca didàctica la que consisteix en "ensenyar un determinat contingut matemàtic (o OML)", llavors les tècniques didàctiques que permeten realitzar aquesta tasca es podran descriure en termes dels dispositius emprats per fer viure i gestionar els diferents moments de l'estudi. Formaran part de la tecnologia i teoria didàctiques associades els discursos explicatius i justificatius d'aquestes tècniques.

[8] Aquesta noció és central en la recerca que presentem i la reprendrem més endavant a l'apartat 1.3.

Per a poder caracteritzar l'organització didàctica d'una institució escolar concreta relativa a una organització matemàtica, necessitem un punt de vista previ que ens proporcioni criteris sobre què és el que hem de mirar i amb quins objectius hem de mirar-ho. Per fer-ho, ens basarem en la descripció donada per Bosch i Gascón (2001) que proposen un "sistema de referència" tridimensional que hauria de tenir aquesta funció metodològica.

Imaginen un hipotètic espai tridimensional on cada un dels seus punts representa una organització didàctica ideal possible. Els eixos del sistema de referència seleccionats vénen representats per tres dels moments o dimensions de l'activitat matemàtica: el moment tecnologicoteòric (θ/Θ), el moment del treball de la tècnica (T/τ) i el moment exploratori (Ex). En cada un d'aquests eixos es situen organitzacions didàctiques ideals que anomenarem *unidimensionals* per que es caracteritzen per centrar el procés d'estudi en una única dimensió del procés d'estudi (la que correspon a l'eix en qüestió) donant-li a aquesta una prioritat absoluta i oblidant, o assignant un paper molt secundari a les restants dimensions. Apareixen així, respectivament les organitzacions didàctiques ideals *teoricistes, tecnicistes* i *modernistes*. Cada un d'aquests tipus d'organitzacions didàctiques ideals pot caracteritzar-se complementàriament, pel tipus de contracte didàctic institucional que defineix i que pot resumir-se fent referència a la forma en com es distribueixen les responsabilitats didàctiques en un procés d'estudi.

Entre les organitzacions didàctiques ideals que prenen en consideració i comencen a integrar dos moments o dimensions de l'activitat matemàtica citarem: OD *clàssiques*, OD *empiristes* i OD *constructivistes*. Les organitzacions didàctiques *clàssiques* combinen els moments tecnologicoteòrics i del treball de la tècnica, i es caracteritzen entre altres coses per la trivialització de l'activitat de resolució de problemes i per considerar que l'ensenyament de les matemàtiques és un procés mecànic totalment controlable pel professor.

Les organitzacions didàctiques *empiristes* pretenen integrar els moments exploratori i del treball de la tècnica. Es caracteritzen per la preeminència que atorguen a la resolució de problemes dins del procés didàctic global i per considerar que aprendre matemàtiques és un procés inductiu i autònom basat en la imitació i en la pràctica.

Les organitzacions didàctiques *constructivistes* prenen simultàniament en consideració els moments tecnologicoteòric i exploratori. Es caracteritzen per contextualitzar l'activitat de resolució de problemes situant-la en una activitat més àmplia i per considerar que l'aprenentatge és un procés actiu de construcció de coneixements que es duu a terme seguint unes fases determinades i que depèn essencialment dels coneixements adquirits amb anterioritat.

Cada un d'aquests tres tipus d'organitzacions didàctiques ideals bidimensionals: clàssiques, empiristes i constructivistes, es situen en un dels plans del sistema de referència que hem escollit en el nostre espai d'organitzacions didàctiques ideals possibles (veure figura 2).

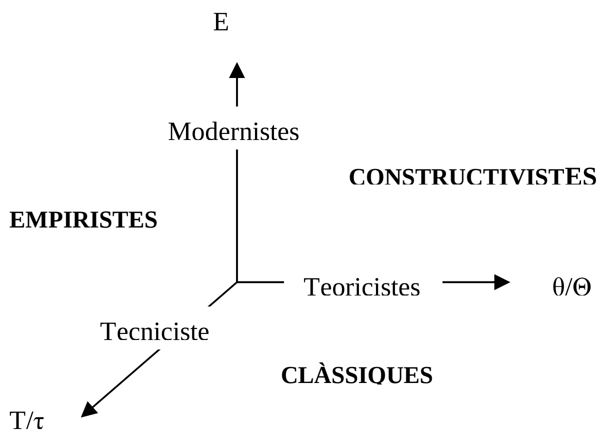


figura 2

Cada un d'aquests tipus d'organitzacions didàctiques es sustenta en un *model epistemològic general* de les matemàtiques, és a dir, en una forma particular i relativament precisa d'interpretar i descriure l'organització matemàtica escolar considerada com un tot. En concret, les organitzacions didàctiques clàssiques es sustenten en el *euclideanisme*, les empiristes en els models epistemològics *quasi-empírics* i les constructivistes en els models epistemològics *constructivistes* (Gascón, 2001)

1.2.6. El Model Epistemològic de Referència (MER)

De la mateixa manera que hem proposat un "sistema de referència" per a l'observació i anàlisi de les praxeologies didàctiques, també es necessita un "model epistemològic de referència" des del qual poder observar, descriure i analitzar les organitzacions matemàtiques involucrades en els diferents processos d'estudi. De fet, i com ja dèiem al principi del punt 1.2., aquesta necessitat constitueix un dels fonaments de l'enfocament epistemològic en didàctica de les matemàtiques que inaugura la Teoria de Situacions Didàctiques. El procés de transposició didàctica (§ 1.2.1.) també posa de manifest la necessitat, per part de l'investigador en didàctica, de prendre una posició externa respecte de les institucions que intervenen en el procés didàctic. Citant a Chevallard (2006):

> El que diu la teoria de la transposició didàctica [...] és que no hi ha un "sistema de referència privilegiat" des del qual observar, analitzar, jutjar el món dels sabers i, més àmpliament, les praxeologies. El "saber savi" és una funció i no una substància, respecte al qual el didacta s'ha de descentrar expressament. D'aquí es desprèn que el treball del didacta consisteixi, cada cop, en la construcció d'un sistema de referència mai definitiu des del qual analitzar les praxeologies de les quals n'estudia la difusió.

Tal com hem dit, la noció de praxeologia proporciona, en aquest sentit, una eina eficaç per descriure l'activitat i el saber matemàtic que es desenvolupen en aquestes institucions. Aquesta emancipació epistemològica i institucional de la investigació didàctica requereix un primer "gest" metodològic per a l'anàlisi didàctica que consisteix en elaborar el que anomenem un model epistemològic de referència (MER) de les activitats matemàtiques que s'ensenyen, estudien i aprenen en els processos didàctics considerats. Com és evident, la descripció del MER d'una activitat matemàtica es realitzarà en termes de praxeologies. Com postula Tomás Sierra en la seva tesi doctoral (Sierra 2006):

> El MER pot expressar-se en forma de successió d'organitzacions matemàtiques que corresponen a l'elaboració de respostes parcials a una qüestió problemàtica inicial. Cada organització matemàtica de la successió sorgeix com ampliació o desenvolupament de l'organització anterior, davant les limitacions d'aquesta per aportar respostes a les qüestions que es plantegen.

Així doncs, donat un procés didàctic en una determinada institució en relació a un contingut matemàtic específic, el didacta haurà d'elaborar una descripció pròpia del saber matemàtic en joc. Aquest model hauria de prendre la forma d'una successió de praxeologies i de qüestions problemàtiques a les quals aquestes praxeologies aporten una resposta (parcial i progressiva). És evident que aquesta successió de qüestions i praxeologies no existeixen en el buit sinó que han d'aparèixer institucionalment contextualitzades. De fet, la descripció del MER ha de completar-se amb la descripció de la seva reconstrucció institucional i això requereix, en particular, que s'especifiquin els medis i els mitjans de què es disposa o s'hauria de disposar per elaborar les respostes a les qüestions.

La transposició didàctica és una eina especialment útil per fer servir els models epistemològics de referència que utilitzen els investigadors, ja que guia la mirada a través de les diferents institucions involucrades (i, en particular, de la comunitat productora del saber savi, que és el principal proveïdor dels ingredients del MER) i permet alhora senyalar les restriccions transpositives a les que es veuen sotmeses les "organitzacions a ensenyar" i les "organitzacions efectivament ensenyades".

1.2.7. Relacions entre organitzacions matemàtiques i didàctiques: la noció de contracte i els nivells de codeterminació

Per a precisar millor el nostre punt de partida i clarificar els pressupostos que assumim inicialment, explicitarem a continuació una hipòtesis bàsica del programa epistemològic en didàctica de las matemàtiques en la que juga un paper important la noció de "contracte didàctic". La noció de *contracte didàctic*[9], introduïda per Brousseau en el marc de la Teoria de Situacions Didàctiques, designa el conjunt de clàusules implícites que distribueixen les responsabilitats recíproques entre els estudiants i el professor en relació al coneixement matemàtic en joc. Les clàusules del contracte didàctic tenen un caràcter institucional (no depenen del professor i alumnes concrets considerats sinó del tipus de centre d'ensenyament, dels seus costums i estils docents) i *marcadament tàcit*

[9] La noció de "contracte didàctic" adquireix un sentit més precís en el marc de la *teoria de les situacions didàctiques*. En Brousseau (1998) pot trobar-se una recopilació dels treballs fundadors d'aquesta teoria, publicats entre 1970 i 1990.

(el contracte sempre està present, però no es pot explicitar). Això fa que les clàusules d'aquest contracte siguin difícils de modificar i, fins i tot, de percebre, llevat dels casos en què precisament hi ha ruptura de contracte, per exemple perquè el professor proposa als alumnes un tipus de tasques que ells no poden assumir o, a la inversa, perquè els alumnes exigeixen del professor un tipus d'ajuda que ell no els pot atorgar a menys de renunciar al projecte d'ensenyament que els unia. El contracte didàctic sempre està immers en un contracte més ampli, propi a l'ensenyament de totes les disciplines, anomenat el *contracte pedagògic* immers, al seu torn, en un *contracte escolar* més ampli. Si bé és clar que el contracte escolar canvia en el pas de Secundària a la Universitat, el que no és tan clar per als alumnes – ni tampoc sempre per als professors – és veure en quin sentit queda afectat també el contracte pedagògic i, en últim terme, el propi contracte didàctic.

Les nocions de contracte didàctic (que afecta les matemàtiques), pedagògic (que afecta l'ensenyament de les diferents disciplines) i escolar (que afecta qualsevol activitat de l'escola en general) marquen una primera jerarquia en el conjunt de condicions i restriccions institucionals que afecten el disseny i la gestió dels processos didàctics. Així, per poder estudiar un determinat tema o organització matemàtica, el fet que hi hagi una escola, un ensenyament disciplinar i un ensenyament de les matemàtiques pot oferir bones *condicions* per a la realització del procés d'estudi i dels seus diferents moments. Però al mateix temps també estableixen un conjunt de *restriccions* per a dur a terme aquest estudi, com és per exemple una determinada organització escolar i pedagògica (divisió dels alumnes en grups d'edat, seqüenciació del temps escolar, sistema general d'avaluació, etc.), àdhuc didàctica (temari organitzat en blocs de continguts i temes, separació entre disciplines, etc.).

L'estudi de les condicions d'existència i evolució de les organitzacions matemàtiques i didàctiques mostra que, quan el professors i els alumnes s'enfronten a un saber que s'ha d'ensenyar i aprendre, el que pot passar està molt determinat per un conjunt de condicions i restriccions que no es poden reduir a aquelles immediatament identificables dins l'aula (coneixement previ dels alumnes i professor, material didàctic disponible, etc.). Encara que aquests aspectes siguin molt importants, Chevallard va proposar fa uns anys considerar una escala de "nivells de codeterminació" (veure figura 3) que podria ajudar els investigadors a identificar aquelles condicions que van més enllà de l'espai de la classe i del coneixement o tema que es vol estudiar (Chevallard 2001, 2002b, 2004).

Civilització → Societat → Escola → Pedagogia	→ Disciplina → Àrea → Sector → Tema → Qüestió
Nivells genèrics	*Nivells específics a l'àmbit matemàtic*

figura 3

Els nivells de les qüestions, temes i sectors corresponen respectivament al de les organitzacions matemàtiques puntuals, locals i regionals i, per tant, no són categories absolutes sinó relatives a la institució de referència. Més enllà ens trobem amb amalgames d'OMR entorn de conjunts de teories fins arribar a la disciplina matemàtica globalment considerada.

A Bosch i Gascón (2006) hi trobem esmentada una de les principals funcions d'aquesta jerarquia de nivells en l'anàlisi didàctica:

> ¿Por qué una nueva ampliación del objeto de estudio con la correspondiente complejidad del marco teórico? La respuesta es siempre la misma: para liberarse de las concepciones espontáneas del conocimiento matemático que, al analizar su objeto de estudio, los investigadores podrían asumir sin cuestionarlas previamente. Las praxeologías "puntuales", "locales", "regionales" y "globales" se corresponden con los niveles inferiores: los de la cuestión, el tema, el sector y el área. Quizá debido a su familiaridad con el "problema del profesor" ("dado un contenido matemático para ser enseñado, ¿cuál es la mejor forma de hacerlo?"), a menudo los didactas asumen como incuestionable la delimitación de contenidos que ofrecen las instancias educativas o académicas. Hay que situarse en un nivel de generalidad superior para preguntarse, por ejemplo, y dada una organización curricular concreta, por qué están divididos los contenidos en estos bloques temáticos y no en otros, o cuáles son los criterios para determinar esta división y qué tipo de restricciones causa sobre la actividad concreta que pueden realizar profesores y estudiantes.

Un cop introduïdes les principals nocions de la Teoria Antropològica del Didàctic que adoptem com a marc teòric i metodològic de referència, vegem ara com ens permeten formular el problema de l'aprenentatge de les matemàtiques en la transició entre la Secundària i a la Universitat.

1.3. El problema en la transició entre la Secundària i la Universitat

En coherència amb els principis fonamentals de l'enfocament epistemològic en didàctica, postulem que molts dels fenòmens didàctics –és a dir, relatius a l'estudi de les matemàtiques– que apareixen en el trànsit de Secundària a la Universitat poden ser explicats en termes de les contradiccions, discontinuïtats o canvis bruscos entre els contractes didàctics institucionals vigents en ambdues institucions. Aquests contractes regeixen les organitzacions matemàtiques i didàctiques respectives, és a dir, el tipus de pràctiques matemàtiques que es poden desenvolupar i la forma com aquestes pràctiques poden organitzar-se en cada institució. Postulem que l'estudi comparat de les organitzacions matemàtiques i didàctiques que estan presents a Secundària i a la Universitat permetrà explicar millor les discontinuïtats entre les dues institucions docents i els obstacles que dificulten el trànsit entre elles.

1.3.1. Procés d'estudi i "completesa" de les organitzacions matemàtiques locals

En aquest apartat veurem que les característiques de les components d'una organització matemàtica local (OML) i, per tant, de la seva estructura resultant són fruit del procés de construcció d'aquesta OM (descrit a la secció 1.2.4 mitjançant els moments didàctics OD1 – OD6) i que aquest procés, a la vegada, utilitza aquests components a mesura que van sent produïts, com a instruments imprescindibles de l'activitat. A continuació citarem els set indicadors que introdueix Fonseca (2004) per caracteritzar el que anomena "grau de completesa" d'una OML i que caracteritzaran el que entenem per OML *relativament completa*.

OML1. ***Integració dels tipus de tasques i existència d'un qüestionament tecnològic***
En una OML conviuen necessàriament diferents tipus de tasques problemàtiques i tècniques que provenen de les diferents OMP que integren l'OML i que estan articulades per un discurs tecnològic comú. Aquest discurs sorgeix normalment a partir

dels successius desenvolupaments de les tècniques de cada OMP i de la necessitat de relacionar-les entre sí. El grau de completesa d'una OML depèn llavors del *grau d'integració dels diferents tipus de tasques*. Entre ells han d'aparèixer problemes associats al "*qüestionament tecnològic*" de les tècniques, és a dir, qüestions relatives a la interpretació, la justificació, la fiabilitat, l'economia i l'abast de les tècniques, així com la seva comparació. Una OML serà menys *completa* quants més tipus de *tasques aïllades* (realitzables mitjançant tècniques que no estan relacionades amb cap element tecnològic) contingui.

OML2. *Diferents tècniques per a cada tipus de tasques i criteris per escollir-les*

Una OML serà més completa en la mesura en què, donat un tipus concret de tasques T_q d'OML, *existeixin dos o més tècniques* (que poden ser variacions d'una mateixa tècnica) que permetin realitzar algunes de les tasques concretes d'aquest tipus. Aquest indicador de la completesa comporta que en una OML relativament completa existeixin els *elements tecnològics que permeten decidir*, per a cada tasca concreta, quina és la tècnica més fiable i econòmica per dur-la a terme.

OML3. *Independència dels objectes ostensius que instrumenten les tècniques*

La flexibilitat de les tècniques d'una OML constitueix un altre indicador del seu grau de completesa i comporta, en particular, que aquestes no s'identifiquin rígidament amb les notacions, designacions, gràfics o altres *objectes ostensius* (Bosch, 1994) que s'utilitzen per a descriure-les i per a aplicar-les. Al contrari, la variabilitat tècnica suposa que s'acceptin diferents representacions ostensives depenent de l'activitat matemàtica en la que estan immerses i fins i tot de la tasca específica abordada dins d'un mateix tipus de tasques.

OML4. *Existència de tasques i de tècniques "inverses"*

Un altre indicador de la flexibilitat de les tècniques i, per tant, del grau de completesa de l'OML el proporciona el fet que, per a cada tasca $t \in T_q$ i cada tècnica τ corresponent, existeixi el que anomenarem la *tècnica inversa de* τ i que és una tècnica (no necessàriament única) que permet realitzar la tasca definida intercanviant algunes de les dades i les incògnites de la tasca *t*. Podem anomenar a aquesta última, la *tasca inversa de t*, tot i que s'ha de dir que aquesta no està definida unívocament a partir de *t*.

OML5. ***Interpretació del funcionament i del resultat d'aplicar les tècniques***

En la mesura que una OML sigui més completa, es complirà que, per a cada tècnica τ de OML, existirà en OML qüestions relatives a la *interpretació del funcionament* i *el resultat* d'aplicar τ per realitzar una tasca o un tipus de tasques d'OML. Aquest aspecte de la completesa implica que a OML existeixen els elements tecnològics necessaris per realitzar aquesta interpretació. De fet, aquesta "interpretació" haurà de fer-se en referència a l'OML en el seu conjunt, en termes dels components de l'OML i, especialment, usant la tecnologia que la caracteritza.

OML6. ***Existència de tasques matemàtiques "obertes"***

Una OML serà més completa en la mesura que *existeixin tipus de tasques matemàtiques* "o*bertes*", és a dir, tipus de tasques matemàtiques en els quals les dades i les incògnites no estan prefixades completament a priori. En un primer nivell, les tasques obertes són aquelles en les quals les dades són valors coneguts que es tracten com si fossin desconeguts (paràmetres) i les incògnites no són necessàriament objectes matemàtics concrets, sinó que també poden ser relacions que s'estableixen entre certs objectes en determinades condicions explicitades en l'enunciat de la tasca. Existeix un segon nivell de tasques obertes en les quals l'estudiant ha de decidir, davant una situació determinada, quines dades ha d'utilitzar i quines són les incògnites més pertinents. En aquest segon nivell s'inclouen les tasques de *modelització matemàtica*.

OML7. ***Integració d'elements tecnològics i incidència sobre la pràctica***

Cada OML ve caracteritzada per una *tecnologia* θ. El grau de completesa d'OML depèn també del grau d'integració interna dels elements tecnològics (components de θ) i de la incidència efectiva de θ sobre la pràctica matemàtica que es fa amb les tasques i les tècniques d'OML. En particular, un indicador important del grau de completesa de OML el constitueix la mesura en què θ permet *construir tècniques noves* (per a la comunitat d'estudi) capaces d'ampliar els tipus de tasques d'OML.

S'ha de subratllar de nou, que la noció de "completesa" és relativa. No té sentit parlar d'OML "*completes*" ni d'OML "*incompletes*". Es tracta , en tots els casos, d'una qüestió de grau: existeixen OML més o menys "completes" que altres en funció del grau en que les seves components compleixin les condicions descrites pels indicadors **OML1 – OML7**.

Dualment, i donada la relació que hi ha entre els moments del procés d'estudi d'una OM i els seus components practicotècnics i tecnologicoteòrics, podem dir també que el grau de completesa d'una OML depèn del grau en què, al llarg del procés de construcció de OML, es compleixin **OD1 – OD6** (veure § 1.2.4).

1.3.2. Les matemàtiques de Secundària i les discontinuïtats en el pas a la Universitat

D'aquí en endavant anomenarem "S" i "U" les institucions escolars de l'ensenyament Secundari i l'ensenyament Universitari respectivament. Pel que fa a les discontinuïtats entre les dues (és a dir, les contradiccions entre els corresponents contractes didàctics institucionals) formularem una conjectura general provisional (en termes de la TAD).

1.3.2.1. Conjectura general: incompletesa de les organitzacions matemàtiques locals escolars

Amb l'ajuda de les nocions d'organització matemàtica puntual, local i regional, Fonseca (2004) expressa una conjectura general en forma de tres hipòtesis, que es refereixen, respectivament, a S, a U i al trànsit de S a U. Citem literalment:

H(S): A S, l'estudi de les praxeologies matemàtiques està concentrat en el bloc tecnicopràctic $[T/\tau]$, sent molt poca la incidència de l'altre bloc, el tecnologicoteòric $[\theta/\Theta]$ sobre l'activitat matemàtica que realitzen efectivament els alumnes. Aquesta separació funcional entre ambdós blocs es posa de manifest, en particular, en l'absència de tot tipus de *qüestionament tecnològic dels tipus de tasques i de les tècniques matemàtiques* emprades a S. Així, per exemple, no es qüestiona fins a quin punt estan justificades les tècniques que s'utilitzen, la interpretació dels resultats que proporcionen aquestes tècniques, el seu abast o domini de validesa, la seva pertinença per dur a terme una tasca determinada, la seva eficàcia o economia, les seves relacions amb altres tècniques, les seves limitacions ni les possibles modificacions que podrien patir aquestes tècniques per augmentar la seva eficàcia en la realització de certes tasques. En resum, l'activitat matemàtica que es duu a terme a S és essencialment *practicotècnica* i rarament s'assoleix el *nivell tecnològic*. Per tot això, les OM que s'estudien en S són *puntuals*, molt *rígides* i *aïllades* (o *poc coordinades* entre sí), el que *dificulta*, i fins i tot *impedeix*, que s'hi puguin reconstruir OML relativament completes.

H(U): A U es proposa, des d'un principi, l'estudi d'OMR la presentació de les quals acostuma a centrar-se, per qüestions d'economia, en una teoria, Θ, en la qual la OMR ha acabat cristal·litzant. Donat que el *teoricisme é*s el model docent predominant en U, es tendeix a identificar "*ensenyar i aprendre matemàtiques*" amb "*ensenyar i aprendre teories fetes*", motiu pel qual el procés didàctic comença i pràcticament acaba en el moment en què el professor "ensenya" (en el sentit de "mostra") aquestes teories als alumnes. En aquesta situació una mica extrema, el bloc practicotècnic [T/τ] queda, de nou, completament desconnectat del bloc tecnologicoteòric, [θ/Θ], encara que aquí la causa es inversa al que succeeix a S. A U, el treball practicotècnic és considerat com una *activitat secundària* dins del procés didàctic global i, en tot cas, juga un paper *auxiliar en l'aprenentatge de les teories*. Els elements tecnològics que apareixen ho fan per exemplificar algun aspecte particular de la teoria matemàtica, però mai per integrar les diferents OMP en una OML relativament completa. Les OML que s'evoquen a U, se suposen reconstruïdes amb un grau suficient de completesa, però no s'hi reconstrueixen efectivament. Al seu torn, els problemes i les tècniques que es manipulen a U es connecten amb aspectes específics de la teoria a través de determinats elements tecnològics desconnectats entre sí. Molt rarament existeixen connexions "horitzontals" entre components del mateix nivell, ni entre els diferents tipus de problemes matemàtics, ni entre les diferents tècniques. Aquestes connexions podrien generar una "construcció des de baix", des del bloc practicotècnic, de l'OMR a partir de les OML estudiades pels alumnes a S.

Aquesta separació funcional entre ambdós blocs –i la consegüent dificultat per connectar el bloc practicotècnic de l'activitat amb la teoria cristal·litzada que es mostra als estudiants– es posa de manifest, per exemple, en l'absència de les qüestions problemàtiques que constitueixen la "raó de ser" de l'OMR (de les qüestions a les quals l'OMR dóna resposta) en el cas en què aquestes qüestions hagin sorgit en el bloc practicotècnic.

En resum, l'activitat matemàtica que es duu a terme en U està molt centrada en els components teòrics de les OMR que es proposen per a ser estudiades. Es dóna per fet que les OML que integren les citades OMR han estat construïdes com OML relativament completes i, per tant, no es té la necessitat de "baixar" als detalls practicotècnics de l'organització. I quan el procés d'estudi que es duu a terme a U abandona momentàniament la "cúspide" de la teoria cristal·litzada per recórrer una part del "cos" de la OMR, llavors acostuma a xocar amb restriccions institucionals molt fortes que només permeten "baixar" des del nivell teòric fins al nivell practicotècnic per canals tecnològics molt aïllats (les conegudes "aplicacions" de les teories).

H(S–U): El trànsit de S a U és un moment especialment delicat del procés global d'estudi de les matemàtiques i, per tant, constitueix un aspecte important i possiblement prototípic del problema de l'*articulació del currículum* de matemàtiques. Hem postulat que les OM que s'estudien en S són *puntuals*, molt *rígides i aïllades*, el que *dificulta* enormement que s'hi reconstrueixin efectivament OML relativament completes. A U, no obstant, es dóna per fet que les OML que integren les OMR (proposades per ser estudiades a U) compleixen en un grau relativament alt les condicions **OML1 – OML7**. Aquest malentès entre ambdues institucions perpetua l'absència institucional dels processos de reconstrucció d'OML relativament completes i constitueix un important *obstacle d'origen didàctic* que provoca greus disfuncions en el començament de l'estudi de les matemàtiques en la Universitat. Aquest obstacle és especialment important degut a què el tipus d'activitat matemàtica que es requereix per reconstruir una OML és, tal com hem descrit més amunt mitjançant les propietats **OD1 – OD6**, imprescindible per posar en marxa de manera integrada *totes las dimensions o moments de l'activitat matemàtica*.

1.3.2.2. Aspectes de la rigidesa de les organitzacions matemàtiques que s'estudien a Secundària

A partir de la conjectura general vista abans, Fonseca proposa cinc conjectures específiques (C1 a C5) que expliciten alguns aspectes de la *rigidesa* de les OMP que s'estudien a S. L'enunciat d'aquestes cinc conjectures es desprèn directament (per negació) de les característiques OML1-OML7 que hem postulat que haurien de tenir les OML relativament completes.

C1. ***Dependència de la nomenclatura associada a una tècnica***

A U es considera que la "nomenclatura" és irrellevant i que un simple canvi dels símbols que s'utilitzen per a posar en marxa una tècnica no pot representar una modificació important de l'activitat matemàtica. Però a S la *rigidesa* de les OMP pot portar a identificar i, fins i tot, confondre la tècnica amb els objectes ostensius (ja siguin símbols, gràfics o paraules escrites o orals) que constitueixen el seu suport material.

C2. ***L'aplicació d'una tècnica a S no inclou la interpretació del resultat***

Degut a la poca incidència del bloc tecnologicoteòric en les praxeologies matemàtiques que s'estudien (reconstrueixen), a S no s'exigeix interpretar adequadament el resultat d'aplicar una tècnica per a considerar que aquesta tècnica ha estat "correctament" utilitzada. No es considera una de *les responsabilitats que el contracte didàctic institucional assigna als alumnes en* S.

C3. ***Inexistència de dues tècniques diferents per a realitzar una mateixa tasca***

En U es necessita que determinades OMP *no siguin problemàtiques* per als estudiants – es precisa que formin part del que denominem el seu "*medi matemàtic*"[10]– per tal que es puguin utilitzar de manera *flexible* al llarg del procés d'estudi universitari. En particular, quan existeixin dues tècniques matemàtiques "equivalents a U" per a un cert subtipus de tasques es requereix que l'elecció de la més adequada o la utilització indistinta, no provoqui cap tipus de problemes als estudiants que inicien els seus estudis a U. Però, com ja hem dit, en S, s'utilitzen tècniques aïllades i molt rígides fins al punt que, encara que existeixin dues tècniques diferents per a un mateix tipus de tasques, no forma part de la responsabilitat matemàtica de l'alumne decidir per a cada tasca concreta, quina de les dues tècniques és la més pertinent. A més, acostuma a succeir que una de les dues tècniques es converteix en *la* manera de resoldre aquest tipus de problemes a S, prenent així un caràcter *autotecnològic i* provocant la pràctica desaparició de la tècnica rival.

C4. ***No reversió de les tècniques per a realitzar la tasca "inversa" d'una tasca donada***

Un dels aspectes més importants de la *rigidesa* de les OMP que s'estudien a S es manifesta en la *no reversió* de les tècniques matemàtiques corresponents. En termes del

[10] Seguint la noció de "medi" de la Teoria de Situacions Didàctiques, entenem per "*medi matemàtic*" d'una comunitat d'estudi el conjunt d'objectes que presenten una familiaritat matemàtica tal que poden ser manipulats amb tota seguretat i les propietats dels quals els hi semblen inqüestionables i no problemàtiques (Chevallard, Bosch i Gascón, 1997).

contracte didàctic podem dir que, a S, *no forma part de la responsabilitat matemàtica de l'alumne invertir una tècnica per a dur a terme una tasca inversa*. Podria dir-se de forma més general que, el contracte didàctic a S no assigna a l'alumne la responsabilitat de modificar una tècnica "coneguda" de manera adequada per a fer una tasca *una mica diferent* a la tasca inicial. Aquesta conjectura implica, en particular, que quan existeixin dues tasques "inverses" entre sí (és a dir, tasques amb algunes de les dades i les incògnites intercanviades) les corresponents tècniques acostumen a tractar-se com si fossin "independents".

C5. *Absència de situacions obertes que requereixen un treball de modelització*

Els *problemes escolars* es presenten, tant a S com a U, amb enunciats molt tancats, en el que figuren com a "dades" exactament totes les que es necessiten per a resoldre el problema. Rarament es presenta una *situació oberta* on l'estudiant hagi de decidir quines són les dades que necessita per a formular correctament un problema matemàtic. Poques vegades es problematitza el propi enunciat dels problemes com a punt de partida per a *plantejar nous problemes*. L'absència de tècniques *explícites* de modelització comporta que, en ambdues institucions, la modelització matemàtica constitueixi una de las activitats més problemàtiques i menys regulades. En acceptar-se implícitament (especialment a U, on domina el model docent "teoricista") que *no existeixen tècniques de modelització matemàtica*, es tendeix a considerar que les modelitzacions matemàtiques que es realitzen a S són senzillament "canvis de llenguatge" o "canvis de nomenclatura" trivials que no tenen la categoria de "veritables" tècniques de modelització matemàtiques.

1.4. Formulació del problema d'investigació

Tal com hem explicat en els desenvolupaments anteriors, la nostra investigació parteix del resultats obtinguts per Fonseca (2004) i que resumirem en les dues proposicions següents:

(1) Les dificultats que manifesten els alumnes en el pas de Secundària a la Universitat es poden formular en termes de *discontinuïtats matemàtiques i didàctiques* entre l'ensenyament secundari (S) i l'universitari (U):

- A S es construeixen OMP i OML incompletes i desarticulades, amb un fort component practicotècnic i un dèbil component tecnologicoteòric. A U es construeixen OML també incompletes i desarticulades però per altra banda: un fort component tecnologicoteòric i un dèbil component practicotècnic.
- Tampoc no s'articulen les *praxis* de S amb els *logos* de U. En general, a cap de les dues institucions no es parteix de les qüestions problemàtiques que estan a l'origen de les OM que s'ensenyen, és a dir, el que el podem anomenar la "raó de ser" del coneixement matemàtic que s'ensenya.
- La "incompletesa" de les matemàtiques estudiades tant a S com a U estaria relacionada amb una "incompletesa didàctica" causada per una dèbil realització d'algunes dimensions importants del procés d'estudi i per l'absència d'un qüestionament inicial que motivi i atorgui una raó de ser a les principals nocions i tècniques que els alumnes han d'aprendre a utilitzar.

(2) Una manera de minvar aquestes discontinuïtats, en algun grau o en algun àmbit concret de la matemàtica estudiada, consisteix en dissenyar organitzacions didàctiques que permetin la reconstrucció d'OML relativament completes, tant a l'ensenyament secundari, com a l'universitari com en el trànsit de l'un a l'altre. Postulem dues condicions necessàries per fer-ho: el *desenvolupament suficient i adequadament dirigit del treball de la tècnica* i el *prendre com a punt de partida del procés d'estudi una qüestió ("raó de ser") suficientment rica a la qual l' OML aporti una resposta*.

Partint d'aquestes hipòtesis, el problema d'investigació que abordem en aquesta memòria es pot formular en els termes següents:

(P1) Quines característiques tenen els cursos propedèutics que existeixen actualment a les universitats espanyoles i en quina mesura aconsegueixen pal·liar les discontinuïtats matemàtiques i didàctiques entre la S i la U? Quina anàlisi prèvia (implícita) sobre els coneixements que s'ensenyen a S i els que s'ensenyen a U els fonamenta?

(P2) Com dissenyar i experimentar un dispositiu didàctic que, integrant la possibilitat de fer viure amb normalitat el desenvolupament del treball de la tècnica, prengui com a punt de partida una qüestió inicial que compleixi els requisits següents:

- La qüestió tingui interès per als estudiants, per exemple perquè està relacionada amb els estudis universitaris que encetaran o perquè els afecta en les seves vides;
- La seva resposta requereix connectar diferents OMP estudiades a Secundària en una OML vinculada als estudis Universitaris.[11]

(P3) La nostra anàlisi de les dificultats en el pas de S a la U i sobre els coneixements que s'ensenyen a S i a U condueix a proposar un curs propedèutic gairebé "oposat" als dispositius tradicionals. En comptes d'una revisió ràpida, i necessàriament superficial, d'una part important de les OM puntuals i locals que els alumnes acaben d'estudiar (o de les que presumptament haurien d'haver estudiat), els proposem un estudi detallat i en profunditat d'unes poques qüestions problemàtiques que els condueixin a articular diferents OMP, a qüestionar les tècniques apreses i a desenvolupar-les per dotar-les de més abast i validesa.

- Fins a quin punt un procés d'estudi d'aquest tipus és viable en les condicions habituals de les institucions escolars actuals?
- De quina manera i en quina mesura el curs proposat permet pal·liar les discontinuïtats matemàtiques entre S i U, és a dir, permet construir OML més completes i, en algun sentit, més properes a les que s'estudiaran a U?
- Quin efecte té el curs propedèutic experimentat sobre el rendiment posterior dels alumnes?

[11] Aquest problema és un cas particular d'un problema didàctic més ampli i fonamental relatiu a les condicions que fan és possible reconstruir una OML relativament completa en els sistemes educatius actuals. L'estudi d'aquest problema forma part del programa de recerca del nostre equip d'investigació i l'estem abordant per al cas particular de l'ensenyament de la modelització algebraicofuncional a secundària (Ruiz Munzón 2006) a partir dels resultats de García (2005) i per al cas de l'ensenyament de les matemàtiques a primer curs universitari de ciències (Barquero 2006).

Capítol 2. Anàlisi de propostes de cursos propedèutics

2.1. Aparició d’un nou dispositiu promogut des de la universitat

Partirem en aquest capítol d’un fenomen que ha tingut lloc a Espanya durant els darrers 10 anys, coincidint amb l’arribada a la universitat de les generacions de la reforma educativa de 1990 que va allargar l’ensenyament obligatori dels 14 als 16 anys i que va reduir la secundària post-obligatòria (el batxillerat) de quatre cursos a només dos. Com a reacció a l’arribada dels “nous alumnes de la reforma” a la universitat, a finals de la dècada dels 90, un gran nombre d’universitats va posar en marxa uns cursos preparatoris per als alumnes que ingressaven a la universitat (anomenats també “cursos propedèutics”, “cursos de matemàtiques zero”, “cursos d’anivellament”,etc.). La seva durada no sol excedir les tres setmanes i s’acostumen a fer els primers dies de setembre, abans de començar el curs acadèmic. El seu principal objectiu és *facilitar* el trànsit dels alumnes entre les dues institucions, “apedaçant” o “completant” els continguts matemàtics que s’estudien a Secundària amb aquells que es consideren imprescindibles per a cursar les assignatures de matemàtiques de primer cicle universitari.

Per a l’investigador en didàctica, aquests cursos constitueixen un reflex de l’anàlisi espontània que realitzen la majoria dels matemàtics universitaris sobre les insuficiències de la formació a Secundària i les seves possibilitats de posar remei. Deixarem aquí de banda la problemàtica del joc de poders, tensions i inèrcies que configura la relació entre les dues institucions i que va conduir la institució universitària a intentar mantenir l’antic estat de coses mitjançant un simple agregat de formació, en lloc de transformar i adaptar l’ensenyament universitari a la nova formació de Secundària.

Hem volgut copsar quines investigacions hi ha a nivell espanyol sobre la preocupació per la preparació (o “nivell”) amb què arriben els alumnes de Secundària a la Universitat. Hem centrat la nostra recerca en investigacions fetes en el camp de l’Administració i Direcció d’Empreses i les Ciències Econòmiques i Empresarials, que és on cenyirem la nostra experimentació. Per a això, ens hem remès a les actes publicades de les jornades que anualment se celebren des de l’*Asociación Española de Profesores Universitarios de Matemáticas para la Economia y la Empresa* (ASEPUMA), i des del *Congrés Internacional de Docència Universitària i Innovació.*

Els treballs que aborden el tema que estem tractant, van primordialment en les dues línies que descriurem a continuació. En primer lloc trobem treballs que proposen un diagnòstic del perfil d'alumne que arriba a la universitat, per tal d'esbrinar el perquè del fracàs d'aquest alumne durant el primer curs d'estudis.[12] A grans trets, aquests estudis retreuen el fracàs dels alumnes a la curta durada i "mala qualitat" dels estudis del batxillerat social i al fet que el perfil de l'alumne que hi accedeix és el d'un alumne poc motivat i sense vocació per a aquests estudis. També s'estudien els condicionants que afecten als alumnes per a l'aprenentatge de les matemàtiques empresarials, especialment la base matemàtica dels seus estudis anteriors i altres dades socioeconòmiques (estudi i professió dels pares, renda familiar, etc.) arribant a la conclusió prou coneguda que els fills de pares amb estudis universitaris o els que tenen un rendiment alt al batxillerat tenen generalment un rendiment més alt que la resta a la Universitat.

La segona línia de treballs se centra en donar solucions a les dificultats dels alumnes aportant petites variacions en els cursos de matemàtiques de primer per tal de millorar el rendiment acadèmic. En podem destacar dues propostes: una consisteix en modificar completament la metodologia didàctica emprada basant la nova organització didàctica en l'aprenentatge cooperatiu (Estapé 2005), l'altra es basa en la incorporació d'un "capítol zero" que aportaria una base econòmica per tal d'explicar les necessitats que provoquen la utilització de les matemàtiques a l'economia i l'empresa (Erice 2005).

La realitat, hores d'ara, és que gairebé qualsevol carrera on en el primer curs universitari contempla una assignatura de matemàtiques ofereix als estudiants la possibilitat de seguir algun d'aquests cursos propedèutics, ja sigui com a crèdits de lliure configuració ja sigui de forma gairebé obligatòria en forma d'un primer quadrimestre "zero". Davant d'aquesta realitat hem volgut analitzar com estan dissenyats aquests cursos i hem buscat informació sobre els aspectes següents:

- Quin va ser l'origen de la implantació del curs;
- Quina relació té el disseny del curs amb el del "curs acadèmic" habitual;
- Quina és la funció principal del curs;

- [12] Álvarez, Blanco, Guerrero i Quiroga (1998), Camacho, Fernández, Gómez, Masero, Vázquez i Zapata (2005), Camacho, García, Masero, Vázquez i Zapata (2005), Castellanos, González, González de Sela i Manzano (1998) Corcho, Cortés i Guerrero (2005), Escribano i Fernández (2005) i García Hernández (2001).

- Quina relació té amb les matemàtiques estudiades a secundària;
- Quina relació té amb les matemàtiques que s'estudiaran a la universitat;
- Quin efecte tenen aquests cursos en el "rendiment" dels alumnes durant el primer any d'estudis en la universitat;
- Quines responsabilitats (matemàtiques i didàctiques) ha d'aprendre a assumir l'alumne en aquests cursos i en què es diferencien de les que estava acostumat a assumir en l'ensenyament secundari.

Aquesta informació ens hauria també de permetre deduir una caracterització de les "tecnologies didàctiques" universitàries dominants (cf. § 1.2.5.) i les seves possibles conseqüències en les dificultats dels alumnes que arriben de Secundària. I ens hauria de donar informació sobre el tipus de diagnòstic espontani que fa la universitat sobre les deficiències dels alumnes que provenen de Secundària i la possibilitat de posar-hi remei.

2.2. Mapa actual dels cursos propedèutics

Tant al setembre de 2004 com al setembre de 2005 vam analitzat uns quants d'aquests cursos. La base empírica emprada per portar a terme aquesta anàlisi l'hem extreta dels següents dispositius:

- Entrevistes amb els dissenyadors dels cursos i amb els professors responsables d'impartir els cursos, tant dels cursos preparatoris com dels "acadèmics".
- Assistència a les classes d'alguns d'aquests cursos.
- Anàlisis dels apunts i materials, tant dels professors com dels alumnes.
- Anàlisis d'enquestes passades al final del curs als alumnes.
- Entrevistes amb els alumnes.

Entrevistant a professors responsables dels cursos "propedèutics" ens vàrem trobar que la majoria no havia pres part de la decisió d'implantar-los i, per tant, no tenien molt clara la raó de ser d'aquests cursos. Això ens va fer pensar que la seva implantació s'havia constituït com una "moda" imposada a cada universitat per no ser menys que les demés, sense plantejar-se'n la seva necessitat, eficàcia i pertinència del disseny. Davant la pregunta de quina relació té amb les matemàtiques que es veuran a la universitat, majoritàriament deien que tot i no avançar la matèria que es veurà a la universitat, sí que seleccionen aquells temes que són bàsics per desenvolupar les matemàtiques que formen part del "curs acadèmic".A la pregunta de quina relació té el disseny del curs de setembre amb el curs "normal" de matemàtiques de primer, les respostes apuntaven en la línia que no consideren que hi hagi d'haver cap relació ja que entenen els cursos "zero" com un repàs de Secundària. Davant la pregunta de quina relació té amb les matemàtiques estudiades a Secundària, deien majoritàriament que és un resum de les matemàtiques vistes a secundària.

Per establir quin efecte tenen aquests cursos sobre el "rendiment dels alumnes durant el primer any d'estudis en la universitat" ens trobem que, majoritàriament, els professors no havien fet mai cap estudi en aquesta línia. A més, com que aquests cursos gairebé mai no s'avaluen, tampoc no ens podien proporcionar dades que poguessin relacionar el rendiment dels alumes al curs amb el rendiment dels alumnes a l'assignatura acadèmica.

En definitiva, els professors van resultar ser una molt fluixa font d'informació sobre el motiu, el disseny i l'efecte d'aquests cursos sobre el rendiment dels alumnes. Això ens va conduir a una metodologia "naturalista" d'observació d'alguns d'aquests cursos.

2.2.1. Els programes

A continuació donem un mostra d'alguns dels cursos propedèutics que s'han ofert en els darrers tres anys en algunes universitats espanyoles amb les seves principals característiques. La informació l'hem extreta directament de les pàgines web de les universitats.[13]

Univ	Carrera	Nom	Nº Hores	Objectiu
UAB	A.D.E	***Curs propedèutic de matemàtiques per a economistes***	30	Situar al futur alumne d'economia i ADE en el nivell adequat de matemàtiques per tal de seguir amb més fluïdesa les assignatures de *Matemàtiques per a economistes I* i *II*
	Ciències Empresarials	***Introducció al Càlcul***	24,5	Exposar i revisar conceptes i tècniques bàsiques de càlcul que formen part dels temaris de cursos pre-universitaris, i que s'utilitzen en el currículum de la Diplomatura en CCEE o que són necessaris per a desenvolupar altres conceptes o eines que s'utilitzen
	E. Informàtica E. Química E.T Telecomunicacions E.T Industrial	***Taller per als Enginyers***	31,5	Aconseguir que els alumnes tinguin un nivell de matemàtiques adequat i homogeni per a poder seguir les diferents assignatures de la carrera. Es pretén evitar les inadequacions de continguts que a vegades els alumnes tenen per al seguiment de les assignatures, així com les diferències de nivell entre els alumnes procedents de diferents centres
	Física	***Curs propedèutic***	30	El principal objectiu d'aquest curs és familiaritzar l'estudiant amb algunes tècniques i conceptes que, tot i que han estat possiblement estudiats durant el batxillerat, seran fonamentals per al seguiment de les assignatures de primer curs de la titulació de Física. Es farà especial èmfasi en l'aspecte pràctic dels diferents temes.

[13] El lector interessat les pot trobar a la bibliografia.

	Matemàtiques Matemàtiques + E.Informàtica	***Curs propedèutic de matemàtiques***	30	Té com a finalitat fer un repàs de determinats aspectes matemàtics que s'han tractat al Batxillerat i que es consideren imprescindibles per cursar els estudis de matemàtiques.
UPC	Matemàtiques, Estadística. ETSAB, ETSETB ETSEIB, FIB, EUPB EUPVG, ETSEIT, ETSAV	***Quadrimestre 0***	1 Q	Mòduls d'introducció als estudis i reforç de les matèries bàsiques abans de l'inici dels estudis homologats, organitzats per alguns centres de la UPC.
UPF	Ciències Empresarials	***Introducció a les matemàtiques empresarials***	30	Té com a objectiu el reciclatge en aspectes bàsics per a cursar assignatures de Matemàtiques.
UdL	E.T. Agrària E.S. Agrària	***Curs Propedèutic de Matemàtiques***	--	Facilitar la transició de l'estudiant procedent de l'educació secundaria i millorar el rendiment acadèmic sense una disminució en la qualitat de la formació dels titulats
UIB	E.S	***Introducció a les matemàtiques***	--	Repassar els principals continguts matemàtics treballats a l'educació secundària que ens puguin servir per a poder desenvolupar amb major facilitat els diferents conceptes matemàtics que podem trobar en els diferents estudis d'Enginyeria
UV	E. Química E. Informàtica E.T Telecomunicacions	***Bases Matemàtiques***	--	L'objectiu d'aquest curs d'anivellament és establir els coneixements mínims requerits per a l'adaptació de l'estudiant al primer curs de la titulació.

Com s'ha pogut observar en la taula proporcionada, els cursos "propedèutics" van dirigits a un ampli ventall d'alumnes que iniciaran carreres molt diferents, on teòricament les matemàtiques hi tenen també diferents nivells de complexitat. Això podria fer pensar que el disseny i contingut de cadascun d'aquests cursos hauria de ser ben diferent. La realitat, però, no ens diu el mateix. La idea principal en la majoria d'aquests cursos és veure el *màxim nombre de continguts* en el poc temps que dura el curs, intentant fer un repàs exhaustiu de tota la matemàtica de Secundària, independentment de la seva importància en relació al curs acadèmic, i també del tipus d'alumnat a qui vagin dirigits els cursos.

En aquest sentit, no creiem massa agosarat classificar els cursos observats en dos grans grups, segons els tipus ideals de models docents que hem explicitat en el primer capítol.

a) Trobem, per una banda, cursos "*empiristes*" que combinen dues dimensions del procés d'estudi amb total preponderància: el moment del treball de la tècnica (model *tecnicista*) i els moments exploratori i del primer encontre (model *modernista*). El seu principal tret és l'estructuració del curs partint d'un llistat d'exercicis i problemes no massa articulats entre sí però més o menys organitzats per temes o àmbits temàtics. L'estudi d'aquesta llarga llista de problemes diferents condueix a l'alumne a viure una espècie d'"etern moment exploratori" que, per manca de temps, no esdevé mai massa productiu i que el professor acaba frustrant amb un "bombardeig" continu de recordatoris de tècniques i tecnologies de manera molt oportunista seguint les necessitats de cada cas. Els alumnes acostumen a veure així una gran quantitat d'OM puntuals i aïllades amb tots els seus components. Malgrat l'aparença d'una metodologia "activa" centrada en la resolució de problemes, el treball a l'aula l'acaba fent principalment el professor. Creiem que aquesta estratègia és la que domina en el cas dels cursos oferts en carreres científiques.
b) El segon gran grup el conformen el que anomenem cursos "d'*estil clàssic*" que combinen dues dimensions del procés d'estudi: el moment tecnologicoteòric (model *teoricista*) i el moment del treball de la tècnica (model *tecnicista*). El seu principal tret és veure desfilar una gran quantitats d'organitzacions matemàtiques seguint una successió de temes fixats a priori, on l'únic fil conductor entre ells, quan hi és, se situa al nivell del discurs teòric i no forma part de la responsabilitat matemàtica de l'alumne. Al final, l'alumne també acaba treballant amb una gran quantitat d'OM puntuals i aïllades, encara que el discurs del professor les presenti connectades i estructurades en OM locals o regionals. Creiem que aquesta estructura correspon més als cursos oferts en carreres de caire econòmic i social.

El gràfic següent (figura 4) resumeix el caràcter "bi-dimensional" que caracteritza aquests dos grans tipus d'organitzacions didàctiques:

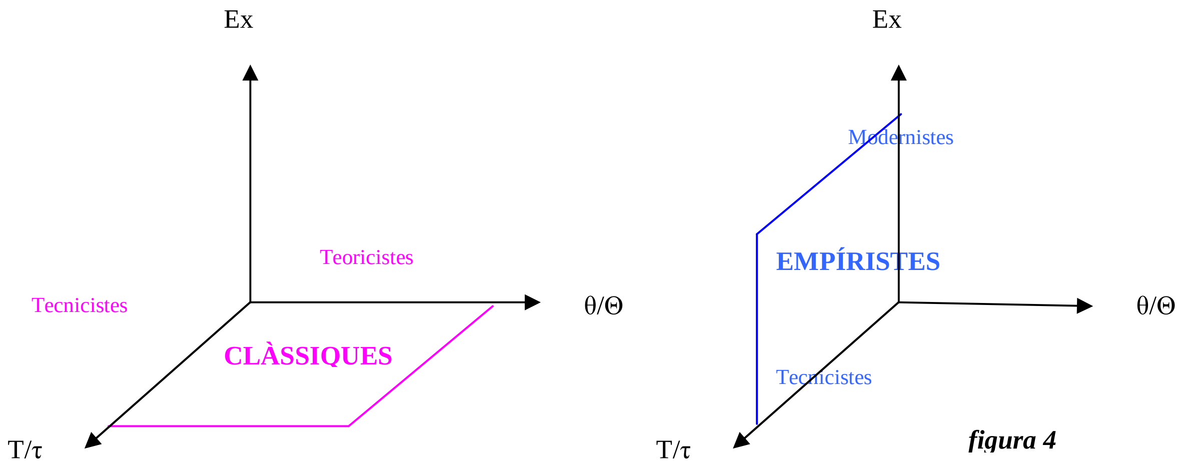


figura 4

Per tal de completar la descripció anterior, presentarem a continuació les característiques d'un curs de cada grup obtingudes a partir de l'observació de totes les seves sessions i del contrast d'impressions amb el professor responsable.

2.2.2. Estudi de casos: un curs "empirista"

El curs que detallem a continuació estava adreçat a futurs enginyers (informàtica, química, telecomunicacions i industrials) i va tenir lloc el setembre de 2005. Les observacions van ser realitzades per un membre del nostre equip d'investigació que va assistir d'observador a totes les sessions i va recollir el material dels alumnes (fulls distribuïts pel professor i apunts propis).

<table>
<tr><th>Hores</th><th>Sessions</th><th>Hores/Sessió</th><th>Nº Alumnes</th><th>Preu</th><th>Convalidable per crèdits?</th></tr>
<tr><td>31,5 h</td><td>9</td><td>3,5 h</td><td rowspan="2">25</td><td rowspan="2">90€</td><td rowspan="2">Es pot convalidar per 2 crèdits si s'assisteix amb aprofundiment</td></tr>
<tr><td colspan="3">De dilluns a divendres durant 2 setmanes</td></tr>
</table>

Condicions d'accés	Es fa una prova auto-evaluativa d'una hora de durada, que es fa de forma voluntària, i es corregeix a l'acabar.
Metodologia dels tallers	Classes interactives on els alumnes aprenen solucionant exercicis i problemes.

Bloc I	Bloc II	Bloc III
➢ Càlcul de potències i arrels ➢ Nombres combinatoris i binomi de Newton ➢ Repàs de funcions i gràfiques. Polinomis de primer i segon grau. ➢ Divisió de polinomis (Ruffini) ➢ Operacions amb fraccions algebraiques ➢ Equacions polinòmiques i irracionals. ➢ Logaritmes i equacions logarítmiques. ➢ Repàs de trigonometria. Equacions trigonomètriques. ➢ Progressions aritmètiques	➢ Sistemes d'equacions lineals. Mètodes de resolució. Discussió. ➢ Rectes i plans. Paral·lelisme, perpendicularitat, incidència.	➢ Càlcul de derivades. Equació de la recta tangent a la gràfica d'una funció. ➢ Creixement i decreixement de funcions. Màxims i mínims. ➢ Gràfiques de funcions. Límits. Límits indeterminats. ➢ Càlcul de primitives. Regla de Barrow. ➢ Àrees planes i volums de revolució.

Respecte al contingut matemàtic programat, observem que hi ha una gran quantitat d'organitzacions matemàtiques puntuals. Totes aquestes OM puntuals, per falta de problemes que les articulen, no aconsegueixen emmarcar-se en una OM local i no apareix cap organització temàtica de les diferents OM durant les sessions, ni un programa global que es vagi recorrent explícitament. Falta en efecte una *designació* de les agrupacions d'OM que es van veient desfilar, amb expressions concretes per definir els blocs tractats, a partir per exemple dels discursos tecnològics comuns a les distintes OM. Un símptoma clar d'aquesta absència el podem trobar amb el següent comentari del professor, que fa una presentació global del curs indicant únicament que "primer us donaré nocions teòriques i després fareu problemes", sense especificar ni nombrar els blocs de continguts en què s'agrupen aquestes nocions i problemes.

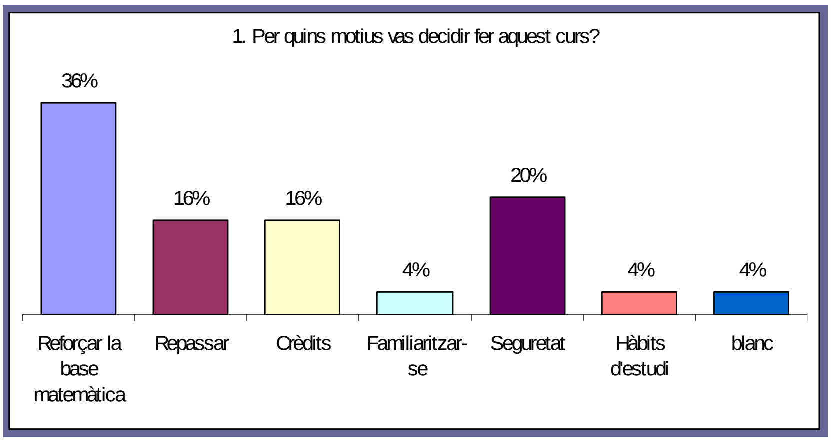
Respecte a l'*organització didàctica*, la majoria de sessions es desenvolupaven seguint un esquema com el següent: els alumnes disposen d'un llistat d'exercicis i problemes; al principi de cada sessió el professor pregunta als alumnes si recorden unes determinades propietats o tècniques de resolució; en recorda ràpidament els principis bàsics amb un o dos exemples i, seguidament, proposa als alumnes de fer els exercicis corresponents. A aquesta primera "fase", li en segueix una de similar amb una altra propietat o tècnica de resolució, fins a acabar el temps de la sessió. En certa manera, doncs, l'alumne rep un recordatori de tècniques i tecnologies (composades per definicions, exemples i propietats), en el que els exercicis només serveixen com a il·lustració de les tecnologies i l'ús de les tècniques. El ritme de treball és bastant ràpid, encara que el professor s'esperi a que cada alumne hagi fet l'exercici demanat i els atengui personalment per si tenen dubtes o qüestions per resoldre. El que falta és un fil conductor per lligar o articular una activitat amb la següent.

Podríem comptabilitzar que entre el 40 i el 50% del temps es dedica al treball personal dels estudiants a l'aula. En canvi, a falta d'una definició més detallada del *programa d'estudis*, la quantitat de treball per part dels alumnes *fora de l'aula* és molt menor, al no disposar de material organitzat ni d'objectiu final (examen) per realitzar.

Vegem a continuació els resultats de l'enquesta analitzada que es va passar als alumnes. Aquesta consta de 10 preguntes que presentem a continuació amb el resum de respostes dels 25 alumnes d'un dels grups.

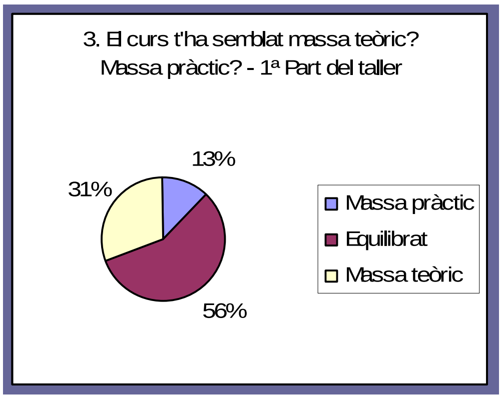
1. Per quins motius vas decidir fer aquest curs?
2. Creus que el curs he estat massa llarg? Massa curt?
3. El curs t'ha semblat massa teòric? Massa pràctic?
4. Creus que s'han estudiat massa temes diferents
5. Creus que s'han deixat molts temes importants per tractar?
6. Dels temes (i dels tipus de problemes) tractats en el curs, quin ja havies estudiat a Secundaria?Els havies estudiat de la mateixa manera?
7. Sabies fer, dia a dia, la feina necessària per a seguir el curs? Quantes hores diàries necessitaves?
8. Nota global de matemàtiques (Batxillerat + PPAU)?
9. Creus que aquest curs et serà útil per millorar el teu rendiment en els futurs estudis d'informàtica?
10. Comentaris sobre el curs en general

Resum de respostes:



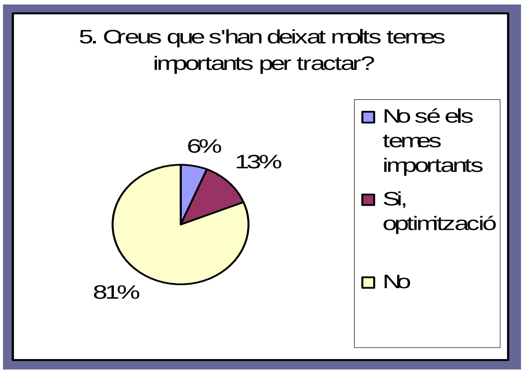
Donat que el curs va adreçat a futurs enginyers, semblava una mica inquietant que majoritàriament haguessin escollit fer el curs pels problemes que veuen a priori amb les matemàtiques. Caldrà prestar atenció al perfil d'alumne que ha escollit fer aquest curs (això ho analitzarem a la pregunta 8).

Sembla que la concentració d'hores en tants pocs dies no els hi ha creat excessius problemes. Aquest és un fet que trobem en les diferents enquestes passades en diferents cursos.

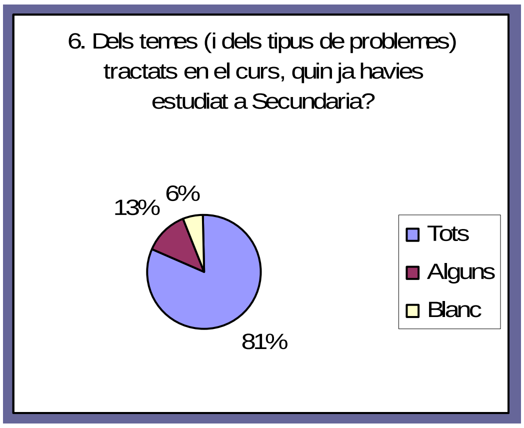


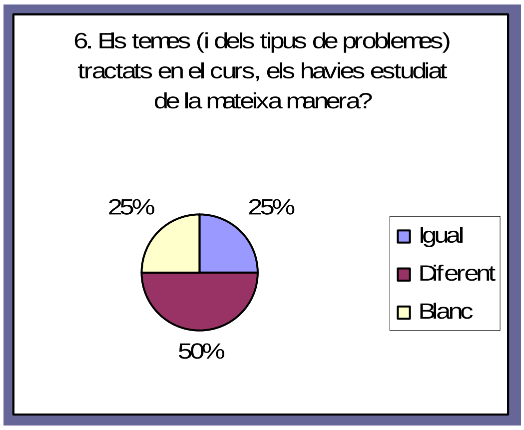
Cal indicar que el curs va estar dividit en dos parts impartides per dos professors diferents. L'estructura en sí no es va modificar, però sí que vam voler reflectir en l'enquesta si havien trobat diferències entre una part i l'altra. Tal i com podem veure, el fet del professor no va influir ja que en tots dos casos, van considerar que havia estat equilibrat, amb una tendència més teòrica que pràctica.

És curiós que davant la quantitat d'organitzacions matemàtiques que s'arriben a veure en tants pocs dies, els alumnes no siguin capaços de criticar-ho i els hi sembli que no han vist molts temes diferents. Creiem que això és degut a com estan acostumats a treballar a Secundària.

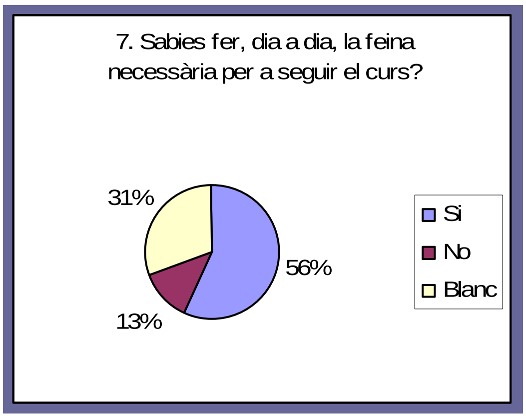


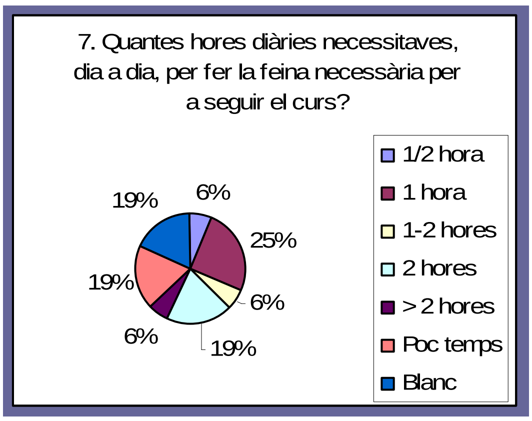
La pregunta és una mica "estranya" tal i com ens ho fa veure en la resposta d'un alumne: "no sé quins són els temes importants".
Tot i això, majoritàriament els sembla que no s'han deixat cap tema important.



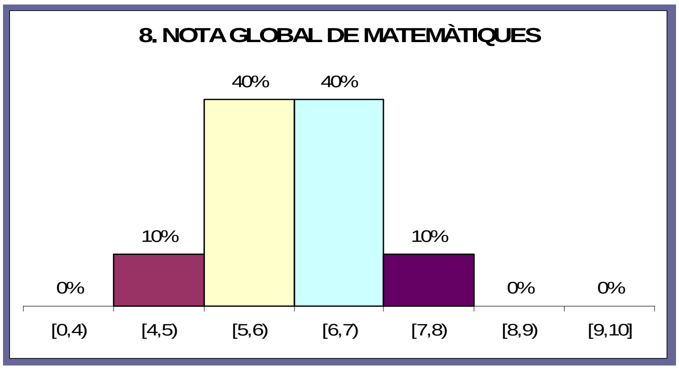


No ens sorprenen les respostes a la primera pregunta tenint en compte la resposta donada anteriorment. Ara bé, pels comentaris apuntats, la segona pregunta sembla indicar que consideren que els temes s'havien estudiat de manera diferent ja que no se'ls ha deixat temps per practicar amb més calma cada tipus de problema i tema introduït.

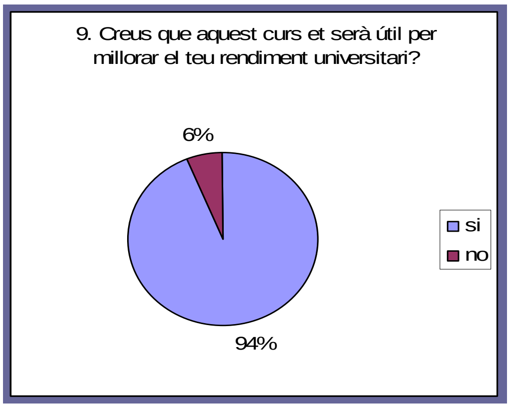




No sembla, al veure aquestes respostes, que els alumnes hagin dedicat molt de temps "extra" a preparar l'assignatura. S'ha d'entendre que, al no tenir cap examen a final del curset, no s'havien d'amoïnar en excés, i no hem d'oblidar que són alumnes que encara estan de vacances i que fan el curs de forma voluntària.



Observant la gràfica de les notes globals de matemàtiques (Batxillerat + Selectivitat), veiem que són alumnes bons tot i que, no excessivament brillants. D'una altra banda, és normal que siguin així ja que la nota mitjana per accedir a aquesta carrera està per sobre del 6, cosa poc compatible amb una nota de matemàtiques baixa.



Com era d'esperar, la majoria creu que aquest curs els hi serà de molta utilitat. No disposem d'informació complementaria per saber "en què" creuen que els hi serà útil.

Els comentaris generals sobre el curs (pregunta 10) han estat globalment força positius. Els aspectes negatius que comenten estan relacionats amb la durada de les sessions ("Fer dues parts d'una hora i mitja es pot fer pesat"), amb la poca participació dels alumnes ("Faria falta més participació per part dels alumnes. És una bona idea que es canviï de professor, ja que així ens adaptem a la forma d'explicar de cadascun") i a la poca relació amb la carrera que estudiaran ("El curs hauria d'anar més enfocat a la preparació cap a la informàtica").

2.2.3. Estudi de casos: un curs d'"estil clàssic"

El curs que detallem a continuació estava adreçat a futurs estudiants d'empresarials i va tenir lloc el setembre de 2005. Les observacions van ser realitzades per un membre del nostre equip d'investigació que va assistir d'observador a totes les sessions i va recollir material dels alumnes.

Hores	Sessions	Hores/Sessió	Nº Alumnes	Preu	Convalidable per crèdits?
24,5 h	7	3,5 h	80	60€	Es pot convalidar per 1,5 crèdits si s'assisteix al 80% de les classes, es presenten dos grups de problemes i s'aprova l'examen final
De dilluns a dijous durant 2 setmanes					

Condicions d'accés	Tenen prioritat els que no han cursat les matemàtiques del batxillerat.
Metodologia dels tallers	La introducció de la major part dels conceptes i definicions del curs es motivarà a partir de l'ús d'un programa matemàtic específic que tindrà el paper de "laboratori d'assaig" d'un enfocament intuïtiu, facilitant així el pas a un anàlisi més formal del contingut del curs, que constitueix el veritable nucli del mateix.

Bloc I: Elements bàsics de treball amb nombres: dels naturals als reals	**Bloc II:** Models matemàtics per a explicar relacions entre dades	**Bloc III:** Les funcions fonamentals i el seu ús
➢ Nombres ➢ Càlcul algebraic ➢ Equacions de 1r grau ➢ Sistemes d'equacions	➢ Successions: progressions ➢ Successions: convergència ➢ Funcions: propietats generals	➢ F. Afins ➢ F. potencials ➢ F. polinòmiques ➢ F. racionals ➢ F. exponencials ➢ F. logarítmiques ➢ F. Trigonomètriques

Respecte al contingut del curs, observem que aquest està format per gran quantitat d'OM Puntuals. A diferència del cas anterior, aquí sí que existeix una articulació a *nivell tecnològic* que agrupa les OM en blocs temàtics: nombres, relacions entre dades, funcions.

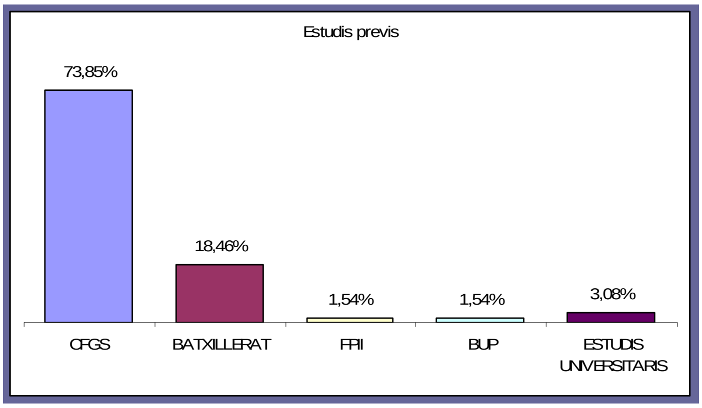
Respecte a l'*organització didàctica* global, podem parlar que es tracta d'una OD clàssica amb predomini de trets "teoricistes", en la que el professor presenta els ingredients de les OM que l'alumne ha de saber activar, amb alguns ingredients tecnològics com a recolzament al seu discurs. L'espai de treball del professor i dels alumnes queda clarament diferenciat: l'alumne té un dossier que conté tots els apunts necessaris per a seguir el curs així com propostes d'exercicis que ha d'anar resolent, que se li corregeixen i retornen posteriorment, així com una prova final individual. En canvi, a classe, el pes principal del treball recau sempre sobre el professor que realitza, en major part, una *presentació discursiva-ostensiva* de les tecnologies i tècniques de cada OM, posant més èmfasi en les nocions bàsiques i les tècniques de resolució que en els tipus de qüestions problemàtiques de les que sorgeixen o podrien sorgir aquestes OM o en els tipus de problemes que les conformen. En promig trobem que el 70% del temps de classe s'ha dedicat a l'exposició del professor i la resta al treball dels alumnes a classe.

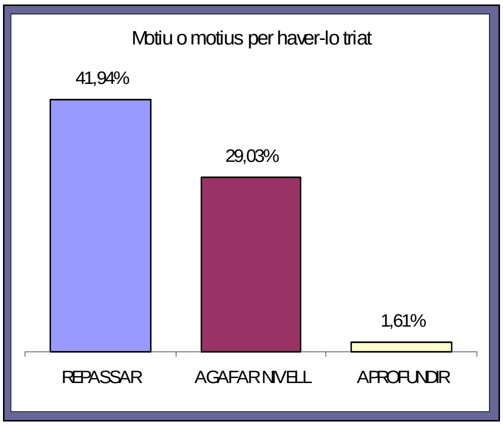
Respecte al treball individual dels alumnes, els tipus de problemes que se'ls demana realitzar fora de classe s'acostumen a agrupar en dos blocs: un dedicat a exercicis de manipulació algebraica formal (sense modelització ni tipus de problemes als que aportar alguna resposta) i altre, amb una miscel·lània d'exercicis i problemes de les diferents OM presentades a classe.

A continuació, presentem els resultats de l'enquesta que el professor del curs (i no l'investigador-observador) va passar als alumnes. No coincideix amb l'anterior, tot i presentar-ne força similituds. Està formada per les 10 preguntes següents, les dues primeres i la última obertes, la resta tancades, mesurades amb l'escala de valoració gens/poc/força/molt:

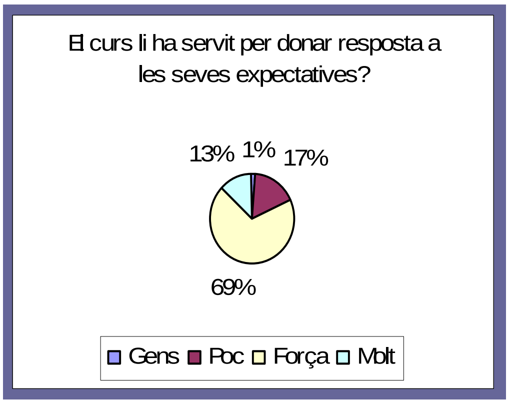
1. Estudis que heu cursat (oberta)
2. Motiu o motius per haver triat el curs (oberta)
3. El curs li ha servit per donar resposta a les seves expectatives
4. El curs li ha servit per aprofundir en el coneixement del tema
5. Considera adequada la selecció dels continguts treballats
6. Considera adequada la durada prevista per a cadascun dels temes
7. Considera adequada la metodologia emprada
8. Considera adequada la forma d'avaluació
9. Indica el grau d'adequació de la periodicitat
10. Comentaris generals (oberta)

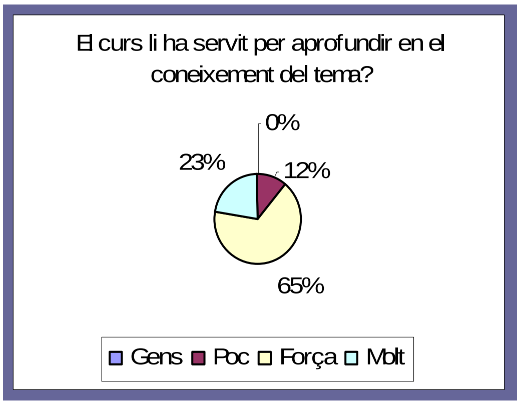
El resum de resultats és el següent:



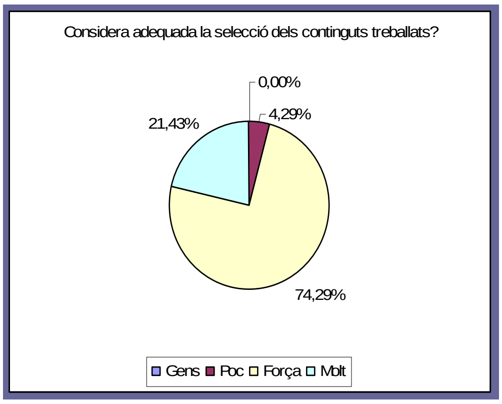


Una gran majoria dels alumnes prové de cicles formatius. Això implica una preparació matemàtica més baixa que el grup considerat anteriorment. Aquesta diferència era d'esperar ja que les carreres socials no exigeixen tenir una base matemàtica tan forta com en les carreres científiques i es veu també reflectit en els motius que tenen els alumnes per triar el curs.

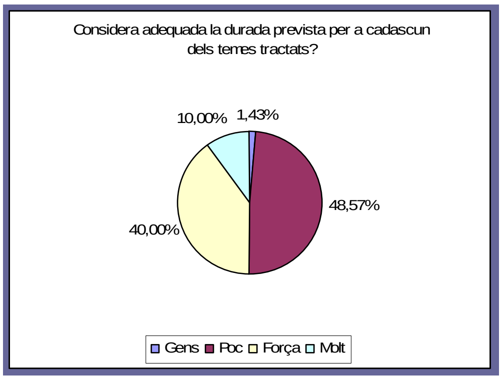




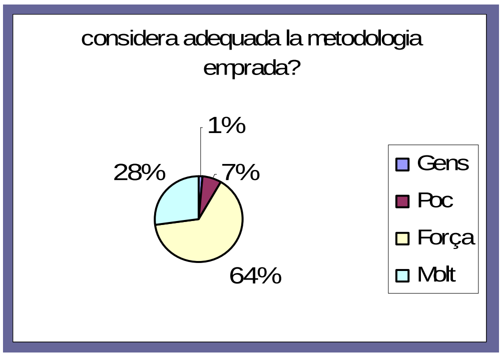
Pel que acabem de comentar, al ser alumnes que necessiten reforçar la seva base matemàtica, les respostes són, lògicament molt positives.



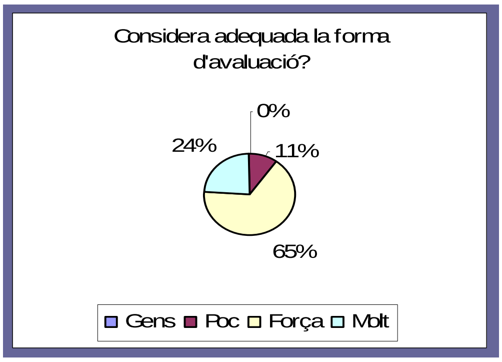
Tot i que la resposta és positiva, s'ha de dir que els alumnes no disposen, en la seva gran majoria, de la capacitat per validar si els continguts treballats són adequats o no. És per això que no volem atorgar massa importància a aquesta pregunta, ja que indica, com l'anterior, un grau de satisfacció elevat..



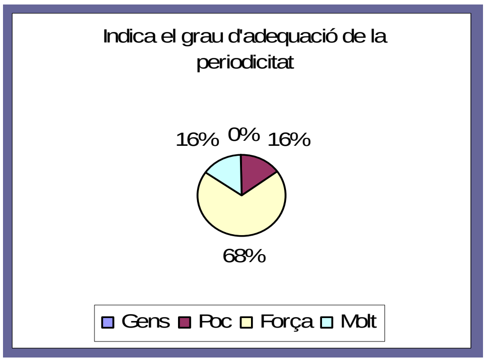
A diferència del cas anterior, aquí els alumnes consideren que la durada prevista hauria de ser més elevada, ja que molts aborden els temes tractats per primera vegada i, per tant, necessiten dedicar-hi més temps



Ens sembla que el fet de disposar d'un dossier des del principi de curs on estan tots els apunts necessaris per al seguiment del curs, facilita molt la dinàmica del curs, tant per al professor com per l'alumne.



El fet que s'hagin d'entregar dos exercicis durant el curset, puntuables, i que a més s'hagi de fer una prova al final, ho consideren de forma positiva, majoritàriament. Un dels motius que apunten és que els obliga a començar a prendre responsabilitats matemàtiques.



Les classes es fan de forma intensiva durant dues setmanes a principis de setembre, tres hores i mitja per les tardes, fent un total de 24’5. No sembla que aquesta distribució hagi creat algun problema als alumnes, ja que majoritàriament hi estan d’acord.

Finalment es demana als alumnes que facin comentaris o suggeriments sobre el curs. La gran majoria dels comentaris van en la línea d’allargar la durada del curs, ja que han constatat el seu baix nivell en matemàtiques i això els espanta de cara a iniciar el curs acadèmic. Altres comentaris que trobem són la reducció de la mida del grup o la possibilitat de fer més exercicis. Evidentment trobem opinions contràries, ja que hi ha alumnes que sol·liciten ampliar el temari donat, símptoma clar que no els feia falta fer el curs, i d’altres que demanen anar més a poc a poc.

2.3. Conclusions

L'estudi dels dos casos que acabem de presentar constituïa, en la nostra recerca, un estudi exploratori del tipus de cursos propedèutics que s'imparteixen a Catalunya i no pretén, en cap moment, servir com a avaluació de l'eficàcia o qualitat d'aquests cursos. Els presentem aquí perquè representen, per a nosaltres, dos casos "extrems" d'organitzacions didàctiques ideades per a resoldre el problema de la transició entre la Secundària i la Universitat.

L'anàlisi del repartiment de responsabilitats entre professor i alumnes (contracte didàctic), així com el tipus d'activitat matemàtica que els alumnes es veuen portats a realitzar, mostra que els cursos fan passar els alumnes per una quantitat molt important d'OM diferents per tal de recobrir, en certa manera, la quasi totalitat del currículum de Secundària. El temps limitat de què es disposa per aquest objectiu tan ambiciós no deixa llavors massa temps perquè els alumnes puguin viure els diferents moments del procés d'estudi. En conseqüència, cada curs es limita a proposar alguns moments privilegiats que, suposadament, permet fer una "reconstrucció ràpida" de les OM considerades. Aquests són el *moment tecnològic* o bé el *moment exploratori*, acompanyats llavors d'un *moment del treball de la tècnica* que, per motius de manca de temps, apareix sempre interromput abans de poder ser productiu. Així doncs, en cap cas no es dóna temps i espai per al treball de desenvolupament tècnic i de qüestionament teòric necessari per construir organitzacions matemàtiques *locals* que agrupin i atorguin més flexibilitat i eficàcia a les tècniques i tecnologies que els alumnes aprenen a utilitzar a Secundària. Ens sembla doncs que aquest tipus d'organització didàctica, no només no contribueix a pal·liar la desarticulació de les OM que s'estudien a Secundària, sinó que encara reforçarien el seu aïllament.

Podem formular aquesta hipòtesi de la forma següent:

H(CP): Els cursos "propedèutics" del tipus observat, en comptes de proposar elements articuladors del bagatge matemàtic dels alumnes, *contribueixen a augmentar l'aïllament* de les OM que s'estudien en Secundària

Una primera explicació d'aquest fenomen rau en el fet que aquests cursos *s'organitzen mitjançant organitzacions didàctiques uni o bidimensionals* (teoricistes, tecnicistes, "modernistes" o "clàssiques") que reforcen un o dos moments del procés d'estudi en detriment dels altres. En conseqüència, els processos d'estudi que en resulten no permeten reconstruir OM *locals* relativament completes que agrupin les OM puntuals estudiades a Secundària atorgant-los la flexibilitat tècnica i el desenvolupament tecnològic suficient per fer-ne instruments eficaços per a l'estudi de noves qüestions problemàtiques.

Aquesta anàlisi ens va conduir a fer una proposta de curs propedèutic alternativa que va, en certa manera, en sentit contrari als cursos observats en aquest capítol. Si, com hem postulat, el principal handicap amb el que arriben els estudiants a la universitat és la seva incapacitat per articular coneixements teòrics i pràctics per formar estratègies de resolució, que vagin més enllà de la simple aplicació de tècniques puntuals a problemes aïllats, llavors creiem que l'objectiu d'un curs de transició Secundària – Universitat hauria de facilitar aquest treball als alumnes. En comptes d'una revisió ràpida, i necessàriament superficial, d'una part important dels coneixements que els alumnes acaben d'estudiar (o dels que haurien d'haver estudiat), els proposem dur a terme un estudi detallat i en profunditat d'unes poques qüestions problemàtiques i amb interès pels estudiants, que els condueixin a connectar coneixements, a qüestionar les tècniques apreses i a desenvolupar-les fins dotar-les de més abast i validesa. És el que veurem al següent capítol d'aquesta memòria.

Capítol 3. Disseny i experimentació d’un curs propedèutic

3.1. Anàlisi a priori de l'organització matemàtica

A partir dels resultats sobre les discontinuïtats matemàtiques i didàctiques entre la Secundària i la Universitat presentades en el capítol 1, reforçats per la nostra anàlisi exploratòria dels cursos propedèutics existents actualment a les universitats espanyoles, proposem dissenyar i experimentar un curs que compleixi les característiques següents:

(1) Es proposi com a objectiu general *l'articulació d'unes quantes OM puntuals* o *locals* estudiades a Secundària, que presentin un grau baix de "completesa", que els alumnes no són capaços de connectar espontàniament i que formen part d'una *OM local central* en el programa de l'assignatura de matemàtiques dels estudis universitaris que enceten.

(2) L'articulació d'aquestes OM puntuals es faci com a resposta a una *qüestió problemàtica inicial* que tingui interès per als alumnes, ja sigui perquè està relacionada amb els estudis universitaris triats o perquè els afecta en algun aspecte de les seves vides. La intenció és que l'articulació de les OM puntuals tingui una *funcionalitat matemàtica* i no respongui (només) a pressions del contracte didàctic.

(3) L'organització didàctica que ha de permetre la reconstrucció de l'OM local a partir de les OM puntuals que "aporten" els alumnes ha de provocar *que sorgeixin i s'integrin de manera funcional els diferents moments del procés d'estudi* sense que hi hagi el predomini d'alguns pocs en detriment dels altres.

3.1.1. L'organització matemàtica local que es vol reconstruir

La qüestió inicial Q_0 que hem triat com a punt de partida del procés didàctic pot condensar-se en l'estudi de desigualtats del tipus $f(x) \geq g(x)$ on f i g són funcions "elementals" de variable real. L'origen d'aquesta qüestió es vincula a un problema de comparació de magnituds econòmiques:

Q_0**:** *Determinar per quines vendes els ingressos d'una empresa són majors que els costos, o els preus unitaris majors que els costos mitjos, o els beneficis majors que un valor donat, o els costos menors que un valor donat, etc*.

Si modelitzem els ingressos, costos, preus unitaris, costos mitjos i beneficis d'una empresa mitjançant funcions que depenen d'una única variable – les vendes –, llavors la qüestió plantejada condueix a l'estudi d'una desigualtat del tipus considerat. Suposarem en tots els casos que el model matemàtic $f(x) \geq g(x)$ ja està donat (és a dir, no demanarem als alumnes que determinin les funcions a partir de certes informacions sobre l'empresa) i que el problema resideix en determinar els valors de *x* per als quals es compleix la desigualtat.

L'organització matemàtica que permetrà donar resposta a la qüestió inicial Q_0 pot considerar-se com una articulació de tres OM puntuals que s'estudien a Secundària:

(1) La *resolució d'equacions* (lineals i quadràtiques, cúbiques amb arrels enteres o racionals, logarítmiques o exponencials molt senzilles), que designarem per OM_{EQ};
(2) La *resolució d'inequacions algebraiques* (de primer i segon grau bàsicament), molt incipient a Secundària i que designarem per OM_{IN};
(3) La *representació gràfica de funcions elementals* (polinomis de grau ≤ 3, funcions exponencials i funcions racionals), que designarem per OM_G.

Per als estudiants que acaben el batxillerat, aquestes tres OM apareixen molt poc connectades entre sí. L'estudi d'equacions forma part del treball algebraic amb expressions de primer i segon grau que els alumnes estudien amb anterioritat a la introducció de les funcions. La resolució dels altres tipus d'equacions (cúbiques o logarítmiques i exponencials elementals) apareix en diferents temes del currículum, potser lligat a l'estudi de funcions però molt poc vinculat a la seva representació gràfica. Si bé la resolució d'equacions pot aparèixer com una subtècnica per a la representació gràfica de funcions, les gràfiques no s'utilitzen mai com a eina per resoldre equacions ni inequacions. De fet, dins l'estudi de funcions, les gràfiques sempre apareixen com el producte final d'una tècnica molt estandarditzada que comença amb la determinació del domini, després l'estudi dels límits de la funció en els punts frontera del domini, la determinació dels punts de tall amb els eixos, el càlcul de la derivada, l'estudi de la monotonia, la concavitat i la convexitat, etc. En aquest sentit, la gràfica és sempre l'objectiu únic i final del procés, no es considera mai com un model de la relació entre dues magnituds que pot resultar útil per resoldre problemes. Els alumnes aprenen a representar funcions, però no aprenen a fer res amb aquestes representacions. Per aquest motiu, cada funció, sigui o no elemental, es considera com un element aïllat, quasi com un pretext per posar en marxa els passos especificats prèviament (domini, límits, etc.) que condueixen a la construcció de la gràfica. En particular, no s'estudien les famílies de funcions elementals com tals, ja que per elles el procés anterior no es necessari.[14]

La hipòtesi que assumim és que, després dels estudis de Secundària, els alumnes són capaços globalment de realitzar, dins de cada OM, els següents tipus d'activitats:

- **OM_{EQ}:** Resoldre equacions de primer grau mitjançant manipulacions algebraiques, resoldre equacions de segon grau aplicant la fórmula del discriminant (encara que l'equació sigui del tipus $ax^2 + bx = 0$ o $ax^2 + c = 0$), resoldre equacions de tercer grau amb arrels racionals utilitzant la tècnica de factorització de Ruffini i resoldre equacions exponencials del tipus $a \cdot b^x = c$.
- **OM_{IN}:** Resoldre inequacions de primer grau mitjançant manipulacions algebraiques i, en alguns casos, resoldre inequacions polinòmiques del tipus

  $$(x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot ... (x - x_n) = 0,$$

  amb $x_0, x_1, ..., x_n$ nombres racionals.
- **OM_G:** Donada una funció elemental $f(x)$, buscar el domini, límits, punts de tall amb els eixos, intervals de variació, etc. fins arribar a la representació gràfica.

Presentem a continuació, a mode de *Model Epistemològic de Referència,* la manera com aquestes tres OM proporcionen els ingredients necessaris per produir una resposta a la qüestió inicial considerada i com la producció de la resposta articula aquests ingredients inserint les OM considerades en una OM *local* més àmplia i complexa. A partir d'aquest model de recorregut matemàtic, formularem l'anàlisi a priori de l'organització didàctica que proposem experimentar en el curs propedèutic dissenyat. Finalment descriurem

[14] En efecte, com veurem abastament més endavant, a partir de la gràfica de $f(x)$ es poden obtenir mitjançant un procés ràpid les gràfiques de funcions del tipus $af(x - b) + c$.

l'experimentació realitzada i la seva avaluació a posteriori a partir dels resultats obtinguts.

3.1.2. Presentació del Model Epistemològic de Referència

La reconstrucció d'una organització matemàtica local que vagi més enllà de la simple aplicació d'una tècnica per resoldre un tipus de problemes requereix partir d'un qüestionament "potent" que guiï i, alhora, justifiqui el procés d'estudi que cal emprendre. En el nostre cas, la qüestió problemàtica que hem triat és:

Q_0: Per a quines x es compleix $f(x) \geq g(x)$ si f i g són funcions qualssevol?

Davant la impossibilitat de donar una resposta única a aquesta qüestió, es decideix considerar casos particulars de la mateixa prenent com a criteri les *famílies* de funcions f i g considerades: funcions afins, quadràtiques, cúbiques, hiperbòliques i exponencials. Es veurà que, a l'introduir noves famílies de funcions, la tècnica utilitzada per resoldre la desigualtat s'haurà d'anar modificant. Es pot considerar doncs que la variable "família de funcions" constitueix el *motor* de la dinàmica de l'estudi.

3.1.2.1. El cas de les funcions afins

La primera sub-qüestió que es planteja és la següent:

Q_1: Per a quines x es compleix $f(x) \geq g(x)$ si f i g són funcions afins?

Es consideren dues tècniques potencialment disponibles:

- $\tau_{\text{algebraica}}$: ***tècnica algebraica***, basada en la manipulació de la desigualtat.

  Donat $ax + b \geq cx + d$:

  Si $a > c$, s'obté: $ax + b \geq cx + d \Leftrightarrow (a - c)x + (b - d) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{d - b}{a - c}$.

Si $a < c$, canvia el sentit de la desigualtat: $ax+b \geq cx+d \Leftrightarrow x \leq \dfrac{d-b}{a-c}$.

En l'ensenyament secundari espanyol, les dificultats amb els canvis de sentit de les desigualtats provoca la substitució de la tècnica anterior per una altre tècnica que redueix la resolució de les desigualtats a la de les equacions corresponents. En primer lloc es resol l'equació $f - g = 0$ i després s'avalua la funció $f - g$ en un punt de cadascun dels intervals delimitats per les solucions:

- $\tau_{\text{algebraicoequacional}}$: ***tècnica "algebraicoequacional"***, basada en la reducció de la desigualtat a l'equació corresponent.

  Donat $ax+b \geq cx+d$, es considera: $ax+b = cx+d \Leftrightarrow ax+b-cx-d=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{d-b}{a-c}$.

  S'avalua $f - g$ en un punt de $\left(-\infty, \dfrac{d-b}{a-c}\right)$ i en un altre de $\left(\dfrac{d-b}{a-c}, \infty\right)$, i es decideix el signe de la desigualtat ($f < g$ ó $f > g$).

A l'ensenyament secundari, *l'entorn tecnologicoteòric* de les dues tècniques anteriors es limita a les regles del càlcul algebraic i equacional (d'aquí l'evolució de $\tau_{\text{algebraica}}$ cap a $\tau_{\text{algebraicoequacional}}$). De totes formes, en aquest cas, un raonament gràfic basat en les pendents de les rectes associades a les funcions afins permet donar una justificació senzilla al canvi de signe de la desigualtat quan $a < c$.

3.1.2.2. El cas de les funcions quadràtiques

La segona sub-qüestió que es planteja és la següent:

Q_2: Per a quines x es compleix $f(x) \geq g(x)$ si f i g són funcions polinòmiques de 2n grau?

Quan $f - g$ és un polinomi de segon grau, la ***tècnica algebraica*** fracassa.[15] La ***tècnica algebraicoequacional*** segueix sent eficaç encara que requereix en alguns casos un número elevat de càlculs (per exemple, haver de substituir un valor de cada interval en

[15] En efecte, una possible resolució de $ax^2 + bx + c \geq 0$ consistiria en "completar quadrats" fins obtenir una inequació equivalent del tipus $a(x-p)^2 + q \geq 0$. Aquesta inequació es transforma en $(x-p)^2 \geq -q/a$ i, després d'una discussió sobre el signe de $-q/a$, es pot arribar a la solució: $|x-p| \geq \sqrt{-q/a}$. Però aquesta tècnica està molt lluny del treball matemàtic que es fa a Secundària.

la funció $f - g$). També presenta certa "complexitat" a nivell tecnològic: cal escriure la funció quadràtica $f - g$ com un producte de dos factors afins (factoritzar) i estudiar el signe del producte en funció del signe de cada factor. Curiosament, aquesta tècnica acostuma a fracassar (en mans dels estudiants) quan la funció quadràtica no té arrels reals.

Per raons d'economia i fiabilitat, té sentit llavors considerar una tercera tècnica basada en la representació gràfica de f i g.

- $\tau_{\text{gràfica}}$: ***tècnica gràfica***: s'esbossen les 2 paràboles $y = f(x)$ i $y = g(x)$ i s'estableix gràficament en quins intervals $f(x) \geq g(x)$. Per determinar numèricament els intervals solució, es calculen els punts de tall, si existeixen.

Vegem ara la construcció d'aquesta tècnica gràfica que permet representar la gràfica de $f(x) = a(x - b)^2 + c$ a partir de la de $f(x) = x^2$ i la gràfica de $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ a partir de la de $f(x) = a(x - b)^2 + c$.

Construcció de la tècnica gràfica

1. Translacions: pas de $f(x) = x^2$ a $f(x) = (x - b)^2 + c$

- Per una banda, es considera la gràfica de $f(x) = x^2$ i se li aplica un desplaçament horitzontal de b unitats per obtenir la gràfica (*figura 1.1*) de $f(x) = (x - b)^2$ on el seu vèrtex s'ha desplaçat del punt (0,0) al punt (b,0).
- Per altra banda, si a la gràfica de $f(x) = x^2$ se li aplica un desplaçament vertical de c unitats, s'obté la gràfica (*figura 1.2*) de $f(x) = x^2 + c$ on el seu vèrtex s'ha desplaçat del punt (0,0) al punt (0,c).
- Finalment, combinant els dos desplaçaments, s'arriba a la gràfica (*figura 1.3*) de $f(x) = (x - b)^2 + c$, on el seu vèrtex s'ha desplaçat del punt (0,0) al punt (b,c).

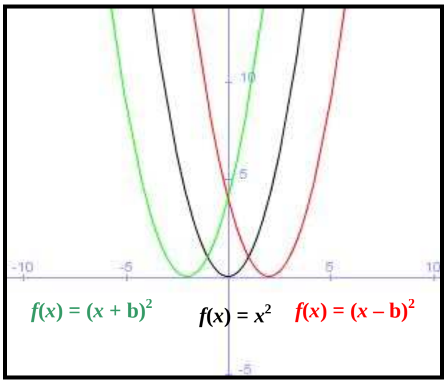


figura 1.1

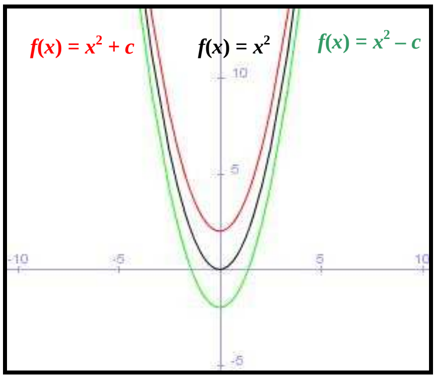


figura 1.2

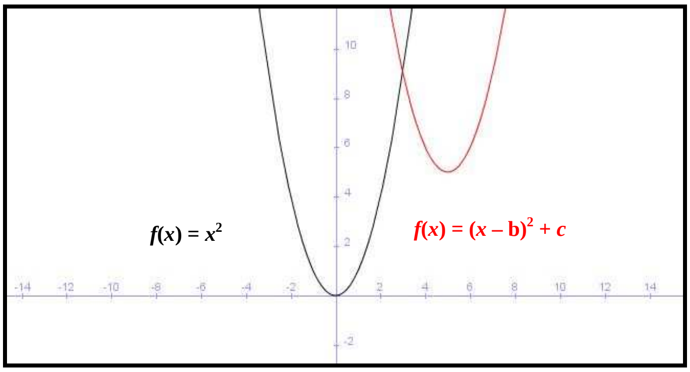


figura 1.3

2. Dilatacions: Pas de $f(x) = x^2$ a $f(x) = ax^2$

- Si $0 < a < 1$ es té que la paràbola resultant és més "ample" que la $f(x) = x^2$ però el vèrtex no ha variat la seva posició (*figura 1.4*).
- Si $a > 1$ es té que la paràbola resultant és més "estreta" que la $f(x) = x^2$ però el vèrtex no ha variat la seva posició (*figura 1.4*).

Si *a* és negativa la paràbola "canvia de sentit" però es mantenen les consideracions anteriors (*figura 1.5*).

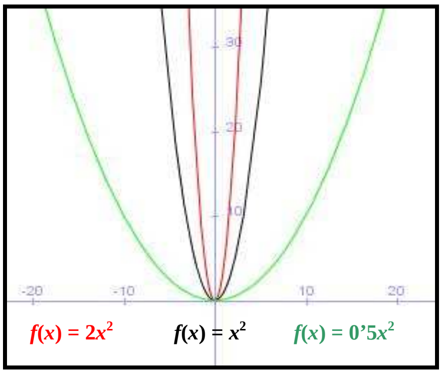


figura 1.4

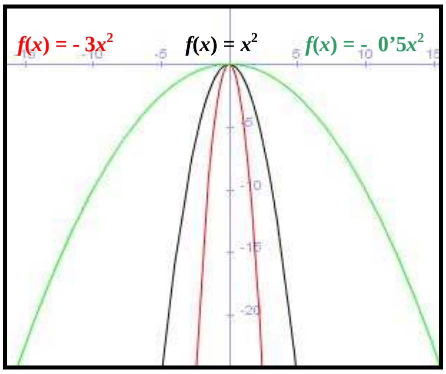


figura 1.5

3. Combinacions: com passar de $f(x) = x^2$ a $f(x) = a(x - b)^2 + c$

S'aplica un desplaçament del vèrtex punt (0,0) al punt (b,c) i es modifica l'amplada en funció del valor d'a en els termes explicats abans (*figura 1.6*)

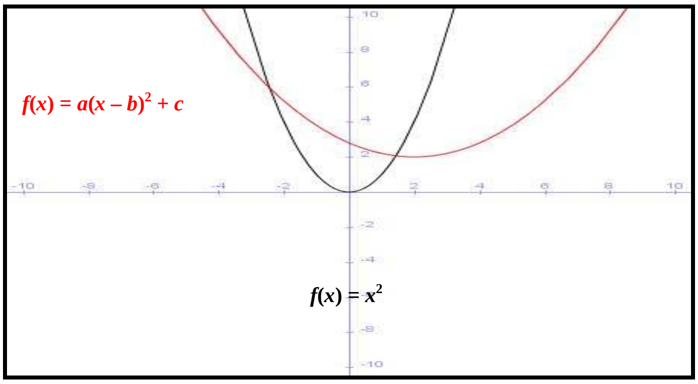


figura 1.6

A la pràctica, aquesta última tècnica resulta més eficient que les algebraiques. Per una banda, la representació gràfica permet determinar molt ràpidament la solució quan les dues paràboles no es tallen o es tallen en algun punt evident. Per altra banda, la tècnica és menys sensible a possibles errades numèriques ja que la gràfica permet obtenir a priori un valor aproximat de les solucions.

Notem també que $\tau_{\text{gràfica}}$ dóna resposta a la qüestió Q_1 i, sobretot, permet resoldre de manera eficaç les desigualtats on f i g són funcions quadràtiques i afins "elementals" (de representació gràfica immediata, com per exemple $x^2 \leq x - 3$).

4. Cas general: com passar de $f(x) = x^2$ a $f(x) = Ax^2 + Bx + C$

La tècnica anterior es pot ampliar fàcilment al cas en què la paràbola es presenta en la forma canònica $f(x) = Ax^2 + Bx + C$. En efecte, desenvolupant l'expressió $a(x - b)^2 + c$, s'obtenen les equivalències:

$$A = a, \quad B = -2ab, \quad C = ab^2 + c.$$

La gràfica es dedueix llavors del càlcul del vèrtex d'abscissa $-B/2A$, de la "posició" de la paràbola ($A > 0$ ó $A < 0$) i, si s'escau, del càlcul dels punts de tall amb l'eix Ox.

3.1.2.3. El cas de les funcions cúbiques

La tercera sub-qüestió a considerar és la següent:

Q_3: Per a quines x es compleix $f(x) \geq g(x)$ si f i g són funcions polinòmiques de 3r grau?

Quan $f - g$ és un polinomi de grau 3, la ***tècnica algebraicoequacional*** requereix la resolució d'una equació de tercer grau. Excepte casos excepcionals (arrels evidents), l'algoritme de resolució per radicals no acostuma a estar disponible a la OM_{EI} escolar. Aquesta limitació forta de $\tau_{\text{algebraicoequacional}}$ justifica el recurs a la tècnica gràfica que pateix aquí una clara modificació respecte al cas anterior ja que en la majoria de les vegades els intervals solució només es podran obtenir de manera aproximada (usant el mètode de dicotomia, per exemple).

- $\tau_{\text{graficonumèrica}}$: ***tècnica graficonumèrica:*** s'esbossen les 2 gràfiques $y = f(x)$ i $y = g(x)$ i s'estableix gràficament i de manera aproximada en quins intervals $f(x) \geq g(x)$. Per determinar numèricament els intervals solució es determina gràficament un primer valor aproximat de la solució que es "refina" posteriorment fent servir el mètode de dicotomia.[16]

<u>Construcció de la tècnica gràfica</u>

Notem aquí que, a Secundària, la representació gràfica d'una funció cúbica no acostuma a ser del domini de l'alumne.

1. **Translacions: Pas de $f(x) = x^3$ a $f(x) = (x - b)^3 + c$**

➢ Es considera la gràfica de $f(x) = x^3$ i se li aplica un desplaçament horitzontal de b per a obtenir la gràfica (*figura 2.1*) de $f(x) = (x - b)^3$ on el punt d'inflexió passa del (0,0) al $(b,0)$.

[16] El mètode de dicotomia (o bisecció) es basa en el teorema de Bolzano segons el qual una funció F real contínua en un interval $[a,b]$ tal que $F(a)F(b) < 0$ té almenys un zero $c \in (a,b)$. Per resoldre l'equació $F(x) = 0$, s'avalua F al punt mig de $[a,b]$ i, en funció del seu signe, es determina el subinterval on es troba el zero de la funció. Es repeteix el procediment obtenint al pas n-èsim un interval de longitud $(b - a)/2^n$ on es troba la solució. (Ortega 1990).

- Es considera la gràfica $f(x) = x^3$ i se li aplica un desplaçament vertical de c unitats per a obtenir la gràfica (*figura 2.2*) de $f(x) = x^3 + c$ on el punt d'inflexió passa del (0,0) al $(0,c)$.
- Finalment considerem el cas general $f(x) = (x - b)^3 + c$, on es té un desplaçament del punt d'inflexió del (0,0) al (b,c) (*figura 2.3*).

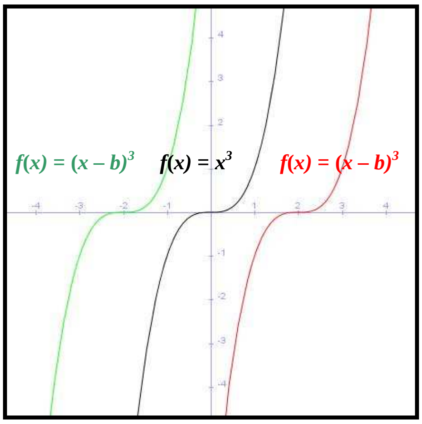


figura 2.1

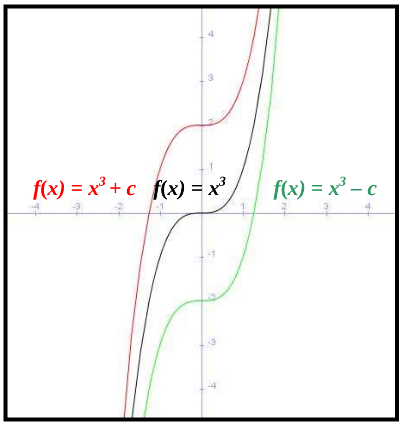


figura 2.2

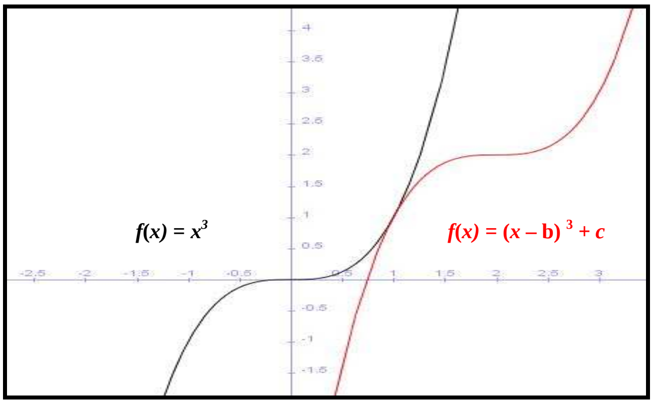


figura 2.3

2. Dilatacions: Pas de $f(x) = x^3$ a $f(x) = ax^3$

- Si $0 < a < 1$ es té que la cúbica resultant és més "ample" que la $f(x) = x^3$ però el punt d'inflexió no ha variat la seva posició (*figura 2.4*).
- Si $a > 1$ es té que la cúbica resultant és més "estreta" que la $f(x) = x^3$ però el punt d'inflexió no ha variat la seva posició (*figura 2.4*).

Si a és negativa la hipèrbola "canvia de sentit" però es mantenen les consideracions anteriors (*figura 2.5*).

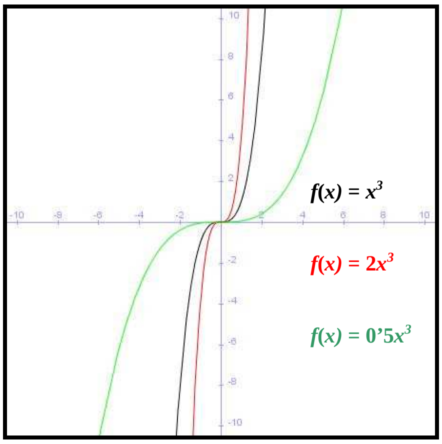


figura 2.4

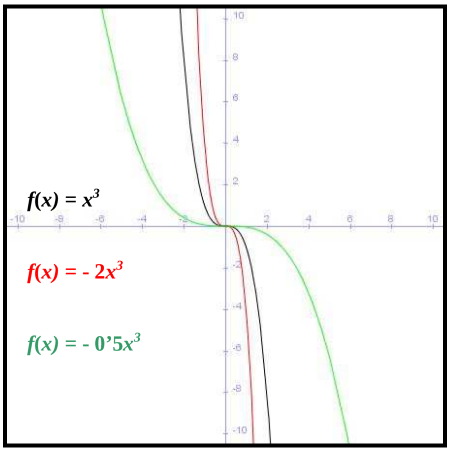


figura.2.5

3. Combinacions: com passar de $f(x) = x^3$ a $f(x) = a(x - b)^3 + c$

Hi ha un desplaçament del punt d'inflexió del (0,0) al punt (b,c) i l'amplada depèn del valor d'a en els termes explicats abans (*figura 2.6*)

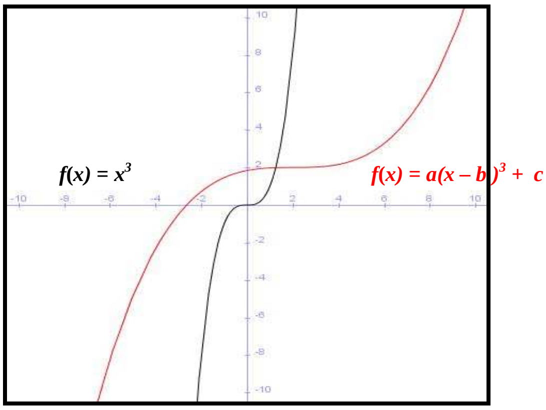


figura 2.6

4. Cas general: com passar de $f(x) = x^3$ a $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

Com es pot ara ampliar la tècnica anterior al cas en què la cúbica es presenta en la forma canònica $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$? Si seguim un procediment similar al cas quadràtic, hauríem de desenvolupar l'expressió $a(x - b)^3 + c$, i obtindríem les equivalències:

$$A = a, \quad B = -3ab, \quad C = 3ab^2, \quad D = -ab^3 + c$$

D’on es dedueix que la reducció només és possible quan $B^2 = 2A \cdot C$.

En general, si considerem el cas $A = 1$, el que sí podem fer és reduir qualsevol cúbica de la forma $x^3 + Bx^2 + Cx + D$ en una expressió del tipus $z^3 + \beta z^2 + \chi$ fent el canvi de Vieta $x = z - B/3$.

Tanmateix, arribats a aquest punt, és important assenyalar que la resolució gràfica de la inequació $f(x) \geq g(x)$ pot dur-se a terme de formes molt diferents, ja sigui representant directament les dues funcions inicials f i g, ja sigui buscant una inequació equivalent $h(x) \geq k(x)$ on h i k siguin funcions de representació immediata o quasi immediata. Així per exemple, la inequació $3x^3 - x^2 - 2x + 1 \geq x^3 + 2x$ pot donar lloc a les inequacions equivalents: $2x^3 \geq x^2 + 4x - 1$ ó $2x^3 + 1 \geq x^2 + 4x$. En general, l’estudi del cas homogeni $2x^3 - x^2 - 4x + 1 \geq 0$ acostuma a donar lloc a una gràfica no immediata que requereix l’estudi de les variacions de la funció (derivada, etc.). De totes formes, aquest estudi pot arribar a ser necessari, ja que no sempre és evident establir amb seguretat el nombre d’interseccions entre les corbes $y = h(x)$ i $y = k(x)$.

3.1.2.4. El cas de les funcions hiperbòliques

La quarta sub-qüestió que abordem es pot formular en els termes següents:

Q_4: Per a quines x es compleix $f(x) \geq g(x)$ si f i g són hipèrboles del tipus $\dfrac{a}{x-b} + c$?

- $\tau_{\text{algebraica}}$: ***tècnica algebraica***: Si al fer $f - g$ queda un polinomi de grau < 2, es pot actuar com en el cas de les funcions afins. Si no és així, no es pot continuar, s’ha de canviar a alguna de les altres tècniques.

- $\tau_{\text{algebraicoequacional}}$: ***tècnica algebraicoequacional***: Sorgeixen moltes dificultats per factoritzar $f - g$, pel que és millor canviar de tècnica.

- $\tau_{\text{gràfica}}$: ***tècnica gràfica***: s’esbossen les dues funcions i visualment s’estableix en quins intervals $f(x) \geq g(x)$, ajudats del punt de tall, si existeix, calculats prèviament.

- $\tau_{\text{graficonumèrica}}$: ***tècnica graficonumèrica***: es farà servir si en aplicar la tècnica $\tau_{\text{gràfica}}$ no es poden calcular els punts de tall. Un cop esbossades les dues funcions s'aplica el mètode de dicotomia per aproximar la solució.

Notem que, a l'igual que en els casos anteriors, la representació gràfica d'una hipèrbola no acostuma a ser del domini de l'alumne. Caldrà, per tant, fer una extensió de la tècnica gràfica emprada anteriorment:

<u>Construcció de la tècnica gràfica</u>

1. Translacions: Pas de $f(x)=\dfrac{1}{x}$ **a** $f(x)=\dfrac{1}{x-b}+c$

- Es considera la gràfica de $f(x)=\dfrac{1}{x}$ i se li aplica un desplaçament horitzontal de *b* per a obtenir la gràfica (*figura 3.1*) de $f(x)=\dfrac{1}{x-b}$ on el centre de la hipèrbola passa del punt (0,0) al punt (*b*,0).
- Es considera la gràfica $f(x)=\dfrac{1}{x}$ i se li aplica un desplaçament vertical de *c* unitats per a obtenir la gràfica (*figura 3.2*) de $f(x)=\dfrac{1}{x}+c$ on el centre de la hipèrbola passa del punt (0,0) al punt (*0*,*c*).
- Finalment es considera el cas general, on el que es té és un desplaçament del centre de la hipèrbola del punt (0,0) al punt (*b*,*c*) (*figura 3.3*).

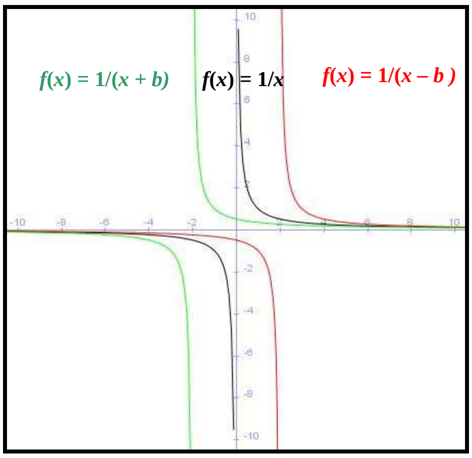


figura 3.1

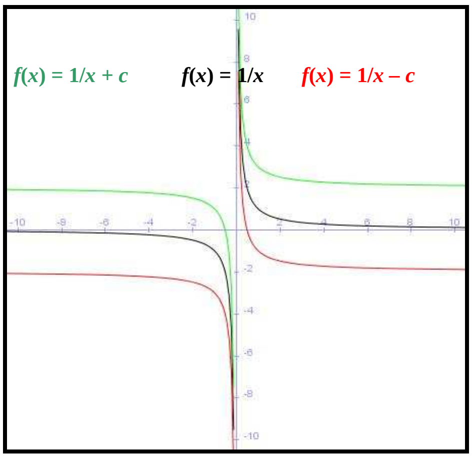


figura 3.2

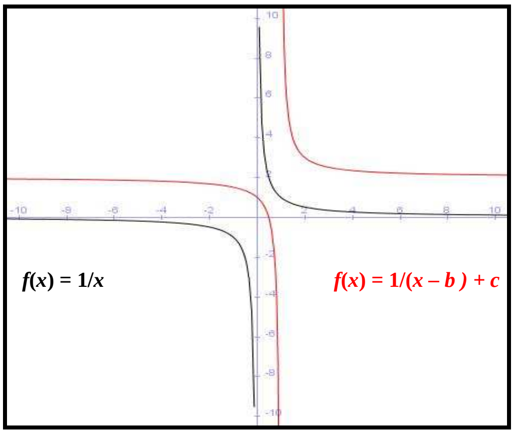


figura 3.3

2. Dilatacions : Pas de $f(x)=\frac{1}{x}$ **a** $f(x)=\frac{a}{x}$

- Si $0 < a < 1$ es té que la hipèrbola resultant és més “ample” que la $f(x)=\frac{1}{x}$ però el centre de la hipèrbola no ha variat la seva posició (*figura 3. 4*).
- Si $a > 1$ es té que la hipèrbola resultant és més “estreta” que la $f(x)=\frac{1}{x}$ però el centre de la hipèrbola no ha variat la seva posició (*figura 3.4*).

Si *a* és negativa la hipèrbola “canvia de sentit” però es mantenen les consideracions anteriors (*figura 3.5*).

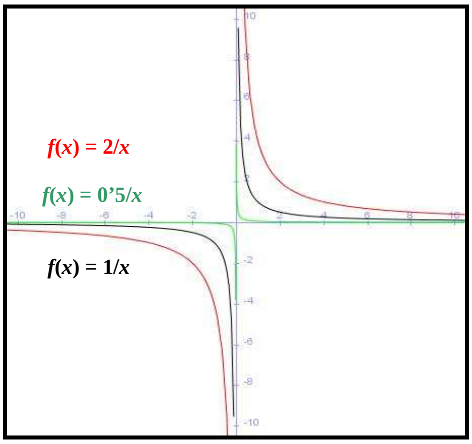


figura 3.4

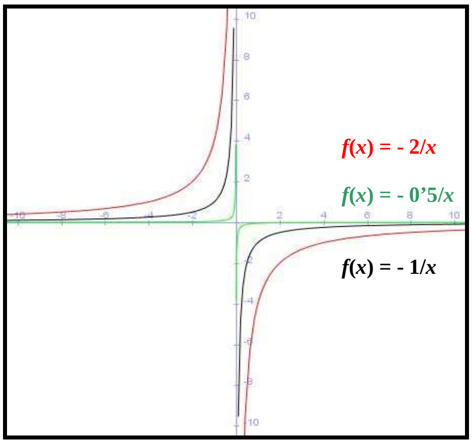


figura 3.5

3. Combinacions: com passar de $f(x)=\frac{1}{x}$ **a** $f(x)=\frac{a}{x-b}+c$

Hi ha un desplaçament del centre de la hipèrbola del punt (0,0) al punt (*b*,*c*) i l'amplada depèn del valor d'*a* en els termes explicats abans (*figura 3.6*).

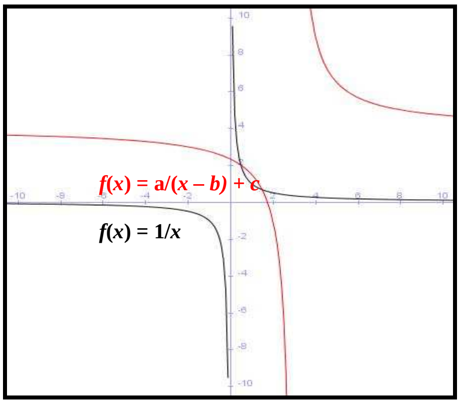


figura 3.6.

3.1.2.5. El cas de les funcions exponencials

La cinquena sub-qüestió es pot formular en els termes següents:

Q_5: Per a quines x es compleix $f(x)\geq g(x)$ si f i g són exponencials del tipus $a^{x-b}+c$?

Les tècniques algebraiques $\tau_{\text{algebraica}}$ i $\tau_{\text{algebraicoequacional}}$ fracassen gairebé sempre.

- $\tau_{\text{gràfica}}$: Per aplicar la ***tècnica gràfica***, s'esbossen les dues funcions i visualment s'estableix en quins intervals $f(x)\geq g(x)$, a partir dels punts de tall, si existeixen, calculats prèviament.

- $\tau_{\text{graficonumèrica}}$: Es farà servir la ***tècnica graficonumèrica*** si en aplicar la tècnica $\tau_{\text{gràfica}}$ no es poden calcular els punts de tall. Un cop esbossades les dues funcions s'aplica el mètode de dicotomia per acotar la solució.

Notem que, en la mateixa línea que els casos anteriors, la representació gràfica d'una exponencial no acostuma a ser del domini de l'alumne.

Construcció de la tècnica gràfica

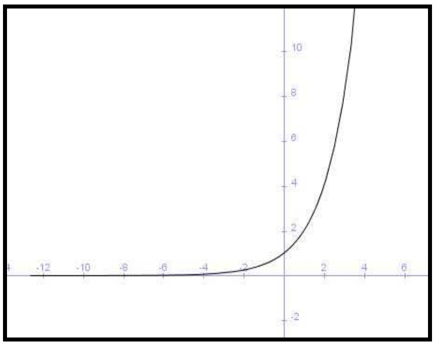
A diferència de les famílies de funcions anteriors, la representació gràfica de l'exponencial té un tractament diferent. Per començar, cal distingir dos casos, en funció dels valors que pot prendre la base:

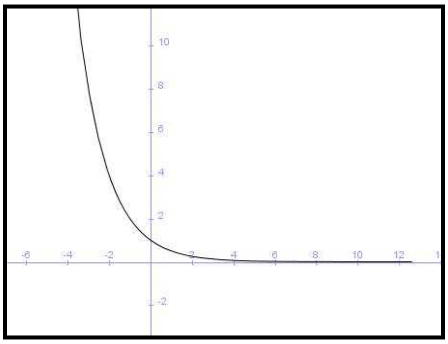
Si $a > 1$:

la gràfica de $f(x) = a^x$ és creixent

Si $0 < a < 1$:

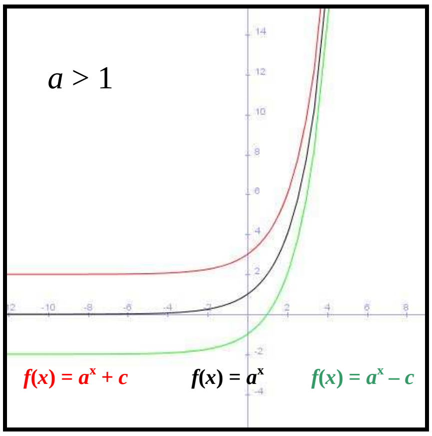
la gràfica de $f(x) = a^x$ és decreixent

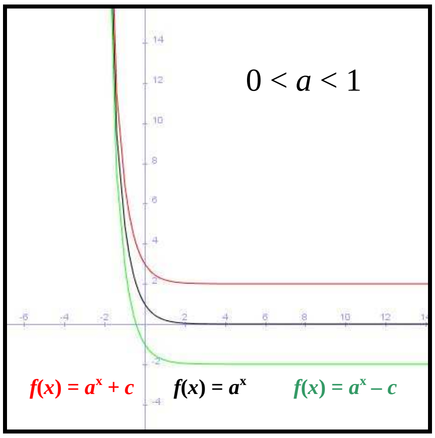




1. Translacions: Pas de $f(x) = a^x$ a $f(x) = a^x + c$

Independentment del valor d'*a* es produeix un desplaçament vertical de *c* unitats (és a dir, la seva asímptota horitzontal es desplaça *c* unitats)

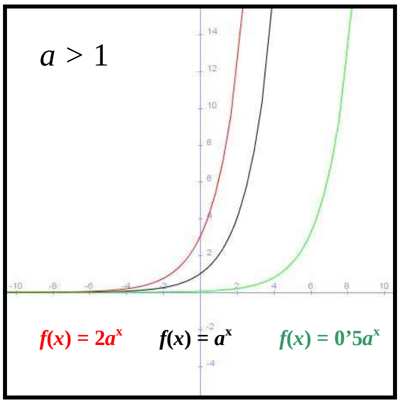


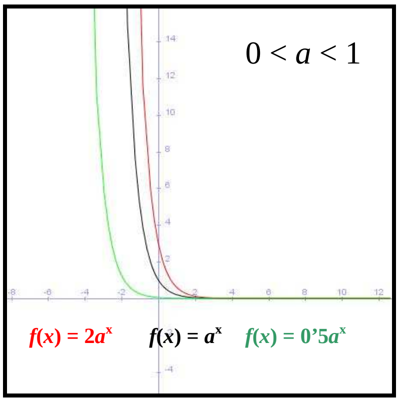


2. Dilatacions: Pas de $f(x) = a^x$ **a** $f(x) = a^{x-b} = a^x a^{-b} = da^x \quad (d > 0)$

- Si $0 < d < 1$ es té que l'exponencial resultant és més "ample" que la $f(x) = a^x$ però sense variar la seva asímptota horitzontal.
- Si $d > 1$ es té que l'exponencial resultant és més "estreta" que la $f(x) = a^x$ però sense variar la seva asímptota horitzontal.

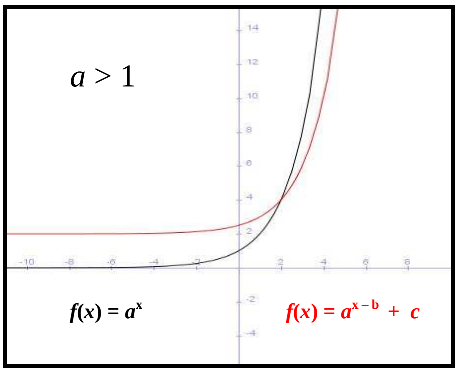
Si *d* és negativa la hipèrbola "canvia de sentit" però es mantenen les consideracions anteriors (distingint entre $0 < |d| < 1$ i $|d| > 1$)

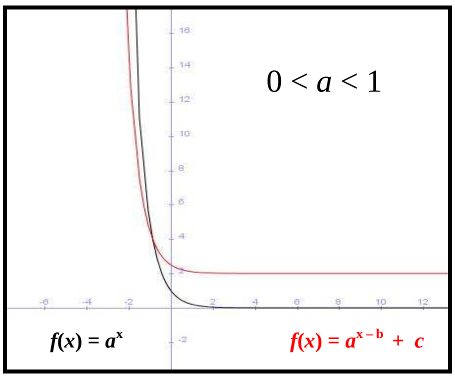




3. Cas general: com passar de $f(x) = a^x$ **a** $f(x) = a^{x-b} + c = da^x + c \quad (d > 0)$

Cal aplicar un desplaçament horitzontal de *c* unitats i modificar l'amplada segons el valor de *d* en els termes explicats abans.





3.1.2.6. El cas de dues funcions elementals qualssevol

Una vegada considerats tots els casos particulars, si s'ha d'estudiar la desigualtat $f(x) \geq g(x)$ on f i g són funcions elementals qualssevol (polinòmiques de grau ≤ 3, hipèrboles o exponencials), s'ha vist que, en general, les tècniques algebraiques acostumen a no funcionar i que, per contra, les tècniques gràfiques són molt més eficients i econòmiques, encara que només proporcionen, en general, respostes aproximades que cal "afinar" posteriorment mitjançant algun mètode numèric[17]. Per tant, ara ja es pot donar una primera resposta a la nostra qüestió inicial Q_0:

Q_0: Per a quines x es compleix $f(x) \geq g(x)$ si f i g són funcions elementals qualssevol?

R_{01}: Si f i g són funcions elementals dels tipus considerats anteriorment, o d'algun tipus per al qual se'n pot obtenir fàcilment una representació gràfica, llavors es pot aplicar $\tau_{\text{gràfica}}$ o $\tau_{\text{graficonumèrica}}$ i deduir l'interval aproximat de valors x desitjat.

R_{02}: Si no es disposa fàcilment de la representació gràfica de f i g, ni d'alguna desigualtat $h(x) \geq k(x)$ equivalent, llavors es pot realitzar un estudi "complet" de la funció $f - g$ (estudiant-ne els límits a la vora del domini, els intervals de monotonia, etc.) i deduir un valor aproximat de l'interval solució a partir de la gràfica.

Un cop arribats a aquest punt, és fàcil que de l'estudi de la desigualtat $f(x) \geq g(x)$ sorgeixin noves qüestions problemàtiques, com per exemple:

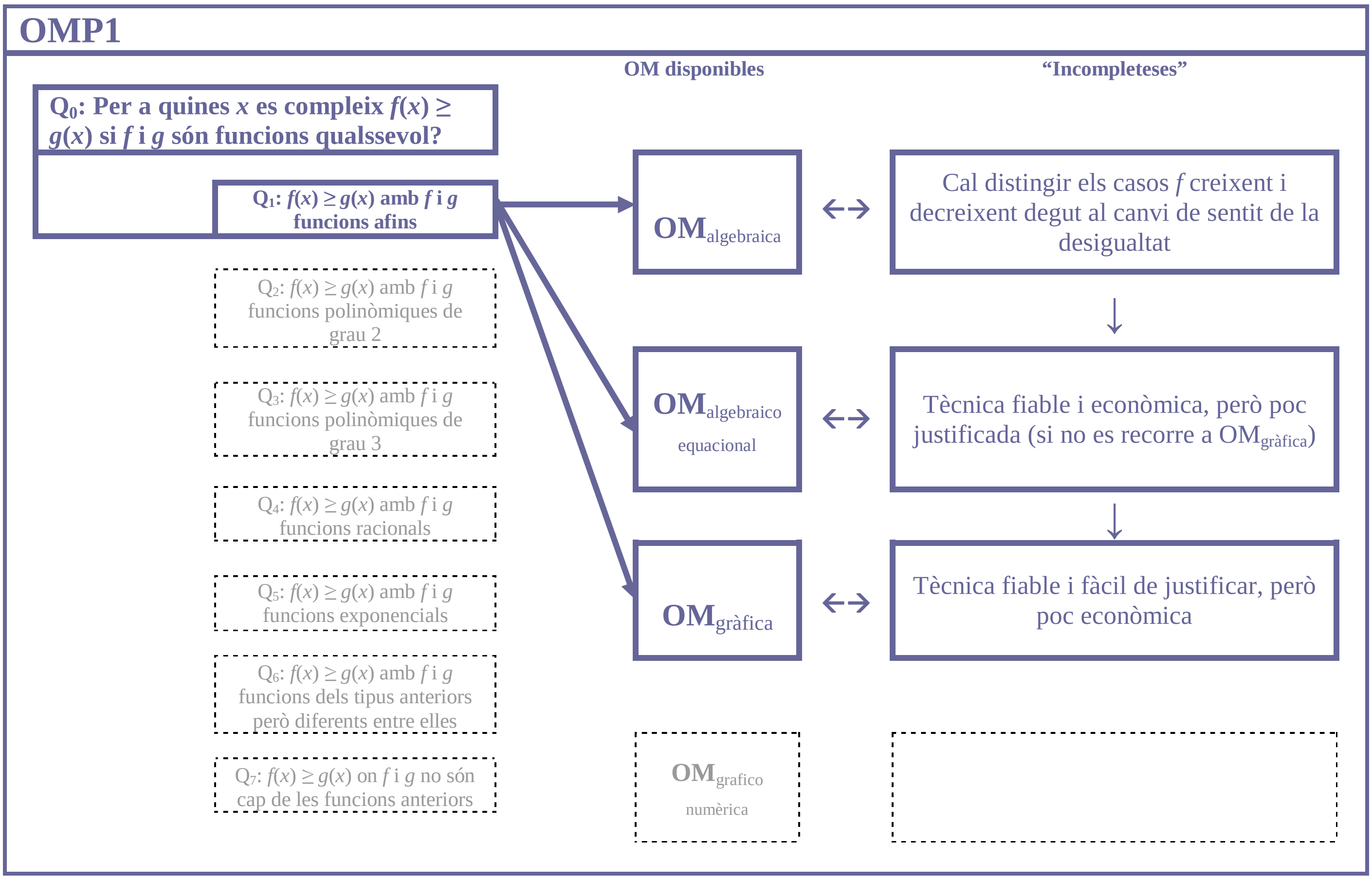
Q_1^*: Com assegurar, a partir només de la gràfica (és a dir, sense un estudi complet de la funció $f - g$), que s'han trobat tots els punts de tall entre f i g?

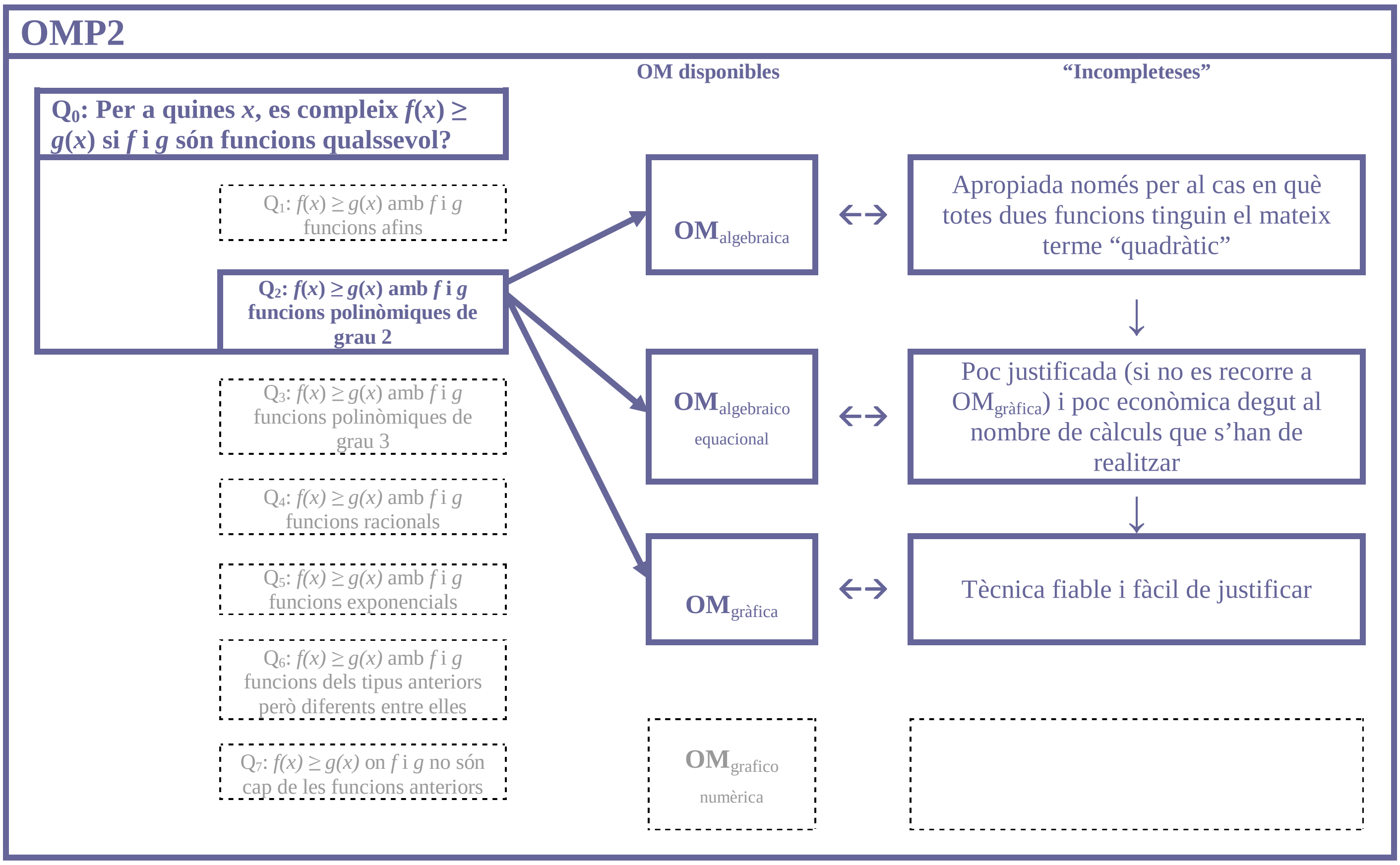
Aquesta qüestió posa de manifest la necessitat de l'estudi de les variacions de $f - g$, per exemple utilitzant derivades, i pot servir com a motivació de l'estudi "complet" que esmentàvem anteriorment.

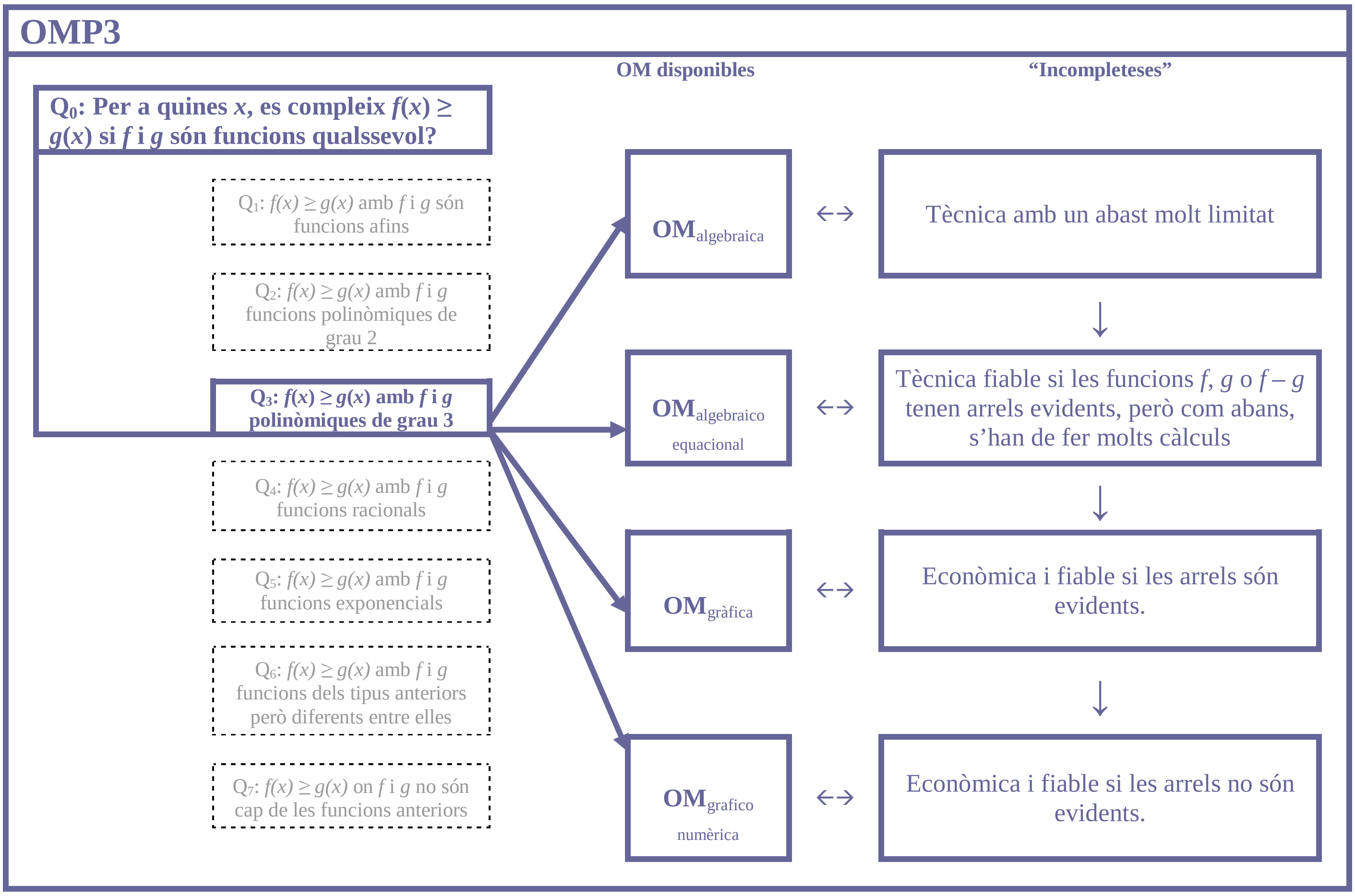
[17] Mètode de la Dicotomia (o Bisecció), Mètode de Newton, Mètode de la Secant, Mètode de la Regula-Falsi, etc.

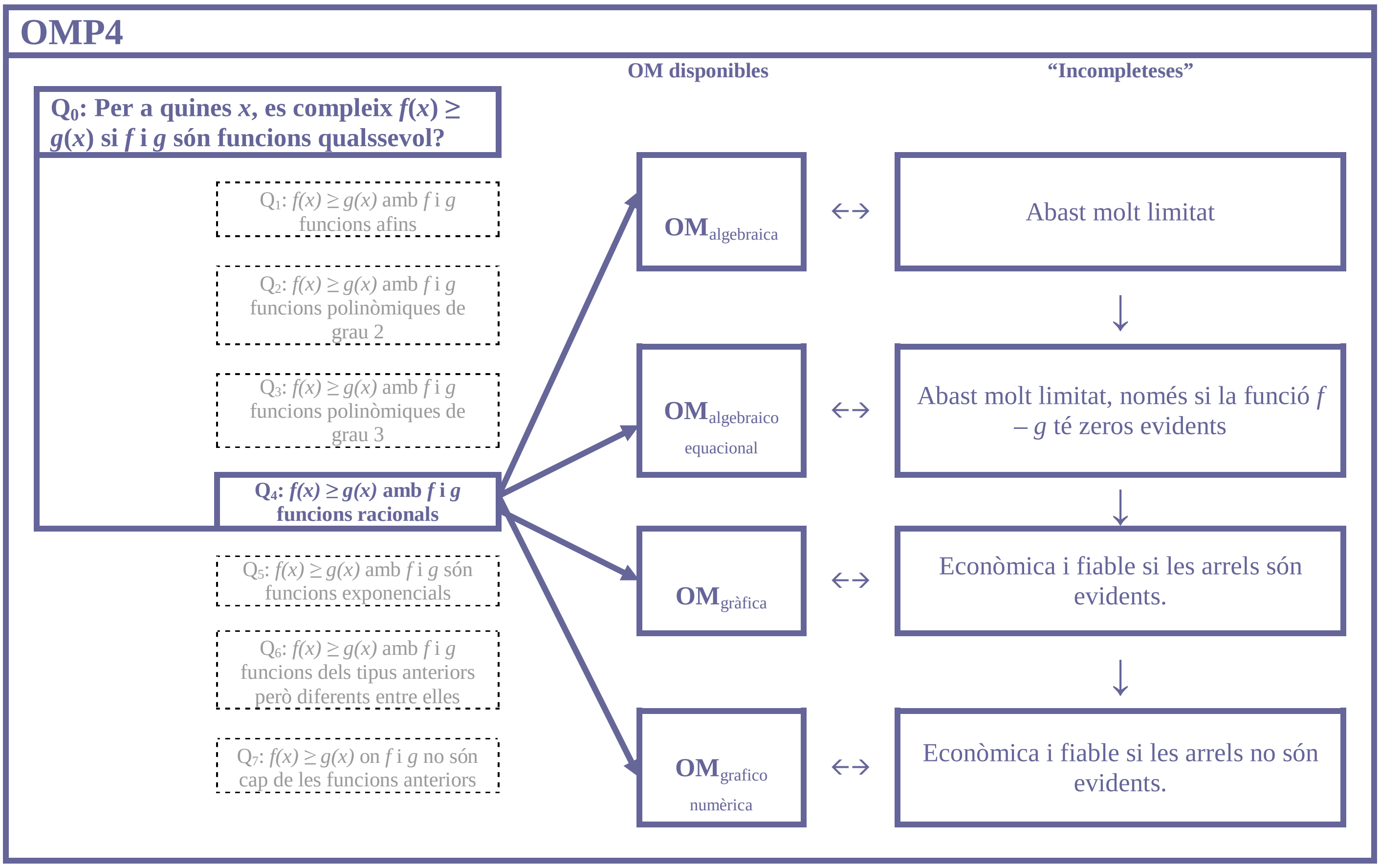
També poden sorgir noves qüestions a partir de variacions de la qüestió inicial Q_0 com, per exemple, que passa amb les solucions si es fixa una de les dues funcions i es varia la segona dins d'una determinada família de funcions. Aquesta és l'opció que hem triat nosaltres en el recorregut que proposem als alumnes, al proposar-los un nou tipus de problemes generat per l'estudi d'una qüestió econòmica on es disposa d'una funció de costos, s'ha de "construir" la funció d'ingressos i es planteja el problema de triar el preu unitari apropiat per tal que l'empresa sempre tingui beneficis a partir d'un determinat valor de vendes. Aquest tipus de problemes "reforça" en cert sentit el treball amb la tècnica gràfica i l'interès de representar gràficament les dues funcions $f(x)$ i $g(x)$ en comptes de la diferència $f(x) – g(x)$.

Aquestes consideracions s'aclariran en el proper apartat amb la presentació de l'anàlisi a priori de l'organització didàctica que s'experimentarà. Abans però, presentem unes taules que resumeixen les anàlisis anteriors indicant, per a cada sub-qüestió considerada, aquells aspectes (tècnics i també tecnologicoteòrics) en els quals les diferents OM considerades es mostren eficaces i alhora les limitacions (o incompleteses) que presenten.

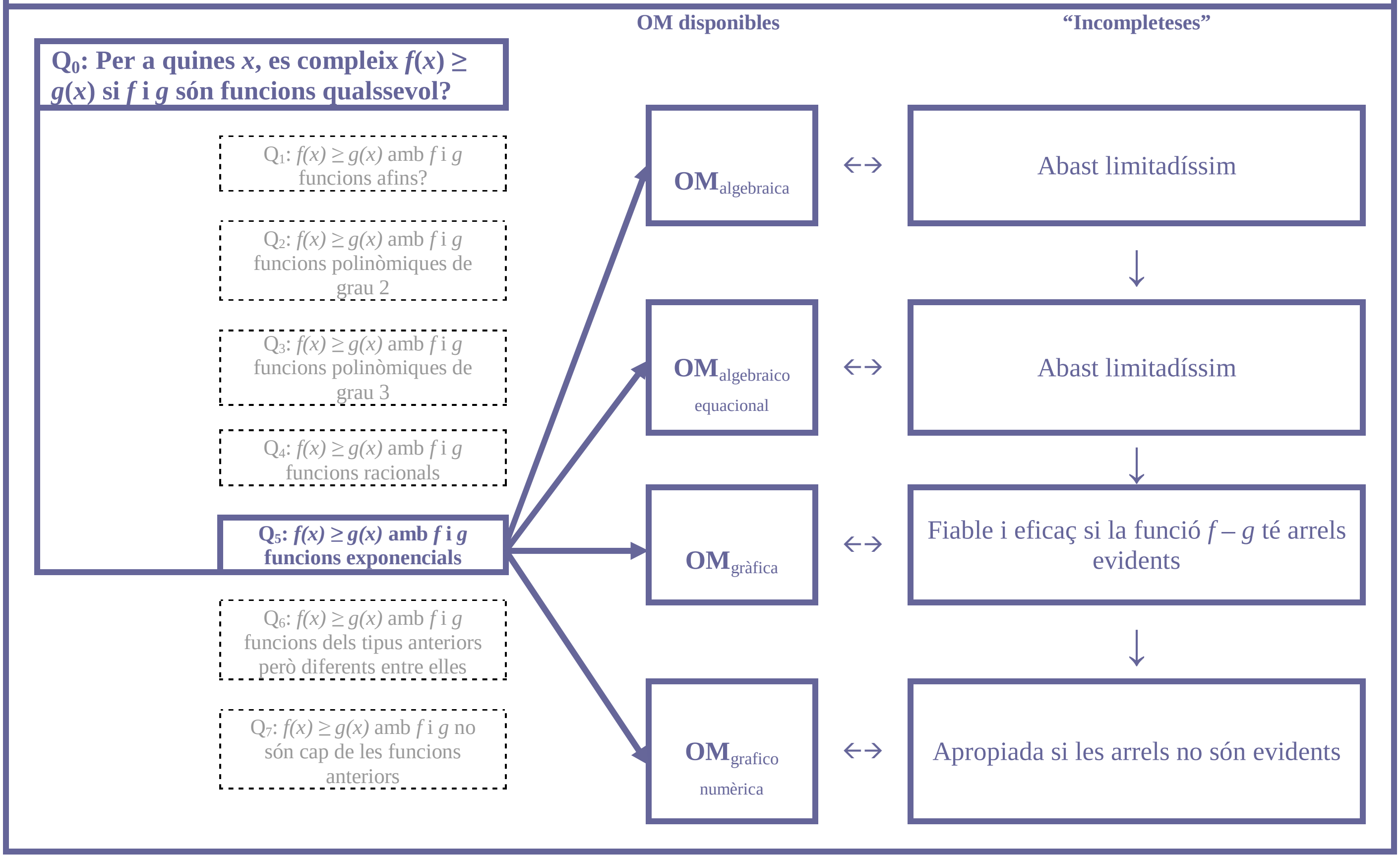

OMP1
OM disponibles
“Incompleteses”
Q_0: Per a quines x es compleix $f(x) \geq g(x)$ si f i g són funcions qualssevol?
Q_1: $f(x) \geq g(x)$ amb f i g funcions afins
Q_2: $f(x) \geq g(x)$ amb f i g funcions polinòmiques de grau 2
Q_3: $f(x) \geq g(x)$ amb f i g funcions polinòmiques de grau 3
Q_4: $f(x) \geq g(x)$ amb f i g funcions racionals
Q_5: $f(x) \geq g(x)$ amb f i g funcions exponencials
Q_6: $f(x) \geq g(x)$ amb f i g funcions dels tipus anteriors però diferents entre elles
Q_7: $f(x) \geq g(x)$ on f i g no són cap de les funcions anteriors
$OM_{algebraica}$
$OM_{algebraico}$ equacional
$OM_{gràfica}$
$OM_{grafico}$ numèrica
Cal distingir els casos f creixent i decreixent degut al canvi de sentit de la desigualtat
Tècnica fiable i econòmica, però poc justificada (si no es recorre a $OM_{gràfica}$)
Tècnica fiable i fàcil de justificar, però poc econòmica


OMP2
OM disponibles
“Incompleteses”
Q_0: Per a quines x, es compleix $f(x) \geq g(x)$ si f i g són funcions qualssevol?
Q_1: $f(x) \geq g(x)$ amb f i g funcions afins
Q_2: $f(x) \geq g(x)$ amb f i g funcions polinòmiques de grau 2
Q_3: $f(x) \geq g(x)$ amb f i g funcions polinòmiques de grau 3
Q_4: $f(x) \geq g(x)$ amb f i g funcions racionals
Q_5: $f(x) \geq g(x)$ amb f i g funcions exponencials
Q_6: $f(x) \geq g(x)$ amb f i g funcions dels tipus anteriors però diferents entre elles
Q_7: $f(x) \geq g(x)$ on f i g no són cap de les funcions anteriors
$OM_{algebraica}$
$OM_{algebraico}$ equacional
$OM_{gràfica}$
$OM_{grafico}$ numèrica
Apropiada només per al cas en què totes dues funcions tinguin el mateix terme “quadràtic”
Poc justificada (si no es recorre a $OM_{gràfica}$) i poc econòmica degut al nombre de càlculs que s’han de realitzar
Tècnica fiable i fàcil de justificar

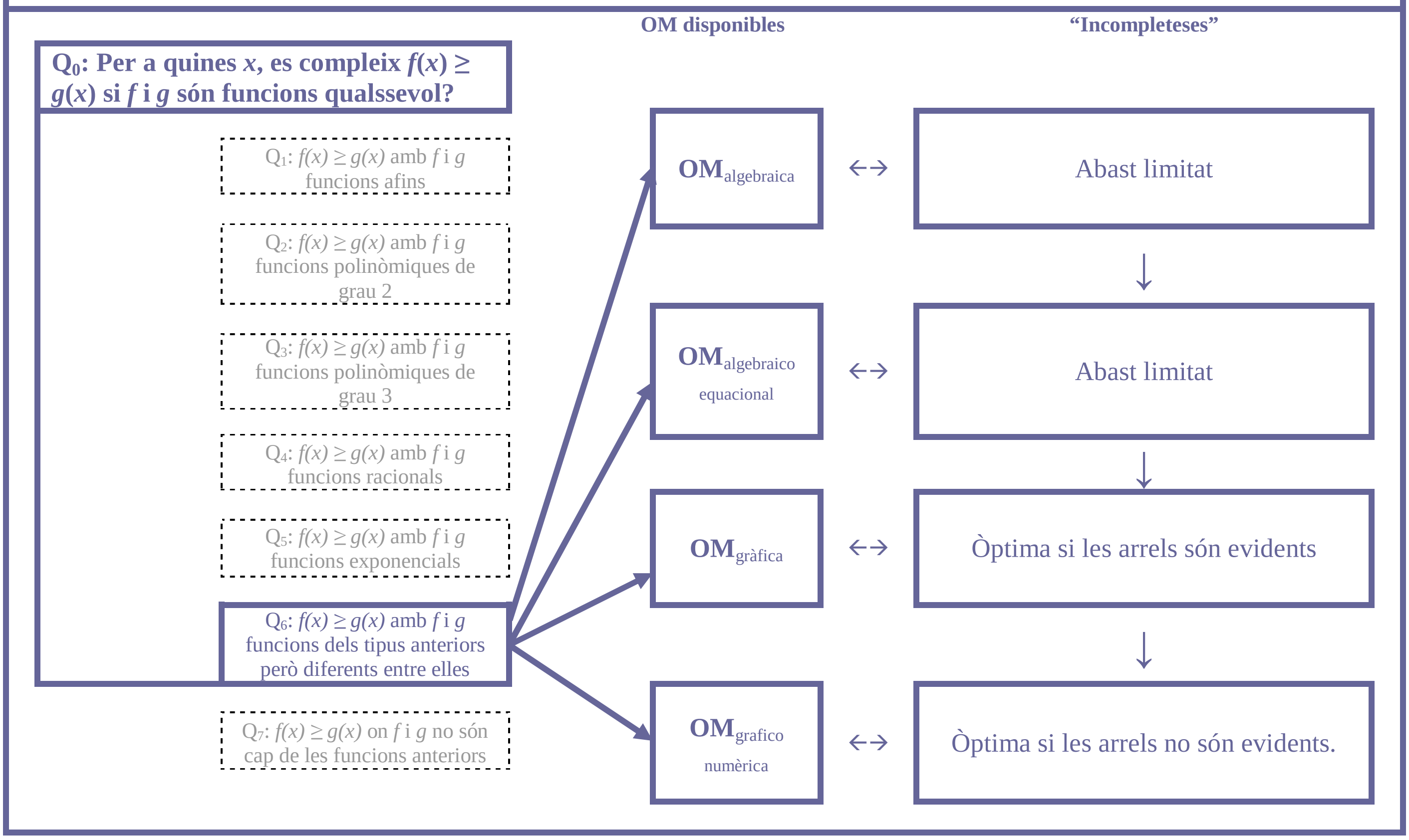

OMP3
OM disponibles
"Incompleteses"
Q0: Per a quines x, es compleix f(x) ≥ g(x) si f i g són funcions qualssevol?
Q1: f(x) ≥ g(x) amb f i g són funcions afins
Q2: f(x) ≥ g(x) amb f i g funcions polinòmiques de grau 2
Q3: f(x) ≥ g(x) amb f i g polinòmiques de grau 3
Q4: f(x) ≥ g(x) amb f i g funcions racionals
Q5: f(x) ≥ g(x) amb f i g funcions exponencials
Q6: f(x) ≥ g(x) amb f i g funcions dels tipus anteriors però diferents entre elles
Q7: f(x) ≥ g(x) on f i g no són cap de les funcions anteriors
OMalgebraica
OMalgebraico equacional
OMgràfica
OMgrafico numèrica
Tècnica amb un abast molt limitat
Tècnica fiable si les funcions f, g o f – g tenen arrels evidents, però com abans, s'han de fer molts càlculs
Econòmica i fiable si les arrels són evidents.
Econòmica i fiable si les arrels no són evidents.


OMP4
OM disponibles
"Incompleteses"
Q0: Per a quines x, es compleix f(x) ≥ g(x) si f i g són funcions qualssevol?
Q1: f(x) ≥ g(x) amb f i g funcions afins
Q2: f(x) ≥ g(x) amb f i g funcions polinòmiques de grau 2
Q3: f(x) ≥ g(x) amb f i g funcions polinòmiques de grau 3
Q4: f(x) ≥ g(x) amb f i g funcions racionals
Q5: f(x) ≥ g(x) amb f i g són funcions exponencials
Q6: f(x) ≥ g(x) amb f i g funcions dels tipus anteriors però diferents entre elles
Q7: f(x) ≥ g(x) on f i g no són cap de les funcions anteriors
OMalgebraica
OMalgebraico equacional
OMgràfica
OMgrafico numèrica
Abast molt limitat
Abast molt limitat, només si la funció f – g té zeros evidents
Econòmica i fiable si les arrels són evidents.
Econòmica i fiable si les arrels no són evidents.

OMP5


OM disponibles
"Incompleteses"
Q0: Per a quines x, es compleix f(x) ≥ g(x) si f i g són funcions qualssevol?
Q1: f(x) ≥ g(x) amb f i g funcions afins?
Q2: f(x) ≥ g(x) amb f i g funcions polinòmiques de grau 2
Q3: f(x) ≥ g(x) amb f i g funcions polinòmiques de grau 3
Q4: f(x) ≥ g(x) amb f i g funcions racionals
Q5: f(x) ≥ g(x) amb f i g funcions exponencials
Q6: f(x) ≥ g(x) amb f i g funcions dels tipus anteriors però diferents entre elles
Q7: f(x) ≥ g(x) amb f i g no són cap de les funcions anteriors
OMalgebraica
OMalgebraico equacional
OMgràfica
OMgrafico numèrica
Abast limitadíssim
Abast limitadíssim
Fiable i eficaç si la funció f – g té arrels evidents
Apropiada si les arrels no són evidents

OMP6


OM disponibles
"Incompleteses"
Q0: Per a quines x, es compleix f(x) ≥ g(x) si f i g són funcions qualssevol?
Q1: f(x) ≥ g(x) amb f i g funcions afins
Q2: f(x) ≥ g(x) amb f i g funcions polinòmiques de grau 2
Q3: f(x) ≥ g(x) amb f i g funcions polinòmiques de grau 3
Q4: f(x) ≥ g(x) amb f i g funcions racionals
Q5: f(x) ≥ g(x) amb f i g funcions exponencials
Q6: f(x) ≥ g(x) amb f i g funcions dels tipus anteriors però diferents entre elles
Q7: f(x) ≥ g(x) on f i g no són cap de les funcions anteriors
OMalgebraica
OMalgebraico equacional
OMgràfica
OMgrafico numèrica
Abast limitat
Abast limitat
Òptima si les arrels són evidents
Òptima si les arrels no són evidents.

3.2. Anàlisi a priori de l'organització didàctica

El curs que aquí presentem està dirigit a alumnes que iniciaran els seus estudis universitaris en ADE o Ciències Empresarials de la Facultat d'Economia IQS de la Universitat Ramon Llull (Barcelona) i va ser programat i realitzat pel nostre equip d'investigació en didàctica tenint en compte els resultats de les investigacions d'aquest equip sobre les discontinuïtats matemàtiques i didàctiques entre la secundaria i la universitat comentades al capítol 1.

L'objectiu del curs és intentar iniciar processos d'estudi motivats per una qüestió problemàtica inicial relacionada amb els estudis que van a començar i que permeten la construcció d'organitzacions matemàtiques locals relativament completes com a resposta a aquesta qüestió.

Es va dividir en tres parts:

- 1ª part: Desigualtats entre funcions elementals: "Ingressos i Costos"
- 2ª part: Modelització elemental amb paràmetres: "Compra i venda de samarretes"
- 3ª part: Prova final

Presentem als annexos 1, 2 i 3 el material de les dues primeres parts del curs.

A continuació presentarem el disseny a priori del procés d'estudi. L'hem estructurat en unitats, que es corresponen bastant a les diferents sessions del curs, on cada una d'elles es presenta en forma d'una taula dividida en quatre parts fonamentals:

1. L'objectiu, estructura i principals continguts de la unitat;
2. La referència al Recorregut Matemàtic (R.M.) on està centrada la unitat, en relació al Model Epistemològic de Referència presentat a l'apartat anterior;
3. El disseny a priori del Recorregut Didàctic (R.D.) proposat, és a dir, la descripció de com s'han de fer evolucionar temporalment els aspectes més importants del procés d'estudi. També es troba la documentació necessària i la forma de gestionar els diferents moments del procés d'estudi.

   Per indicar de qui és la responsabilitat de cada tasca en cada moment distingirem diferents posicions: PR – professor, AI – alumne individual, GA – grup(s) d’alumne(s) en que es divideix la classe i CE – comunitat d’estudi (grup classe amb professor);

4. Alguns elements importants per a la gestió del recorregut didàctic.

Només presentarem aquí l’anàlisi didàctica a priori corresponent a la primera part del curs. Veurem com, al principi, les unitats corresponen a la completació de les diferents OM considerades inicialment fins arribar a la tècnica gràfica que s’ha d’anar construir i completant a poc a poc a mida que s’introdueixen noves famílies de funcions. La última unitat correspon, com dèiem, a l’estudi d’una qüestió econòmica on també s’han de comparar una funció d’ingressos i una de costos però la primera no ve donada explícitament. A més, el tipus de qüestions que es plantegen requereixen considerar diferents funcions d’ingressos i de costos a mida que es varia el preu unitari o el cost fix, provocant així una petita variació de la tècnica gràfica tal com s’ha estat utilitzant fins llavors.

3.2.1. Estudi de funcions elementals amb paràmetres: “Ingressos i Costos”

UNITAT 1: (3 hores)

<table>
<tr><td>Estructura i continguts principals</td><td>
- Presentació de la qüestió Q_0:
Sigui $B(x)$ la funció de benefici d’una empresa que prodalthough x productes, ¿quants productes ha de produir per a obtenir guanys, és a dir, per quins valors d’ x el benefici $B(x)$ és positiu?
Cal interpretar Q_0 com un cas particular de la qüestió presentada al Capítol 3.1.1:
$$B(x) \geq 0 \Leftrightarrow I(x) - C(x) \geq 0 \Leftrightarrow I(x) \geq C(x)$$
- Comentar que la qüestió inicial Q_0 pretén modelitzar una situació real, però davant la impossibilitat d’estudiar funcions de vàries variables (ja que els alumnes encara no ho han estudiat) ens reduïm al cas que en el benefici depèn d’una única variable.
- Considerar altres qüestions que es podrien plantejar: cas del benefici màxim, estudi de les seves variacions, etc.
- Recordatori de les famílies de funcions que han estudiat a Secundària.
</td></tr>
<tr><td>R.M.</td><td>Plantejament de Q_0 i incursió ràpida per $OM_{algebraica}$, $OM_{algebraicoequacional}$, $OM_{gràfica}$</td></tr>
<tr><td>Recorregut Didàctic a priori</td><td>
<u>Documentació</u>: Lliurament de la llista de funcions. (veure Annex 1).

<u>Evolució i gestió del RD</u>:
▪ Moment del primer encontre (GA)
Presentació de la qüestió generatriu Q_0 i treball en gran grup fins plantejar la desigualtat $I(x) > C(x)$.
Els alumnes es distribueixen en grups de 2 o 3 i comencen a treballar la qüestió plantejada per a les primeres funcions de la llista (afins, parabòliques i cúbiques).
▪ Treball exploratori (GA)
Treball en grups per a la redacció de la primera resposta provisional a $Q_{0.}$
Un dels objectius és observar amb quina tècnica resolen la qüestió, quina notació fan servir i si verifiquen la solució trobada.
▪ Institucionalització i avaluació (PR i CE)
El professor, un cop ha analitzades les respostes donades (aprofitant una pausa a mitja classe), fa una síntesi a la pissarra de desigualtats entre dos parells de funcions afins (una sense canvi de signe i una altre amb canvi) i entre dos parells de quadràtiques, indicant les diferents tècniques que han aparegut, la facilitat o dificultat d’ús i les seves limitacions. A l’estudi del cas quadràtic s’introdueix la tècnica gràfica (els alumnes ja saben, en principi, representar paràboles) que ha d’aparèixer com la més potent, sempre i quan es pugui aplicar de manera ràpida i fiable (sense haver de fer l’estudi de cada funció).
</td></tr>
<tr><td>Elements per a la gestió del RD</td><td>
▪ El professor no ha de participar en l’elaboració de les respostes dels alumnes ja que s’intenta que apareguin de manera espontània les principals “maneres de fer” que s’ensenyen a Secundària.
▪ A l’avaluació i institucionalització cal buscar un nom compartit (amb els estudiants) per designar les tècniques i els seus components. També cal enfocar l’avaluació com una característica de les tècniques emprades i no de les capacitats o errors dels estudiants.
▪ Es pot aprofitar per posar en evidència les mancances teòriques dels alumnes pel que fa a la justificació i validació de les tècniques: com es poden justificar, quan i perquè són vàlides, quan i perquè no ho són, com es poden generalitzar, etc.
</td></tr>
</table>

UNITAT 2: (3 hores)

<table>
<tr><td>Estructura i continguts principals</td><td>- Proposta d'utilització de la tècnica gràfica per la seva potència i eficàcia sempre i quan no s'hagi de fer l'estudi "complet" de les funcions.
- Programació de l'estudi: agrupació dels casos segons els tipus de funcions.
- Delimitació del problema inicial a l'estudi de les funcions quadràtiques.</td></tr>
<tr><td>R. M.</td><td>$OM_{algebraicoequacional} \rightarrow OM_{gràfica}$</td></tr>
<tr><td>Recorregut Didàctic a priori</td><td><u>Documentació</u>: la mateixa llista de funcions

<u>Evolució i gestió del Recorregut Didàctic</u>:
▪ Institucionalització (PR i CE)
El professor exposa els principals ingredients (tècnics i teòrics) d'$OM_{gràfica}$ per al cas de les paràboles: translacions horitzontals i verticals, dilatacions, diferents escriptures de la paràbola.
Una vegada explicada la representació gràfica de la paràbola ja es pot donar resposta a Q_2.
S'aprofita per exposar $OM_{gràfica}$ per al cas de les funcions afins (Q_1) i donar una primera resposta parcial a Q_0 en el cas que les funcions implicades siguin afins o polinòmiques de grau 2.
▪ Moment exploratori (GA)
Es demana als alumnes que considerin les funcions de la llista on estan implicades paràboles i rectes.
▪ Treball de la tècnica (GA)
Diferents maneres d'aplicar les translacions i dilatacions; diferents escriptures possibles; casos senzills ($y = a(x - x_0)\cdot(x - x_1)$); variacions de la tècnica ($y = a\cdot(x - x_0)\cdot(x - x_1) + k$); combinacions entre rectes i paràboles; etc.
▪ Moment tecnologicoteòric (GA i CE)
Poden sorgir qüestions com les següents, que el professor anotarà a la pissarra:
- Podem estar segurs que dues paràboles només tallaran en el(s) punt(s) trobat(s)?
- S'han estudiat totes les configuracions possibles?
- Com interpretar els casos on no hi ha punts de tall entre les funcions implicades?
▪ Moment de la institucionalització i avaluació (de la tècnica gràfica) (CE i PR)
Al principi de la següent classe el professor fa un síntesi del treball realitzat indicant els casos més fàcils i aquells on sorgeix algun tipus de complicació (variacions tècniques).</td></tr>
<tr><td>Elements per a la gestió del RD</td><td>- Els casos no considerats a classe es deixen per fer a casa.
- La representació gràfica de la paràbola acostuma a ser del domini de l'alumne. El treball amb les translacions i dilatacions, no.
- La tècnica gràfica és poc sensible a les errades numèriques.
- Els alumnes oposen resistència quan se'ls demana de canviar de tècnica respecte al que han fet a Secundària.</td></tr>
</table>

UNITAT 3: (3 hores)

Estructura i continguts principals	- Proposta d'utilització de la tècnica gràfica per la seva potència i eficàcia en el cas de les funcions polinòmiques de grau 3. - Programació de l'estudi: agrupació dels casos segons els tipus de funcions - Delimitació inicial del problema inicial a les funcions cúbiques
R.M.	$OM_{algebraicoequacional} \rightarrow OM_{gràfica} \rightarrow OM_{graficonumèrica}$
Recorregut Didàctic a priori	<u>Documentació</u>: la mateixa llista de funcions. <u>Evolució i gestió del RD</u>: ▪ *Institucionalització (CE i PR)* El professor, després de fer una síntesi del cas quadràtic exposa els principals ingredients (tècnics i teòrics) de $OM_{gràfica}$ per al cas de les cúbiques: translacions, dilatacions; canvis de variable. En intentar donar resposta a Q_3 pot passar que el(s) punt(s) de tall no siguin evidents i per tant s'hagi d'introduir $OM_{graficonumèrica}$. Una vegada explicada la representació gràfica de la cúbica es pot donar resposta a Q_3 i a Q_0 en el cas que les funcions implicades siguin polinòmiques de grau ≤ 3. ▪ *Moment exploratori (GA)* Es demana als alumnes que considerin les funcions de la llista on estan implicades cúbiques, paràboles i rectes i que intentin donar resposta a Q_3 i Q_0 (pel cas afí, quadràtic i cúbic). ▪ *Treball de la tècnica (GA)* Diferents maneres d'aplicar les translacions i dilatacions; diferents escriptures possibles; casos senzills ($y = a(x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot\ (x - x_2)$); variacions de la tècnica ($y = a\cdot(x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot\ (x - x_2) + k$); combinacions entre rectes, paràboles i cúbiques; etc. ▪ *Moment tecnologicoteòric (GA i CE)* Podem estar segurs que dues cúbiques només tallaran en el(s) punt(s) trobat(s)? S'ha estudiat totes les configuracions possibles? L'aproximació numèrica dels punts de tall es podria fer més ràpidament? ▪ *Moment de la institucionalització i avaluació (de la tècnica gràfica) (CE i PR)* Al principi de la següent classe el professor fa un síntesi del treball realitzat indicant els casos més fàcils i aquells on sorgeix algun tipus de complicació (variacions tècniques).
Elements per a la gestió del RD	- A diferència del que passa amb les paràboles, la representació de les cúbiques no acostuma a ser del domini de l'alumne de Secundària. - Els casos no considerats a classe es deixen per fer a casa.

UNITAT 4: (3 hores)

Estructura i continguts principals	- Proposta d'utilització de la tècnica gràfica per a les funcions hiperbòliques - Programació de l'estudi: agrupació dels casos segons els tipus de funcions - Delimitació inicial del problema inicial a les funcions hiperbòliques i polinòmiques de grau ≤ 3.
R.M.	$OM_{algebraicoequacional} \rightarrow OM_{gràfica} \rightarrow OM_{graficonumèrica}$
RD a priori	<u>Documentació</u>: mateixa llista de funcions. <u>Evolució i gestió del RD</u>: ▪ *Institucionalització (CE i PR)* Després de la síntesi del treball fet amb les cúbiques, el professor exposa els principals ingredients (tècnics i teòrics) de $OM_{gràfica}$ per al cas de les hipèrboles: translacions horitzontals i verticals, dilatacions; diferents escriptures de la hipèrbola. En intentar donar resposta a Q_4 pot passar que el(s) punt(s) de tall no siguin evidents, però sempre es poden calcular perquè es redueix a resoldre una equació de segon grau. Una vegada explicada la representació gràfica de la hipèrbola podem donar resposta a Q_4 i a Q_0 en el cas que les funcions implicades siguin polinòmiques de grau ≤ 3 i hipèrboles. ▪ *Moment exploratori (GA)* Es demana als alumnes que considerin les funcions de la llista on estan implicades cúbiques, paràboles i afins i que intentin donar resposta a Q_4 i Q_0 (per al cas afí, quadràtic, cúbic i hiperbòlic). ▪ *Treball de la tècnica (GA)* Diferents maneres d'aplicar les translacions i dilatacions; diferents escriptures possibles; combinacions entre rectes, paràboles, cúbiques i hipèrboles; etc. ▪ *Moment tecnologicoteòric (GA i CE)* Podem estar segurs que dues hipèrboles només tallaran en el(s) punt(s) trobat(s)? S'ha estudiat totes les configuracions possibles? En quins casos els punts de tall es poden calcular? Quan s'han d'aproximar? ▪ *Moment de la institucionalització i avaluació (CE i PR)* Al principi de la següent classe el professor fa un síntesi del treball realitzat indicant els casos més fàcils i aquells on sorgeix algun tipus de complicació (variacions tècniques). Cal recalcar que la tècnica gràfica "per transformacions de funcions elementals" és més ràpida i eficaç que la tècnica d'estudi "complet" d'una funció que els alumnes aprenen a utilitzar a Secundària.
Elements per a la gestió del RD	- Tal com passava amb les cúbiques, els alumnes de Secundària tampoc no dominen la representació gràfica de les hipèrboles. Tanmateix, tindran tendència a reprendre la tècnica d'estudi "complet" d'una funció que és la que saben utilitzar. Cal fer-los veure que és d'aplicació molt més complexa, malgrat que per ells els sembli més fàcil que la tècnica nova (*avaluació*).

UNITAT 5: (3 hores)

Estructura i continguts principals	- Proposta d'utilització de la tècnica gràfica per a les funcions exponencials - Programació de l'estudi: agrupació dels casos segons els tipus de funcions - Delimitació inicial del problema inicial a les funcions hiperbòliques, afins i quadràtiques.
R.M.	$OM_{algebraicoequacional} \rightarrow OM_{gràfica} \rightarrow OM_{graficonumèrica}$
RD a priori	Documentació: mateixa llista de funcions. Evolució i gestió del RD: ▪ *Institucionalització (CE i PR)* Després de la síntesi del cas de les hipèrboles, el professor exposa els principals ingredients (tècnics i teòrics) de $OM_{gràfica}$ per al cas de les exponencials: translacions horitzontals i verticals, dilatacions; correspondència amb les diferents escriptures de l'exponencial. En intentar donar resposta a Q_5 pot passar que el(s) punt(s) de tall no siguin evidents i per tant s'hagi d'introduir $OM_{gràficonumèrica}$ o recordar l'ús de logaritmes per resoldre equacions exponencials. ▪ *Moment exploratori (GA)* Es demana als alumnes que considerin les funcions de la llista on estan implicades exponencials, cúbiques, paràboles i afins i que intentin donar resposta a Q_5 i Q_0. ▪ *Treball de la tècnica (GA)* Diferents maneres d'aplicar les translacions i dilatacions; diferents escriptures possibles; combinacions entre rectes, paràboles, cúbiques i hipèrboles; etc. ▪ *Moment tecnologicoteòric (GA i CE)* Podem estar segurs que dues exponencials només tallaran en el(s) punt(s) trobat(s)? S'ha estudiat tota la casuística (configuracions possibles)? ▪ *Moment de la institucionalització i avaluació (de la tècnica gràfica) (CE i PR)* Cal indicar al final de la classe quines són les funcions de la llista que no són de cap dels tipus estudiats a les sessions anteriors i que són, precisament, aquelles que delimiten l'àmbit de validesa de la tècnica gràfica. Això facilita la síntesi del treball realitzat fins al moment i condueix a escriure mitjançant paràmetres els tipus de funcions utilitzats fins el moment: $af(x - b) + c$ on $f(x)$ és dels tipus considerats. Poden sortir variacions "fortes" de la tècnica gràfica, per exemple amb funcions del tipus $f(\alpha x - b)$ o $f(x^2)$.
Elements per a la gestió del RD	- Aquesta sessió ha de ser més "àgil" que les anteriors perquè quedi temps al final per a la institucionalització del recorregut global i per a l'avaluació de la tècnica gràfica. - Es deixen per fer a casa els casos que no s'hagin pogut estudiar a classe i aquelles funcions que surten fora de l'àmbit de validesa de la tècnica gràfica.

UNITAT 6: (3 hores)

Estructura i continguts principals	- Estudi d'una qüestió econòmica on el model proposat es redueix a l'estudi d'una desigualtat on una funció és fixa i ve donada i l'altra s'ha de construir i varia en funció d'un paràmetre (preu unitari). Aquesta situació posa en evidència l'"economia" i eficàcia de l'ús de la tècnica gràfica.
R .M.	Situació econòmica → $OM_{graficonumèrica}$
RD a priori	<u>Documentació</u>: Llista de problemes (veure Annex 2) <u>Evolució i gestió del RD</u>: ▪ *Moment exploratori (AI i CE)* El treball es fa de forma individual. Cada alumne llegeix l'enunciat del primer problema i es comenta el primer cas a la pissarra per assegurar-se que tothom sap construir el model apropiat $I(x) > C(x)$. ▪ *Moment del treball de la tècnica i tecnologicoteòric (AI i CE)* La resolució del problema requereix una variació tècnica sostinguda per la interpretació teòrica que el cost fix correspon a la translació vertical de la funció de costos (problema 1) i que el preu unitari correspon al pendent de la recta. La variació d'aquests dos paràmetres permet modificar l'interval de solucions i és sobre aquesta variació que cal raonar en aquest cas. ▪ *Institucionalització i avaluació (AI)* En tornar de la pausa es corregeix el primer problema i, si no hi ha temps d'acabar el segon, es demana d'entregar-lo el proper dia per fer-ne una avaluació individual. L'avaluació de tot el treball dut a terme es fa amb la prova final (§ 3.2.3.). De fet, la resolució d'aquests dos problemes, amb les (petites) variacions tècniques i teòriques que suposen, correspon amb la vertadera avaluació de l'$OM_{gràfica}$ que s'ha construït fins el moment.
Elements per a la gestió del RD	Donat que és el primer treball de modelització que es proposa als alumnes, és important que el professor s'asseguri que tots els alumnes entenen les diferents interpretacions que se'ls demana i que no doni per evident cap d'aquestes interpretacions. Pot sortir la qüestió de saber si el nombre d'articles produïts i el nombre d'articles venuts coincideixen. Cal remarcar que és una hipòtesi que fem per simplificar el treball de modelització malgrat que sigui poc realista assumir-la.

3.2.2. Modelització elemental amb paràmetres: "Compra i venda de samarretes"

La segona part del taller s'endinsa més en el treball de modelització matemàtica. El cas proposat simula una situació potencialment real en la que un grup d'estudiants fa una consulta al grup de classe perquè els diguin si un determinat negoci d'estampació i venda de samarretes donarà uns beneficis desitjats (veure Annex 3).

L'estudi d'aquesta situació es pot expressar inicialment mitjançant una desigualtat del tipus $B(x) = I(x) - C(x) > 1000$, on $I(x) = px$ és la funció d'ingressos (sent p el preu unitari) i s'introdueixen dues funcions de costos, una lineal: $C_1(x) = cx + L$ (sent c el cost unitari de les samarretes i L el lloguer del stand) i una quadràtica $C_2(x) = (\alpha + Kx)x + L$ (sent $c = \alpha + Kx$ un cost unitari que creix amb la producció x).

En cap dels dos casos l'estudi de la desigualtat $B(x) = I(x) - C(x) > 1000$ condueix directament a una solució "realista" perquè el nombre de vendes necessàries per obtenir 1000 € de beneficis no correspon ni s'aproxima a les vendes obtingudes per grup d'alumnes fins el moment. Es requereix llavors que es discuteixin diferents estratègies possibles: augment del preu unitari p, disminució dels costos c, augment de les vendes x. Cal per tant anar plantejant noves situacions més complexes que es modelitzen mitjançant funcions elementals amb paràmetres (rectes, paràboles o hipèrboles). És precisament en la manipulació d'aquest paràmetres on es troba la solució final. No detallarem aquí l'anàlisi a priori d'aquesta situació que hem manllevat de l'estudi de Ruiz Munzón (2005 i 2006).

En la primera sessió (Comanda 1 – costos lineals), els alumnes treballen per grups en la resolució de la qüestió plantejada i es discuteixen les possibles respostes. Davant el fracàs de totes elles, es determinen distintes estratègies segons el número i tipus de paràmetres escollits: cost unitari de les samarretes, preu unitari de venda, costos fixos del local. Cal destacar el que podríem anomenar la "creativitat" dels alumnes en el tractament de la qüestió plantejada pel que fa a les diferents estratègies de venda proposades. En comptes de les variacions de paràmetres que havíem previst (augmentar el preu de venda o disminuir les costos), van sortir a classe propostes més variades i més realistes, com ara fer ofertes per a les vendes grans (“un article gratis si se’n compren 3”) amb la conseqüent complicació matemàtica d’obtenir-ne un model funcional apropiat.

A la segona sessió els grups d’alumnes van considerar les diverses possibilitats de variació dels paràmetres i, mitjançant essencialment el recurs a models algebraics (els models gràfics no són necessaris en aquest punt), van obtenir conjuntament una resposta viable al problema, destacant el paràmetre pertinent $p - c$ (diferència entre el preu unitari i el cost unitari).

La tercera sessió (Comanda 2 – funció de costos quadràtica), la consideració de les desigualtats amb paràmetres fa indispensable l’ús de models gràfics (paràboles i hipèrboles amb asímptotes obliqües). Per abordar aquesta segona comanda, els alumnes van partir dels resultats obtinguts en la primera comanda i van recórrer als models gràfics de manera força àgil.

3.2.3. Prova final

Finalment es va proposar als alumnes una prova final dividida en dues parts. La primera feia referència a la primera part del taller (resolució gràfica d'una desigualtat funcional). La segona proposava una situació de consultoria anàloga a la de la segona part del taller (compra i venda de polseres). Es va dir als alumnes que el resultat d'aquesta prova es donaria al professor responsable de l'assignatura de matemàtiques.

PROVA FINAL – 1ª part

1. Una empresa produeix x unitats d'un producte. Determinar l'interval de produccions x aconsellades si sabem que la funció de ingressos és $I(x) = \frac{-3}{x+1} + 3$ i la de costos és $C(x) = x^3 + 0{,}5$.

2. El cost de producció d'un determinat article és $C(x) = x^2 + 2x + 4$, on x és el nombre d'unitats. L'article es ven a 7 € per unitat.

(a) Representar en un mateix gràfic la funció d'ingressos i la de costos.

(b) Determinar l'interval de produccions per als quals s'obtenen beneficis.

(c) ¿Com canviarà aquest interval si els costos fixos augmenten a 9 €? Donar una explicació a partir de la gràfica.

(d) ¿Com canviarà aquest interval si es decideix augmentar el preu de venda a 9 € per unitat? Donar una explicació a partir de la gràfica.

PROVA FINAL – 2ª part

Els alumnes de 1º Batxillerat volen vendre polseres de goma amb els colors de l'institut per recollir pel viatge de fi de curs. El cost de cada polsera és de 0,30 € i les volen vendre a 1 €. El preu del lloguer de la parada és de 80 €.

(1) Escriure la funció d'ingressos I(x), la de costos C(x) i la de beneficis B(x).
(2) Representar la funció benefici.
(3) Indicar en la gràfica el nombre mínim de vendes per a obtenir beneficis positius.
(4) Utilitzar la gràfica per a calcular aproximadament quantes polseres s'han de vendre per a obtenir un beneficio de 750 €. Calcular-ho exactament.
(5) Explicar com varia la gràfica de la funció de beneficis i el nombre mínim de vendes per a obtenir 750 € de beneficis en els casos següents:
   a. El preu de les polseres puja a 1,20 €.
   b. El cost de las polseres puja a 0,35 €.
   c. El lloguer de la parada baixa a 65 €.
(6) Si el lloguer de la parada és de 100 €,
   a. Determinar quin a de ser la relació entre el preu de venda i el preu de cost de cada polsera per a obtenir de 750 € amb la venda de 500 polseres.
   b. ¿Es pot obtenir aquest benefici amb aquestes vendes venent les polseres a menys de 1,5€?
   c. ¿Es pot obtenir aquest benefici amb aquestes vendes venent polseres al doble del seu preu de cost?

Com es pot observar, el primer problema correspon exactament a una desigualtat com les de la primera part el curs, on cal comparar una cúbica i una hipèrbola. El segon problema reprodueix una situació molt similar als dos problemes estudiats a la unitat 6 amb una funcions de costos quadràtica on es demana realitzar i interpretar dues variacions: la dels costos fixos (translació vertical de la funció de costos) i la del preu unitari (augment del pendent de la recta d'ingressos). El tercer problema proposa un estudi anàleg al del cas de les samarretes quan la funció de costos és lineal. Les preguntes són molt detallades i inclouen aspectes tècnics i interpretacions en termes del sistema econòmic considerat.

3.3. Descripció de l'experimentació

El curs que aquí es proposa s'ha experimentat a la Facultat d'Economia IQS de la Universitat Ramon Llull en els tres darrers anys: Setembre 2004, Setembre 2005 i Setembre 2006, tant en sessions de matins com de tardes. En tots sis casos, la durada del curs ha estat de 30 hores distribuïdes en 10 sessions. El nombre d'alumnes ha variat entre els 40 i 50 per sessió. Durant els cursos del 2004 i 2005 hi van haver dues professores per als dos grups, una al matí i l'altra a la tarda i una observadora per al grup de tardes. Durant el curs 2006 una professora diferent de les dues anteriors es va responsabilitzar dels dos grups de matins i tardes. Aquest curs no es va observar.

L'estructura i la gestió de cada sessió han estat però molt similars en totes les experiències. Nosaltres considerarem aquí el curs experimentat al setembre 2005 en sessió de matins. Descartem l'experimentació del 2004 ja que creiem que una primera edició no és òptima per a una anàlisi exhaustiva ja que no teníem referències prèvies. I descartem la darrera edició que no ha estat observada, i per a la qual, a més, no disposem encara de les notes finals del curs "ordinari" i per tant, no podem treure conclusions sobre la incidència que ha tingut en el rendiment dels alumnes.

A continuació detallarem breument com es va viure l'experimentació d'aquest curs en relació amb l'anàlisi a priori (§ 3.2.1.):

- Unitat 1

Es va presentar als alumnes la qüestió general Q_0 (comparar ingressos amb costos) i es va lliurar el primer llistat de funcions (Annex 1). Tal i com s'ha descrit en l'anàlisi a priori del Recorregut Didàctic, el professor va iniciar el *moment del primer encontre*, va especificar la qüestió en termes de l'estudi de desigualtats entre funcions i va deixar els alumnes explorar els problemes per grups. La distribució es va fer per grups de 2 i de 3, trobem que hauria estat millor fer grups de 4 persones, que hagués facilitat la comunicació i el debat. Els grups van estar discutint les primeres inequacions durant tres quarts d'hora. Cada grup va entregar un informe amb les solucions. Es va fer una pausa per tal que la professora revisés tots els informes on efectivament es va comprovar que les tècniques dominants a Secundària són les algebraiques i que els alumnes no validen les solucions ni saben com expressar la solució d'una inequació (que és un interval de valors i no un nombre concret). A la tornada de la pausa, la professora va introduir a la pissarra la tècnica gràfica per invalidar les solucions errònies proposades pels alumnes, especialment en el cas de les inequacions de segon ordre. Es deixa per fer a casa l'estudi de les altres funcions quadràtiques i lineals presents a la llista.

- Unitat 2

Un cop "motivada" a la sessió anterior la necessitat de la tècnica gràfica, la professora explica als alumnes les translacions i dilatacions que permeten passar de la paràbola $y = x^2$ a $y = a(x - b)^2 + c$. D'entrada els alumnes són una mica escèptics i volen tornar sempre a la tècnica apresa prèviament: donar valors a la funció i, com a molt, trobar els punts de tall amb l'eix O*x*. Podem dir que la "presentació ràpida" de la paràbola no els sembla prou ortodoxa perquè es realitza fent pocs càlculs.

Unitat 3, 4 i 5

En aquest cas, com que els alumnes no dominen la representació gràfica de les cúbiques, hipèrboles i exponencials, la tècnica de les transformacions els sembla prou apropiada i no ofereixen tanta resistència com en el cas de les paràboles. En general, però, els alumnes que assistien al curs tenien una bona preparació matemàtica, la qual cosa explica millor les seves "resistències" a tècniques noves quan ja en dominen de prèvies. Tanmateix es van adaptar ràpidament a la tècnica gràfica perquè els proporcionava una visió més global i entenedora de les situacions considerades.

- Unitat 6

Aquesta última unitat de resolució de problemes de modelització va ser com la daga final per als qui s'havien resistit a canviar de tècnica, doncs les interpretacions i les petites variacions de la gràfica feia poc apropiades tant la tècnica algebraica de resolució d'inequacions com la tècnica de la representació gràfica "pas per pas". També volem comentar que en general els alumnes es mostraven satisfets d'estudiar casos econòmics "reals" que els aportava una visió funcional de la matemàtica i, molt especialment, de la feina que havien fet fins el moment.

Globalment, i com passa amb tots el grups d'alumnes, el ritme de treball i el bagatge matemàtic del grup era prou heterogeni. A més, el fet de venir de centres de Secundària diferents, atorgava al curs una nova funció que no havíem indicat: la d'unificar les petites variacions que es produeixen en les notacions, designacions i "maneres de dir" que de vegades compliquen molt la comunicació matemàtica amb els alumnes.

A continuació, resumim els resultats obtinguts en la prova final[18], pels 41 alumnes que la van realitzar. Donat el caràcter diferenciat de les dues parts de la prova, vam decidir fer l'anàlisi per separat:

Primera Part:

Nota/10	Alumnes	
0 – 4,5	12	29%
5 – 7,5	11	27%
8 – 10	18	44%
Total	41	100%

En la primera part, més del 70% ha aplicat correctament la tècnica gràfica per a la resolució de les inequacions proposades i gairebé la meitat ha realitzat bé les variacions de la tècnica pertinent per a proporcionar les interpretacions gràfiques demanades.

Per tant, es pot afirmar que els alumnes han aconseguit majoritàriament articular les dos tècniques elementals estudiades en Secundària: la resolució algebraica d'inequacions i la representació de funcions.

Segona part:

Nota/10	Alumnes	
0 – 4,5	12	29%
5 – 7,5	10	24%
8 – 10	19	46%
Total	41	100%

Una àmplia majoria dels alumnes ha resolt correctament el problema de modelització elemental, sent un 46% els que ho han abordat perfectament.

Si mirem globalment les dues parts observem que les qualificacions són molt satisfactòries ja que sobre 20 obtenim una nota mitjana de 12,9 amb una desviació de 5,4. Observem també que el 50 % ha tret més de 14,5.

	1ª Part	2ª Part	Total
Mitjana	6,6	6,3	12,9
Desviació	2,7	3,3	5,4
Mediana	7	7	14,5

[18] Bosch, Gascón i Serrano (2006)

	Segona part

Referent a la relació entre les dues parts de la prova (resolució d'inequacions i el problema de modelització), la majoria dels alumnes que han resolt correctament la segona part, forma part dels que han sabut integrar les dues tècniques per a resoldre inequacions (primera part). De fet, només 15 dels 41 alumnes (37%) han tret millor puntuació en la segona part, i d'aquests, només en 4 casos la puntuació de la segona prova superava en més de dos punts a la de la primera. Per tant, podríem parlar d'una possible implicació entre les dues parts: *realitzar correctament la segona part, implicaria (estadísticament) haver realitzar correctament la primera*. La taula següent mostra les dades agrupades però, al ser mostra molt petita, no permet treure conclusions al respecte:

Primera part ↓	**0 – 4,5**	**5 – 7,5**	**8 – 10**
0 – 4,5	8	2	2
5 – 7,5	4	2	5
8 – 10	0	6	12

En tot cas, els resultats obtinguts en la prova indiquen que s'han complert els objectius del curs en el sentit de l'articulació de les tècniques mencionades i la preparació a la resolució de problemes de modelització.

3.4. Anàlisi i resultats obtinguts

Un dels objectius d'aquesta experimentació és veure quina incidència ha tingut sobre els alumnes la realització del curs experimentat des del punt de vista del rendiment acadèmic. Evidentment hi ha molts factors que influeixen i, per tant, a l'hora de fer una anàlisi hem de fitar els factors que volem estudiar.

En primer lloc, hem de definir el que entenem per "rendiment". Donat que en el curs només es treballa el tema de la modelització funcional amb una variable, hem cregut convenient estudiar la incidència de l'assistència al curs sobre *la nota del primer parcial* que és el que correspon a l'estudi de funcions en una variable (el curs consta de tres blocs: Funcions en una variable, Funcions en vàries variables i Àlgebra lineal).

Una vegada establerta la nota sobre la que farem l'estudi, vàrem escollir fer un disseny factorial complet i vàrem triar com a possibles factors els següents:

- Assistència al curs (mínim el 80% de les sessions);
- Haver demostrat interès a l'assignatura de matemàtiques (a criteri del professor responsable: assistència continuada a les classes, entrega d'exercicis, etc.);
- Opció de Matemàtiques al Batxillerat (cientificotecnològic o social);
- Procedència (venir de batxillerat o de cicles formatius).

Com que cadascun d'aquests factors únicament pot prendre dos valors, obtenim en total $2^4 = 16$ combinacions possibles. Construïm una matriu de Box, Hunter & Hunter per a un disseny factorial complet 2^4 i obtenim els resultats que indica la taula següent:

A	*CURSET*
B	*INTERÈS*
C	*OPCIÓ*
D	*PROCEDENCIA*

I	Factors i interaccions	Efectes	Signe	P(i)	1 - α	z
1	AC	0,937993	-	53,33	0,53	0,082813
2	ABCD	2,375698	+	56,63	0,57	0,167047
3	BD	2,491174	+	59,97	0,60	0,252484
4	ACD	3,332841	-	63,33	0,63	0,339809
5	ABC	3,770136	+	66,63	0,67	0,429811
6	BCD	4,62292	+	69,97	0,70	0,523442
7	BC	6,731247	+	73,33	0,73	0,621912
8	C	7,700896	+	76,63	0,77	0,726825
9	AD	12,92887	-	79,97	0,80	0,840431
10	CD	14,06994	+	83,33	0,83	0,966088
11	AB	15,6241	+	86,63	0,86633	1,109225
12	ABD	16,77173	+	89,97	0,89967	1,279655
13	B	17,38701	-	93,33	0,93333	1,498513
14	A	17,59196	-	96,63	0,96633	1,829443
15	D	27,99832	-	99,97	0,99967	3,402933

Observem doncs que la incidència que té haver assistit al curs sobre la nota de l'examen del primer parcial és *el segon factor més important* després del fet de provenir de batxillerat i no de cicles formatius. Els resultats obtinguts indiquen que el fet d'haver realitzat el curs ha fet que els alumnes traguessin *17,59 punts més (sobre 100)* que els que no l'han realitzat.

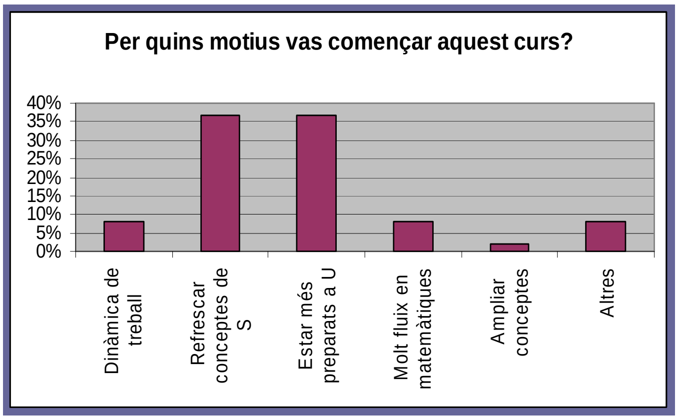
És important assenyalar que es va realitzar un estudi d'experiments similar amb les dades dels alumnes que van assistir al curs de setembre 2003 que era un curs de tipus "repàs general de les principals nocions de Secundària", semblant al curs "d'estil clàssic" comentat en el capítol 2.[19] En aquell cas, l'anàlisi factorial no va donar cap incidència del curs de setembre sobre la nota de l'assignatura de matemàtiques. Donat que el curs de setembre incloïa continguts de tota l'assignatura de matemàtiques de primer, es va associar el rendiment amb el resultat de la nota de l'examen final de juny.

[19] Aquest treball es va realitzar en el marc d'un curs de metodología "Disseny d'Experiments" l'any 2004, a l'escola d'enginyeria IQS sota la responsabilitat dels professors Xavier Tomàs i Laura Fernández.

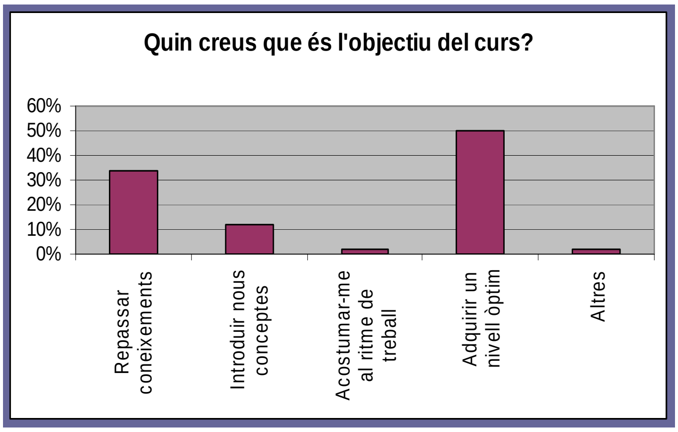
Potser el temps transcorregut entre la realització del curs de setembre i la de l'examen final podria explicar la poca incidència del primer sobre el segon.

Un altre dels objectius de la nostra experimentació, al marge de l'aspecte de la incidència acadèmica, és la valoració que aporten els alumnes sobre el treball realitzat. Per a això hem analitzat les enquestes passades en cadascuna de les experimentacions en les que es demanava valorar diferents aspectes del curs: novetat del tipus de treball realitzat, relació amb les matemàtiques de Secundària, ritme de treball, explicacions dels professors, expectatives inicials, "quantitat" de conceptes nous abordats, aprofitament del curs, adequació de l'horari, longitud, etc. (veure annex 5).

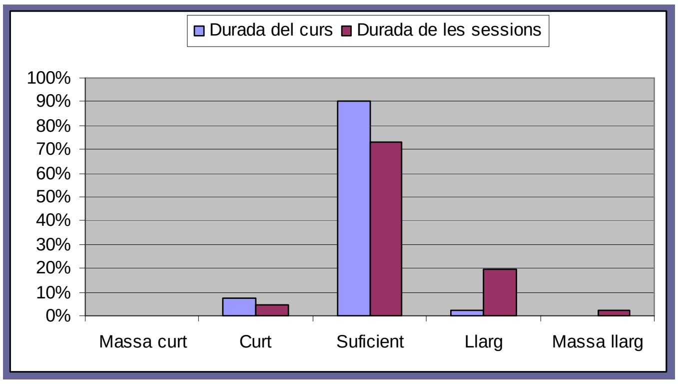
Els resultats obtinguts a l'enquesta del 2005 són els següents:



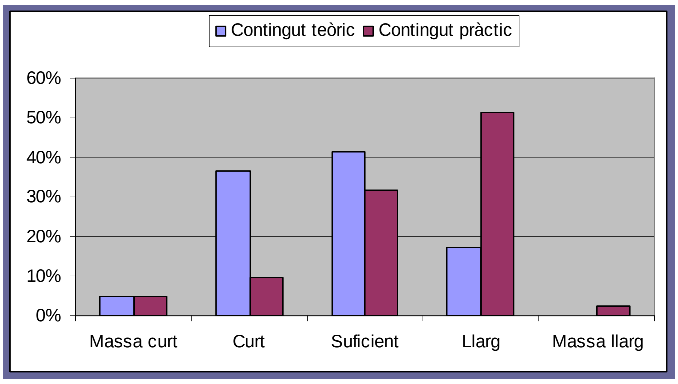
Majoritàriament els alumnes veuen el curs com una "posada a punt" abans d'iniciar el curs universitari. Parlen de "repassar" o "refrescar" continguts i de millorar la seva preparació.



Principalment creuen que el curs els permetrà adquirir un nivell "òptim" per abordar amb tranquil·litat les matemàtiques del primer curs universitari. Això ens fa suposar que el fet de proposar cursos propedèutics ja és una manera de dir als alumnes que amb el nivell que porten de Secundària no hi ha suficient

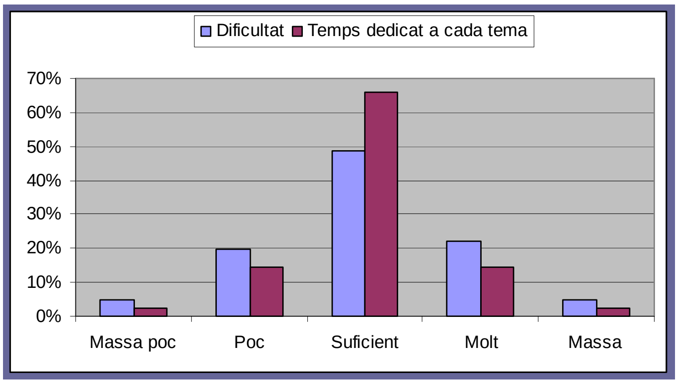


Tenint en compte que les sessions eren de 3 hores diàries, 3 dies en setmana consecutius (dimarts, dimecres i dijous) durant 3 setmanes, la valoració ha estat força positiva.

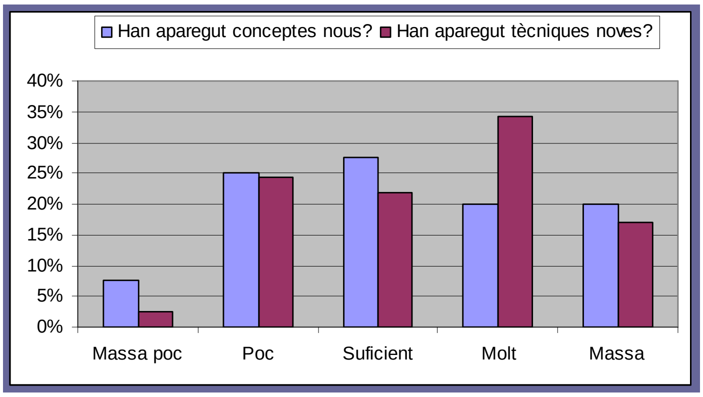


Els alumnes estan acostumats a un tipus diferent de curs, on esperen una sèrie de continguts teòrics abans d'abordar la pràctica.

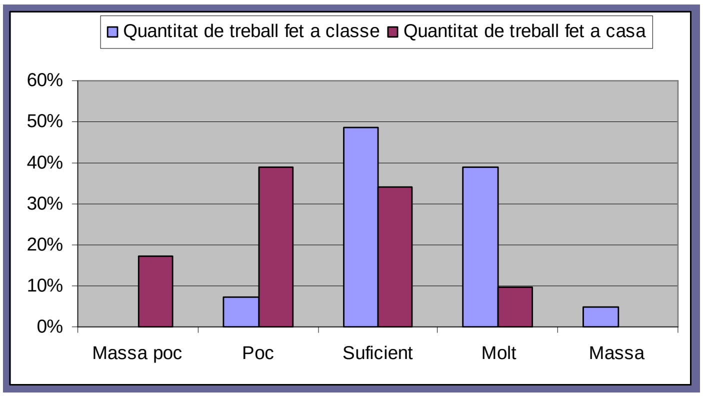
En el curset, la part teòrica ja era del domini de l'alumne i lògicament no s'havia de dedicar gaire temps, cosa que a l'alumne el "descol·loca" una mica. En aquest sentit es veu reflectida en l'enquesta que molts d'ells diuen que se'ls ha fet curta la part teòrica i en canvi molt llarga la part pràctica. A classe però, quan fèiem la part teòrica, molts alumnes ens deien que ja la sabien i que els interessava més anar a la part pràctica.



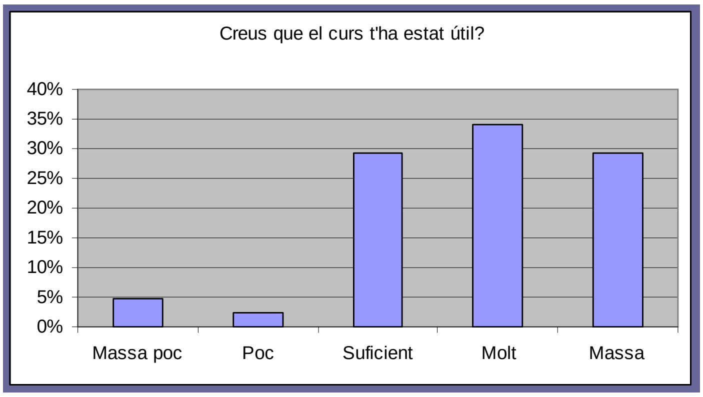
En general han considerat que el curs no els ha suposat problemes greus en la dificultat, ni tampoc els hi ha semblat malament la distribució del temps dedicat a cada tema.



És curiós que la sensació dels alumnes sigui que han aparegut conceptes nous, potser és degut a que hem utilitzat de forma diferent els conceptes que ja sabien. Si que és més coherent la sensació majoritària de que han aparegut tècniques noves.



El pes majoritari de treball es feia a classe, com així queda reflectit en l'enquesta. S'ha de dir que la feina proposada per fer a casa no sempre s'havia de presentar a la professora, motiu pel qual no sempre era realitzada pels alumnes.



Com es pot veure, la sensació majoritària ha estat molt positiva. Hem de comentar que els alumnes que han respost negativament són alumnes que van demostrar resistència a canviar les tècniques apreses a Secundària.

Un cop vistos els resultats globals, en volem destacar els punts següents:

(1) En general podem parlar d'una *satisfacció general del curs*: els alumnes no destaquen grans insuficiències, aporten comentaris positius, consideren el curs molt útil i, malgrat la durada, se'ls fa curt. No el consideren gaire difícil i noten que es dedica força temps a cada tema.

(2) La majoria dels alumnes comenten com a gran aportació del curs l'aparició de la tècnica gràfica, que els ha permès resoldre problemes de forma àgil i "entendre el perquè" de coses que havien après a fer a Secundària.

(3) Molts alumnes troben que en el curs s'han introduït pocs conceptes nous. Aquesta apreciació és sens dubte deguda a que molts dels continguts introduïts són aspectes tècnics (en oposició a "conceptuals") que no tenen un nom establert, la qual cosa els fa difícils d'identificar per part dels alumnes. Això també denota que els alumnes estan acostumats a veure moltes coses en molt poc temps (i en el curs que nosaltres presentem es veuen "poques" coses en molt temps) i que s'esperen un curs de repàs on s'abordin, de manera necessàriament superficial, la majoria de continguts de Secundària. Tanmateix, també podem considerar que aquesta observació denota una dificultat del curs pel que fa a la institucionalització de les organitzacions matemàtiques introduïdes i reconstruïdes, degut sens dubte a la falta d'un vocabulari preestablert per designar i nombrar els components praxeològics utilitzats.

(4) La sensació general dels alumnes és que han percebut un canvi important en el tipus de treball que estan acostumats a realitzar en Secundària, tal com indiquen comentaris del tipus: "...a Secundària es feien coses sense saber perquè i de forma mecànica, i en aquest curset t'expliquen per a què serveixen les coses i de forma més senzilla, sense haver de fer tants càlculs", "hem vist noves formes de resolució més pràctiques i eficaces" o bé "el ritme del curs és millor ja que és més pràctic".

3.5. Conclusions

L'observació d'uns quants cursos propedèutics "estàndard" ens havien conduït a formular la hipòtesi que, pel gran nombres d'organitzacions matemàtiques introduïdes i el tipus d'organitzacions didàctiques utilitzades, els cursos propedèutics semblen contribuir a augmentar l'aïllament de les organitzacions matemàtiques estudiades a secundària. La nostra proposta era llavors dissenyar un curs que intentés superar aquest aïllament proposant elements articuladors en els termes introduïts per Fonseca (2004). Reprendrem ara els indicadors que proposa aquest autor per comprovar en quin sentit podem considerar que el curs dissenyat compleix aquestes característiques:

- ***Respecte de l'organització didàctica utilitzada:***

En cadascuna de les unitats proposades, s'ha intentat que els alumnes visquessin els diferents *moments de l'estudi*[20] i de la forma més autònoma possible. Aquesta autonomia es va aconseguir pel que fa al moment exploratori i del treball de la tècnica, però, llevat de la tercera part del curs, no es va idear cap dispositiu específic perquè fossin els alumnes els qui gestionessin els moments de la institucionalització i el de l'avaluació, cosa que es podria mirar de fer en properes realitzacions del curs.[21] Pel que fa al moment tecnologicoteòric, aquest va ser força compartit donat que els alumnes formulaven dubtes i qüestions durant els moments exploratori i del treball de la tècnica que eren recollits sistemàticament pel professor i tractats en gran grup. Va faltar potser que aquestes qüestions s'incloessin posteriorment en el moment de la institucionalització, donant-los un estatut particular i assignant-los el lloc que els pertany en la construcció de l'organització matemàtica global en construcció.

Donat que l'autonomia dels alumnes és poc freqüent a Secundària, els alumnes mostraven certa resistència a assumir les responsabilitats que se'ls proposaven. Tot i això, creiem que es van acabar adaptant a la nova situació. Aquesta *evolució del contracte didàctic* en el sentit d'aconseguir que els alumnes assumeixin majors

[20] Moment del primer encontre (OD1), moment exploratori (OD2), moment del treball de la tècnica (OD3), moment tecnologicoteòric (OD4), moment de la institucionalització (OD5) i moment de l'avaluació (OD6).
[21] Seguint, per exemple, les aportacions de Rodríguez (2005) i Barquero (2006).

responsabilitats en la gestió dels processos d'estudi és, al nostre parer, una de les discontinuïtats més grans entre la Secundària i la Universitat i ha estat poc estudiada fins el moment.

- ***Respecte de les organitzacions matemàtiques aparegudes:***

Recordem que una organització matemàtica serà més o menys "completa" en funció del grau en què les seves components compleixin els indicadors descrits a l'apartat 1.3.1. En aquest curs que presentem, s'han aconseguit incorporar plenament les característiques donades pels indicadors següents:

- OML1. *Integració de diferents tipus de problemes*

La representació gràfica de funcions, la resolució d'equacions, la resolució d'inequacions i l'estudi del benefici d'una empresa (donada la funció d'ingressos i la de costos) van aparèixer en el curs com un únic tipus de tasca.

- OML2. *Diferents tècniques per a cada tipus de tasques*

Els alumnes van veure que per representar gràfiques de funcions, resoldre equacions o resoldre inequacions hi havia més maneres de fer que la que havien après a Secundària i que totes aquestes noves tècniques estaven formades per ingredients praxeològics que ells tenien disponibles.

- OML5. *Interpretació del funcionament i del resultat d'aplicar les tècniques*

Com hem vist amb els comentaris dels alumnes al qüestionari final, aquesta exigència tecnologicoteòrica d'explicar, interpretar i "entendre" el que fan es va aconseguir plenament. Creiem que és una de les fites més importants del curs.

- OML6. *Existència de tasques matemàtiques* "*obertes*"

Aquest aspecte va aparèixer a les dues últimes parts del curs i creiem que els alumnes van saber assumir prou bé el desconcert de les preguntes obertes.

- OML7. *Integració d'elements tecnològics i incidència sobre la pràctica*

Aquest indicador està molt correlacionat a OML1 i OML5. I és clar que l'organització matemàtica construïda entorn de la tècnica gràfica conté precisament uns elements tecnològics molt propers a la pràctica, necessaris per justificar les solucions de les inequacions i permetre calcular-ne un valor aproximat.

Pel que fa a l'indicador OML3 (*Independència dels objectes ostensius que instrumenten les tècniques*) els alumnes mostraven certa resistència a utilitzar notacions i expressions diferents de les que estaven habituats. Donat que tots ells provenien de centres de

Secundària diferents, es va intentar al contrari unificar termes, expressions i notacions de cara a afavorir el treball en grup i la interacció entre els alumnes i amb la professora.

Respecte l'indicador OML4 (*Existència de tasques i de tècniques "inverses"*), tot i que potencialment es podrien haver treballat qüestions com "a partir de quin nombre de vendes el benefici és més gran que una certa quantitat?", "quant hem d'apujar el preu unitari per incrementar el benefici?", etc., no va haver temps material per dur-ho a terme. Pensem però, que els alumnes podrien donar respostes fàcilment activant els ingredients donats durant el curs i això es podria provar en una propera realització del curs per exemple preguntant-ho a la prova final.

Podem doncs afirmar que el treball dut a terme durant el curs ha permès que es construís una organització matemàtica relativament completa, fruit de la integració i desenvolupament de diferents organitzacions puntuals que els alumnes aprenen a Secundària.

Capítol 4. Qüestions obertes i prospectiva de recerca

La nostra recerca parteix dels resultats obtinguts per Cecilio Fonseca (2004) en el seu estudi del problema de les discontinuïtats matemàtiques i didàctiques entre la Secundària i la Universitat. Aquest estudi ja posava de manifest que les esmentades discontinuïtats no depenen exclusivament de la manera d'organitzar l'ensenyament de les matemàtiques a Secundària, sinó també de la forma com es reprenen i desenvolupen aquestes matemàtiques a l'inici dels estudis universitaris.

Treballs posteriors del nostre equip d'investigació (García, 2005; Ruiz-Higueras, Estepa i García, 2006), centrats en l'àmbit de l'ensenyament secundari, permeten considerar aquestes discontinuïtats com una manifestació d'un problema didàctic més general que es pot formular en termes de la "desarticulació" de les matemàtiques escolars (cf. § 2.3). Aquest problema afecta tot l'ensenyament de les matemàtiques a partir de la Secundària, encara que es posi més clarament de manifest en el canvi d'etapa educativa i, molt especialment, quan això comporta a més un canvi d'institució docent. D'aquí que el pas de Secundària a la Universitat hagi esdevingut el que podríem anomenar un "punt sensible" del sistema educatiu, punt en el qual se situa l'origen de la nostra investigació.

Podem distingir tres aspectes diferenciats del problema de la desarticulació del currículum de matemàtiques que ens ajudaran a situar els resultats obtinguts en el nostre estudi i a plantejar la nostra prospectiva de recerca. El primer és el problema de l'atomització i de la rigidesa de les Organitzacions Matemàtiques que s'estudien a Secundària, tractat abastament a la tesi de Fonseca i que, en certa manera, antecedeix temporalment al problema del pas de Secundària a la Universitat. El segon és el problema de la transició entre aquestes dues institucions, que es manifesta en les discontinuïtats matemàtiques i didàctiques que s'hi produeixen. El tercer aspecte a considerar és el de la desarticulació del currículum universitari, punt poc desenvolupat a la tesi de Fonseca i que, com veurem, constituirà la nostra perspectiva d'investigació.

4.1. La incompletesa de les organitzacions matemàtiques de Secundària

La tesi de Fonseca posa de manifest l'*atomització* i la *rigidesa* del bagatge matemàtic dels alumnes quan arriben a la universitat, atribuint-les al que defineix com una *"incompletesa"* de les organitzacions matemàtiques que s'estudien a l'ensenyament secundari i, més específicament, al batxillerat. Aquesta "incompletesa" ve provocada – i, alhora, es manifesta – per tres característiques bàsiques: l'estudi de problemes aïllats i atomitzats, amb una única tècnica associada a cada tipus de problema; la construcció d'un discurs teòric molt reduït i molt sovint insuficient per explicar, justificar i desenvolupar les tècniques, modificar-ne les notacions, relacionar-les entre sí, així com per connectar els diferents tipus de problemes entre sí; l'absència d'un treball de modelització prolongat en el temps a partir de la consideració de qüestions matemàtiques o extra-matemàtiques "vives" amb prou poder generatiu.

La recerca duta a terme per Fonseca postula que aquesta incompletesa matemàtica estaria relacionada amb una "incompletesa didàctica" causada per una realització feble d'alguns moments importants del procés d'estudi (moment exploratori, moment del desenvolupament de la tècnica, moment tecnologicoteòric, moment de l'avaluació) i per l'absència d'un qüestionament inicial que motivi i atorgui una raó de ser a les principals nocions i tècniques que els alumnes han d'aprendre a utilitzar. Les matemàtiques de Secundària apareixen així com una juxtaposició de coneixements *puntuals* que consisteixen bàsicament en aplicar tècniques predeterminades a problemes aïllats, amb un entorn teòric limitat que assumeix una funció merament descriptiva i resulta poc operatiu per justificar l'ús de les tècniques, avaluar la potència i àmbit de validesa dels coneixements construïts, desenvolupar-los i connectar-los entre ells.

Val a dir que les restriccions institucionals que pesen actualment sobre les organitzacions didàctiques de Secundària i, en conseqüència, condicionen el tipus d'activitat matemàtica que és possible dur a terme, deixen poc marge de llibertat als professors per pal·liar aquesta situació. Es requereixen transformacions estructurals que van més enllà de la millora de l'actuació del professor a l'aula i, fins i tot, de la seva formació inicial o continuada.[22] Una de les línies recents d'investigació dins l'enfocament que proposa la Teoria Antropològica del Didàctic propugna la necessitat d'introduir en els sistemes d'ensenyament processos d'estudi *funcionals* (i no formals), és a dir, dissenyats en una perspectiva no-monumentalista, on els sabers no són monuments que el professor "ensenya", sinó eines materials i conceptuals útils per estudiar i resoldre situacions problemàtiques. Aquests processos es concreten en el que Chevallard (2004) anomena "Recorreguts d'Estudi i Investigació" (REI), centrats en l'estudi prolongat de qüestions problemàtiques que siguin alhora "vives" i "fecundes", és a dir que requereixin com a resposta la construcció de tota una seqüència d'organitzacions matemàtiques alhora completes i articulades.

Una de les línies de treball del nostre grup de recerca consisteix precisament en l'estudi de les possibilitats d'implementació d'aquests REI en el sistema d'ensenyament secundari actual, tant a nivell de la secundària obligatòria (García 2005) com del batxillerat (Rodríguez 2005; Ruiz Munzón 2006). Aquesta és una de les possibles vies d'atac del problema de la desarticulació del currículum de Secundària degut al fet essencial que els REI possibiliten la integració escolar de l'ensenyament de la *modelització matemàtica* (en el sentit descrit, per exemple, en Barquero 2006) i al fet que la modelització matemàtica constitueix un instrument d'articulació molt potent de la matemàtica escolar. Però es tracta, és clar, d'una línia de recerca que s'ha desenvolupat, fins al moment, amb caràcter molt puntual i experimental, i està encara lluny de fer propostes generalitzades.

4.2. El problema del pas de Secundària a la Universitat

El segon aspecte del problema de la desarticulació de les matemàtiques escolars el trobem allà on sembla manifestar-se amb més força: en el fracàs dels alumnes de Secundària que s'inicien als estudis universitaris.[23] En aquest punt és on se centra la investigació que presentem en aquesta memòria. L'estudi dels cursos propedèutics que

[22] Sobre aquest tema, veure Bosch i Gascón (2005).
[23] Aquest fracàs també s'està fent notar cada cop més en el pas de l'ESO al Batxillerat. Per desgràcia, Espanya és un dels països d'Europa pitjor situats al respecte.

s'estan impartint actualment a les universitats espanyoles i la nostra pròpia proposta i experimentació ens permeten arribar a les conclusions següents:

(A) Hem vist que la resposta dominant, des de la universitat, al problema de les discontinuïtats matemàtiques i didàctiques dels alumnes que provenen de Secundària es materialitza en cursos amb un programa amplíssim pel que fa a la quantitat d'organitzacions matemàtiques diferents que cal estudiar (o, degut al poc temps que se'ls dedica, que tant sols es poden "visitar") i amb una organització didàctica molt simplista pel que fa als diferents tipus de moments que es proposa fer viure a l'alumne: moment de la *institucionalització* i moment *exploratori* o *tecnologicoteòric*. Aquesta situació ens condueix a postular que aquest tipus de cursos propedèutics agreugen la desarticulació de les organitzacions matemàtiques que conformen el bagatge dels alumnes i, per tant, les discontinuïtats matemàtiques i didàctiques entre la Secundària i la Universitat.

(B) Hem mostrat la possibilitat d'introduir en el sistema d'ensenyament universitari[24] una organització didàctica "viable" elaborada partint dels següents criteris directors proposats per Fonseca (2004) en les conclusions del seu treball:

> (1) La organització didàctica ha de fer possible desenvolupar les tècniques matemàtiques que utilitzen els alumnes més enllà de la seva aplicació rígida a un únic tipus de problemes;
>
> (2) El procés d'estudi ha de partir d'una qüestió amb prou poder generador com perquè la seva resposta requereixi l'articulació de diferents organitzacions matemàtiques prèviament disponibles en una organització com a mínim local i relativament "completa".

(C) Donades les característiques particulars dels cursos propedèutics en què centrem el nostre estudi, cal afegir a les dues característiques anteriors una tercera:

> (3) Tant la qüestió inicial com les organitzacions matemàtiques disponibles que cal completar i integrar s'han de triar de manera que el seu desenvolupament

[24] Pel tipus de curs que considerem, no creiem que la variable universitat pública / universitat privada sigui molt determinant en aquest cas. En efecte, les condicions de realització dels cursos que hem observat han estat totes molt similars, sense massa diferència d'una universitat a l'altra.

posterior tingui un paper clau en l'assignatura de matemàtiques que els alumnes hauran de cursar després.

Aquestes característiques (o, millor, la seva absència) són les que ens permeten explicar la poca incidència sobre el rendiment dels alumnes de cursos propedèutics massa genèrics i exhaustius com els que es proposen habitualment.

(D) Per tal de completar i integrar les organitzacions matemàtiques que s'estudien a Secundària, el curs experimentat introdueix el que podríem anomenar "tècniques mixtes" formades a partir de la composició de tècniques "simples" que apareixen en les diferents organitzacions matemàtiques puntuals que volem articular. Es tracta de tècniques que la institució de Secundària considera com a tècniques "independents" i que, naturalment, els alumnes no saben relacionar ni integrar espontàniament. Entre aquestes tècniques "mixtes" podem citar les següents:

- Les tècniques graficoalgebraiques que relacionen els canvis de les gràfiques de les funcions d'una família (especialment canvis produïts per translacions i dilatacions de la gràfica) amb els canvis de la expressió algebraica corresponent.
- Les tècniques gràfiques que permeten resoldre (encara que només sigui aproximadament) la equació o les inequacions associades a una funció.
- Les tècniques (molt poc visibles) que permeten interpretar les variacions de les gràfiques de les funcions (o dels paràmetres de l'expressió algebraica d'aquestes funcions) en termes de variacions de les magnituds que caracteritzen la situació que modelitzen.

(E) Un resultat interessant que ja hem destacat en l'anàlisi dels resultats obtinguts a l'enquesta que es va passar als alumnes en acabar el curs és que, pel fet d'introduir un tipus d'organització didàctica "peculiar" i, en tot cas, allunyada de les organitzacions didàctiques habituals en Secundària, tant les "resistències" dels alumnes com els comentaris que explicitaven sobre els diferents aspectes del curs (durada, quantitat de teoria i de pràctica, ritme de treball, etc.) mostren *en contraposició* les restriccions que pesen a l'ensenyament secundari sobre el tipus de procés experimentat. Les podem resumir en els tres punts següents:

- Quan els alumnes opinen que en el curs propedèutic "s'ha vist poca matèria", ens estan dient que, en general, a Secundària, el ritme d'introducció de noves nocions i noves tècniques és molt més ràpid. Per tant, el seu grau de desenvolupament és molt menor i això condueix a la construcció d'organitzacions puntuals aïllades i rígides.
- Quan els alumnes opinen que s'ha vist "poca teoria i molta pràctica", ens estan dient que, en general, a Secundària, el tipus d'organització didàctica dominant és aquella on el professor presenta (força) conceptes nous que després els alumnes aprenen a utilitzar, en relativa "poca estona".
- Quan els alumnes opinen que amb el que han fet al curs "entenen el perquè de les coses", ens estan dient que, en general, a Secundària, el tipus d'organització didàctica dominant atorga molt poc espai al moment tecnologicoteòric i a la interpretació, validació i justificació de les tècniques emprades.

Aquesta lectura dels resultats de l'enquesta confirma la hipòtesi formulada per Fonseca (2004) del caràcter puntual, rígid i aïllat de les organitzacions matemàtiques de Secundària, així com de la "incompletesa" de les organitzacions didàctiques dominants.

(F) L'últim resultat que volem destacar, i que serà determinant per a la continuació que proposem de la nostra recerca, és la clara insuficiència que presenta el curs propedèutic com a possible via d'actuació per resoldre el problema de la transició secundària–universitat. En efecte, tant el tipus de qüestió general en la qual englobem aquest problema –*la desarticulació de les matemàtiques escolars*– com els resultats obtinguts a partir de les tres experimentacions successives del curs propedèutic, ens confirmen en la necessitat d'abordar el problema des d'un nivell superior d'actuació. Veiem dues possibles vies en aquest sentit:

- En primer lloc, cabria la possibilitat de fer més propostes de cursos "integradors" triant diferents qüestions problemàtiques i diferents tipus d'organitzacions matemàtiques de Secundària per completar i articular. Això donaria lloc a un ventall de cursos propedèutics que, en conjunt, podrien presentar-se com l'"estratègia d'articulació" de les matemàtiques de Secundària. Ara bé, degut a l'amplitud que prendria aquest programa d'estudis, aquesta estratègia ens conduiria, en cert sentit, al primer aspecte del problema abordat, a saber, el de la creació i experimentació de processos d'estudi "funcionals", en els quals es visquessin els diferents moments didàctics i calgués desenvolupar, completar i integrar les organitzacions matemàtiques suficientment com per transformar-les en sabers útils i no en simples objectes culturals que cal conèixer o, com a mínim, "haver visitat". Com hem dit al final del punt 4.1., aquesta és una de les vies de treball del nostre equip de recerca i, encara que ja comenci a donar els seus fruits, tot i ser puntuals i de caire experimental, encara estem lluny de la transformació general que es necessitaria al currículum de Secundària – o com a mínim del Batxillerat – perquè aquests resultats siguin suficientment significatius en aquest punt "sensible" que és el pas a la Universitat.

- La via de desenvolupament de la investigació que hem triat per desenvolupar aquest treball és la d'actuar no sobre les matemàtiques que s'ensenyen a Secundària sinó sobre les que s'ensenyen en un primer curs universitari. L'opció sembla més econòmica per diferents motius: ara com ara, les Facultats o Escoles Universitàries gaudeixen de més autonomia docent que no pas els Instituts d'Educació Secundària; els canvis que caldrà proposar afecten a menys grups d'alumnes, a menys professors per centre i a alumnes que ja tenen, o haurien d'estar assolint, més recursos didàctics. En definitiva, perquè les restriccions degudes al procés de transposició didàctica són més "dures" a l'ensenyament secundari que a la Universitat. A més, l'opció també ens sembla més "justa" en el sentit de situar millor el problema de la transició entre la Secundària i la Universitat com un problema que afecta en la mateixa mesura els dos sistemes educatius.

4.3. Prospectiva de recerca: la desarticulació del currículum universitari i l'ensenyament de les matemàtiques com a instrument de modelització

Hem vist com el problema de les discontinuïtats matemàtiques i didàctiques entre la Secundària i la Universitat ens condueix, seguint una de les seves possibles vessants, al problema de la desarticulació del currículum universitari. Aquesta es manifesta tant en el predomini, a l'ensenyament universitari, d'organitzacions didàctiques "incompletes" que privilegien alguns pocs moments del procés d'estudi en detriment dels altres (el moment *tecnologicoteòric* i el de la *institucionalització* majoritàriament) com pel fet, conseqüència de l'anterior, que les organitzacions matemàtiques que aquestes organitzacions didàctiques permeten construir o reconstruir són incompletes ja que acostumen a presentar un component *teòric* hiperdesenvolupat en relació al seu component *pràctic*.

L'estudi del problema de la desarticulació del currículum universitari ha estat abordat dins l'enfocament que proposa la Teoria Antropològia del Didàctic pel treball recent de Berta Barquero (2006) que el formula en els termes següents:[25]

> *Donat un programa d'estudis proposat en una institució docent i descrit en termes clàssics, això és, mitjançant un llistat més o menys estructurat de "temes" (que contenen definicions, teoremes, demostracions i tipus de problemes), com dissenyar un procés d'estudi capaç de reconstruir en aquesta institució una organització matemàtica suficientment àmplia i relativament completa (diguem "regional") que articuli les organitzacions puntuals i locals que apareixen relativament aïllades i incompletes en el programa en qüestió?*

Atesa la importància que adjudiquem a la desaparició de les raons de ser de les matemàtiques que s'ensenyen, hem de completar la formulació anterior amb la següent qüestió:

> *Com dissenyar un procés didàctic capaç de situar les qüestions problemàtiques en el punt de partida de l'estudi, fent que aquestes qüestions siguin les generadores dels continguts matemàtics que s'ensenyen i, en conseqüència, permetin articular-los i mostrar-ne la funcionalitat?*

Tal com fa Barquero en el treball citat, creiem que per abordar aquest problema didàctic *és necessari que la modelització matemàtica s'integri de manera explícita i central en el procés d'estudi*. Però, a diferència de Barquero, que aborda el problema per a l'ensenyament de les matemàtiques a les titulacions universitàries de ciències i enginyeria, nosaltres ens centrarem en el cas de les matemàtiques com a instrument de modelització per a l'economia i l'empresa.

[25] Barquero (2006), pp. 66-67.

Per tant, el problema general que proposem abordar en la continuació d'aquest treball es pot formular en els termes següents:

Donat el programa actual de matemàtiques per al primer curs de llicenciatura d'Administració i Direccio d'Empreses o de diplomatura en Ciències Empresarials:

- *Com dissenyar un procés d'estudi capaç de reconstruir organitzacions matemàtiques suficientment àmplies i relativament completes que articulin les organitzacions puntuals i locals que apareixen relativament aïllades i incompletes en el programa en qüestió?*

- *Com dissenyar processos didàctics capaços de situar les qüestions problemàtiques del món de l'economia i l'empresa en el punt de partida de l'estudi, fent que aquestes qüestions siguin les generadores dels continguts matemàtics que s'ensenyen i, en conseqüència, permetin articular-los i mostrar-ne la funcionalitat?*

- *El programa actual de primer curs de matemàtiques es pot dividir en tres grans àmbits, l'àlgebra lineals i el càlcul diferencial i integral en una i dues variables. Quines serien en cada àmbit les qüestions generadores més apropiades per motivar la construcció dels diferents continguts matemàtics i quines són les organitzacions didàctiques més adequades en cada cas?*

- *L'ensenyament universitari, com qualsevol altre tipus d'ensenyament, està sotmès a restriccions transpositives que delimiten l'àmbit d'actuació de la institució docent (i del professor i els alumnes en particular) i permeten explicar les evolucions, diferències i regularitats que es presenten en les diferents institucions. Actualment, per exemple, les directrius de Bolònia constitueixen un clar exemple d'aquest tipus de restriccions. De quina manera la proposta de noves organitzacions didàctiques que cal dissenyar i implementar podran respondre a les actuals restriccions transpositives?*

Aquestes són les qüestions crucials que considerarem ara en els nostre propi recorregut de recerca. L'experiència duta a terme amb el curs propedèutic ens anima a seguir en la direcció entomada. Tanmateix som conscients que ens endinsem en un qüestionament molt més ampli i complex que només podrem abordar de manera limitada. Estem convençuts, però, que la via emprada serà productiva per al tan necessari progrés educatiu en l’àmbit de l’ensenyament universitari de les matemàtiques.

Referències Bibliogràfiques

ÁLVAREZ, P.; BLANCO, M.A., GUERRERO, M.; QUIROGA, R. (1998): Un diagnóstico del conocimiento básico matemático para la economia y la empresa. *VI Jornadas de Asepuma*.

BARQUERO, B. (2006): *Els Recorreguts d'Estudi i Investigació (REI) i l'ensenyament de la modelització matemàtica en el primer curs universitari de Ciències*. Treball de Recerca, Universitat Autònoma de Barcelona.

BLOCH, I.; GHEDAMSI, I.(2004): The teaching of calculus at the transition between uppers secondary school and university: factors of rupture. A study concerning the notion of limit. www.icme-organisers.dk/tsg12/papers/bloch-ghedamsi-tsg12.pdf

BOSCH, M. (1994): *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad.* Tesi Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. (2001): Las prácticas docentes del profesor de matemáticas. *Actas de las XVII Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Educación Matemática. Boletín SIIDM*. http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/welcome.htm

BOSCH, M.; GASCÓN, J. (2005): El tractament integrat de la formació del professorat de matemàtiques. *SCM Notícies,* Vol 21, 12-19.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. (2006): Twenty–Five Years of the Didactic Transposition. *ICMI Study bulletin58,* pp. 51-65.

BOSCH, M.; GASCÓN, J.; FONSECA, C. (2004): Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24/2.3, 205-250.

BOSCH, M.; GASCÓN, J.; SERRANO, L. (2006): Matemáticas para la Economía y Empresa en el paso de Secundaria a la Universidad. *IV Congrés Internacional de Docència Universitària i Innovació*. Barcelona, 5-7 de Juliol.

BOX, G.; HUNTER, W.; HUNTER, J. (1999): *Estadística para investigadores – Introducción al Diseño de Experimentos, Anàlisis de Datos y Construcción de Modelos.* Ed. Reverté

BROUSSEAU, G. (1998): *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques* 1970-1990 (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland and V. Warfield, Eds. and Trans.). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer (1997).

CAMACHO, M.E.; FERNÁNDEZ, P.; GÓMEZ, D.; MASERO, I.; VÁZQUEZ, M.J.; ZAPATA, A. (2005): Estudio de condicionantes que afectan al aprendizaje de las matematicas empresariales. *XIII Jornadas de Asepuma.*

CAMACHO, M.E.; GARCÍA, M.P.; MASERO, I.; VÁZQUEZ, M.J.; ZAPATA, A. (2005): Formación matemática preuniversitaria de los alumnos de las facultad de ciencias económicas y empresariales: experiencias en la licenciatura de ADE. *XIII Jornadas de Asepuma.*

CASTELLANOS, L.; GONZÁLEZ, M.C.; GONZÁLEZ DE SELA, M.A., MANZANO, I. M.(1998): Las matemáticas empresariales: estudio de los factores determinantes del rendimiento académico.*VI Jornadas de Asepuma.*

CHEVALLARD, Y. (1985): *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné* (2ª edició: 1991). Grenoble: La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, BOSCH i GASCON (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* ICE/Horsori: Barcelona

CHEVALLARD, Y. (1999): L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2) 221-266.

CHEVALLARD, Y. (2001): Aspectos problemáticos de la formación docente, *Boletín del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/welcome.htm

CHEVALLARD Y. (2002), Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation. In Dorier, J.-L. et al. (eds) *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques* - Corps - 21-30 Août 2001 (pp. 41-56). Grenoble: La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD (2004): La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. *3e Université d'été Animath*, Saint-Flour (Cantal), 22-27 août 2004, APMEP (pp. 239-263).

CHEVALLARD, Y. (2006): La problématique anthropologique en didactique, d'hier à demain. *Actas del 1r Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo didáctico*. Baeza (España). 27-30 Octubre.

CORCHO, P.; CORTÉS, G.; GUERRERO, M. (2005): Características académicas de los alumnos que inician estudios universitarios en ciencias económicas y empresariales. *XIII Jornadas de Asepuma*.

DONG, Y.; PEAT, M. (2004): Enhacing research and teaching to support students in transition from school to university. *The China Papers*.

ERICE, C. (2005): Estrategias de aprendizaje en la asignatura matematicas I de la diplomatura de ciencias empresariales. *XIII Jornadas de Asepuma*.

ESTAPÉ, G. (2005): Aprendre matemàtiques: treballar individualment o en grup? una experiència de treball cooperatiu a l'assignatura de matematiques aplicades a l'empresa. *II Jornades d'Innovació Docent.*

EVANS, M. (2004): Planning for the transition to tertiary Study: A literature review. *Journal of Institutional Research*. Disponible a: *www.icme-10.dk*

FERNÁNDEZ, G.M.; ESCRIBANO, M.C. (2005): El primer eslabón de las matemáticas en las facultades de CC. económicas y empresariales: los ànàlisis económicos lineales. *XIII Jornadas de Asepuma*.

FONSECA, C. (2004): *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad*, Tesis Doctoral, Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Vigo.

GARCÍA HERNÁNDEZ, J.M. (2001): Sobre la opción cursada en los estudios previos y su incidencia en las notas obtenidas en matemáticas de la L.A.D.E. *IX Jornadas de ASEPUMA.*

GARCÍA, F. J. (2005): *La modelización como instrumento de articulación de lamatemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*, Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén.

GASCÓN, J. (1998): Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18/1, 7-34.

GASCÓN, J. (2001): Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemàtica Educativa RELIME*. 4(2) 129-159.

KAJANDER, A.; LOVRIC, M. (2005): Transition from secondary to tertiary mathematics: McMaster University experience. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol 36, 2–3, 149–160

HOYLES, C.; NEWMAN, K.;NOSS, R. (2001): Changing patterns of transition from school to university mathematics. *Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol 32, 6, 829 – 845

LUK, H. (2005): The gap between secondary school and university mathematics. *Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol 36, 2-3, 161 – 174.

ORTEGA, J. (1990): *Introducció a l'anàlisi matemàtica*. Bellaterra: Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona.

RODRIGUEZ, E.(2005): *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas: una propuesta integradora desde el enfoque antropológico*. Tesis Doctoral: Universidad Complutense de Madrid. Departamento de psicología educativa y de la educación.

RUIZ, N. (2006): *Ecologia de la modelització algebraicofuncional al Batxillerat*. Treball de Recerca, Universitat Autònoma de Barcelona.

SIERRA, T. (2006): *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas*. Tesis Doctoral, Madrid: Universidad Complutense de Madrid. Departamento de didáctica y organización escolar.

PROGRAMES DE CURSOS PROPEDÈUTICS:

<http://laxarxa.uab.es/credits/curs.php?cur=896&cat=6>, període de consulta: setembre de 2006 – desembre de 2006

<http://laxarxa.uab.es/credits/curs.php?cur=1095&cat=7>, període de consulta: setembre de 2006 – desembre de 2006

<http://einstein.uab.es/_c_llic_fisica/propedeutic.htm>, període de consulta: setembre de 2006 – desembre de 2006

<http://laxarxa.uab.es/credits/curs.php?cur=242&cat=6>, període de consulta: setembre de 2006 – desembre de 2006

<http://laxarxa.uab.es/credits/curs.php?cur=886&cat=5>, període de consulta: setembre de 2006 – desembre de 2006

<www.upc.es>, període de consulta: setembre de 2006 – desembre de 2006

<http://www.aprendemas.com/cursos/cursos-introduccio-a-les-matematiques-empresarials-en-barcelona-168428.html>, període de consulta: setembre de 2006 – desembre de 2006

<http://www.uib.es/estudis/lliure_configuracio/06_07/2861_6.pdf>, període de consulta: setembre de 2006 – desembre de 2006

<http://www.uv.es/refutura/num1/pages/estudiar/e_equimica.htm>, període de consulta: setembre de 2006 – desembre de 2006

<http://www.etsea.udl.es/cat/estudis/informacio0203/Guia_BIOTEC_06-07.pdf>, període de consulta: setembre de 2006 – desembre de 2006

Annexos

Annex 1: Llista 1. Funcions d' ingressos i costos

INGRESSOS $I(x)$	COSTOS $C(x)$
(1) $I(x) = 1{,}06 \cdot x - 10$	**(a)** $C(x) = x/4 + 7$
(2) $I(x) = 3 \cdot x + 2$	**(b)** $C(x) = 4 \cdot x$
(3) $I(x) = x/100$	**(c)** $C(x) = 0{,}5 \cdot x + 0{,}25$
(4) $I(x) = x^2 - 3{,}5$	**(d)** $C(x) = 2 \cdot x$
(5) $I(x) = 5$	**(e)** $C(x) = x^2 + 2 \cdot x - 1$
(6) $I(x) = x^2 - 3 \cdot x$	**(f)** $C(x) = 0{,}5 \cdot x^2 + 4{,}5 \cdot x + 9$
(7) $I(x) = (x + 2)^2 - 4$	**(g)** $C(x) = (x + 1) \cdot (x + 3)$
(8) $I(x) = x - 50$	**(h)** $C(x) = 0{,}03 \cdot (x + 1)^2 + 3$
(9) $I(x) = 5 \cdot x - 3$	**(i)** $C(x) = 0{,}5 \cdot x^2 + 2 \cdot x$
(10) $I(x) = x^2 + 4 \cdot x$	**(j)** $C(x) = (x + 1)^2 + 1$
(11) $I(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2$	**(k)** $C(x) = x^2 + 2{,}5 \cdot x + 1{,}5$
(12) $I(x) = 3 \cdot (x + 10) - 30$	**(l)** $C(x) = \frac{2}{5} \cdot x + 2$
(13) $I(x) = 0{,}5 \cdot (x - 5)^2 - 12{,}5$	**(m)** $C(x) = 0{,}02 \cdot (x + 1)^2 + 5$
(14) $I(x) = (x - 1)^3$	**(n)** $C(x) = \frac{7}{8} \cdot x + 7$
(15) $I(x) = 2 \cdot (x - 1)^3 - 2$	**(o)** $C(x) = 15$
(16) $I(x) = 5 \cdot x^2 + 8 \cdot x$	**(p)** $C(x) = 4 \cdot x^2 + 7 \cdot x + 2$
(17) $I(x) = x \cdot (x + 1)^2$	**(q)** $C(x) = x^3 + 2$
(18) $I(x) = (x + 1) \cdot x \cdot (x + 5)$	**(r)** $C(x) = 0{,}2 \cdot (x + 5)^2$
(19) $I(x) = 0{,}4 \cdot x \cdot (2x + 7)$	**(s)** $C(x) = x^3 + 1$
(20) $I(x) = (x - 2)^3 - 8$	**(t)** $C(x) = 0{,}3 \cdot (x + 3)^2 - 2$
(21) $I(x) = 0{,}1 \cdot (x - 5)^3$	**(u)** $C(x) = 0{,}1 \cdot x^2 + 5$
(22) $I(x) = 2 \cdot (x - 1)^3 - 2$	**(v)** $C(x) = 0{,}15 \cdot x^3 + 6$
(23) $I(x) = x^3 + x^2 + x + 1$	**(w)** $C(x) = 0{,}75 \cdot x$
(24) $I(x) = 3 - \frac{1}{x}$	**(x)** $C(x) = 0{,}75 \cdot x$
(25) $I(x) = \frac{-1}{x - 30}$	**(y)** $C(x) = 0{,}5 \cdot x + 5$
(26) $I(x) = \frac{5 \cdot x - 4}{x}$	**(z)** $C(x) = 0{,}25 \cdot x + 1$
(27) $I(x) = 7 - \frac{2}{x^2}$	**(aa)** $C(x) = 0{,}5 \cdot (x + 2)^2$
(28) $I(x) = \frac{-1}{x - 4} - 0{,}25$	**(bb)** $C(x) = x + 4$
(29) $I(x) = 1{,}3^x - 1$	**(cc)** $C(x) = 0{,}05 \cdot x^2 + 0{,}6$
(30) $I(x) = 1{,}04^x$	**(dd)** $C(x) = x^3 + 13 \cdot x^2 + 50 \cdot x + 56$
(31) $I(x) = 10 - \frac{1}{2^x}$	**(ee)** $C(x) = \frac{-2}{x - 50}$
(32) $I(x) = 1{,}5^x$	**(ff)** $C(x) = 0{,}02 \cdot x^2$
(33) $I(x) = \frac{-5}{x^2 - 4}$	**(gg)** $C(x) = 0{,}02 \cdot (x + 2)^3$
(34) $I(x) = 1 - 0{,}9^x$	**(hh)** $C(x) = 0{,}4 \cdot x^3 + 0{,}5$
(35) $I(x) = -\frac{1}{x} + 1$	**(ii)** $C(x) = x + 1$
(36) $I(x) = \frac{-2}{x + 5} + 4$	**(jj)** $C(x) = \frac{-1}{x - 3}$
(37) $I(x) = 10 - \frac{10}{x}$	
(38) $I(x) = \frac{1}{x + 2} + x^2 - 2$	
(39) $I(x) = \frac{1}{2} x$	
(40) $I(x) = 3 + \frac{7}{2x - 1}$	

Annex 2: Llista 2. Enunciat dels problemes i solucions

Exercici 1:

El cost de fabricació (en €) d'un determinat article per la producció de x unitats ve donat per la funció: $C(x) = x^2 + 100x$

(a) *Representeu la funció gràficament.*

(b) *Per a quines produccions el cost és nul? Quin és el cost quan encara no s'ha produït res? Per a quines produccions el cost és superior a 500 €?*

(c) *Doneu l'expressió general de la funció de ingressos per la venta de x unitats de l'article si el preu de venta és de 120 € per unitat. Representeu la funció de ingressos juntament amb la de costos.*

(d) *Quines quantitats ha de produir l'empresa per tenir beneficis positius? Indiqueu en la gràfica quines produccions permeten obtenir més beneficis.*

(e) *Repetiu els apartats anteriors si la empresa es veu forçada a afegir un cost constant de manteniment de la maquinaria de 50 €. Com influeix aquest fet a la funció de costos? Com es veuen afectats els beneficis?*

Exercici 2:

Repetiu el problema anterior (apartats (a), (b), (c) y (d)) amb la funció de costos:

$C(x) = 2x^2 - 3x + 1$ *considerant un preu unitari inicial de 12 €.*

Expliqueu gràficament:

- Quins canvis es produeixen en la funció de ingressos si els preus ara són de 15 € per unitat? Com canvien els beneficis?

- I si els preus són de 10 € por unitat?

- Determineu el preu unitari mínim a partir del qual l'empresa comença a tenir beneficis.

Solucions Llista 2

Exercici 1:

a. Representeu la funció gràficament:

La funció $C(x) = x^2 + 100x$ és una paràbola. Tenim diferents formes de calcular el seu vèrtex:

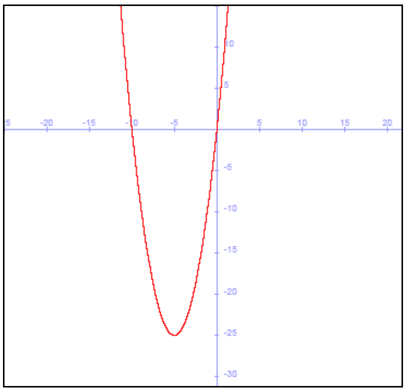
(1) Directament de la "fórmula": $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2} = -50 \;\; i \;\; y_v = -2500$.

(2) "Completant quadrats" tenim: $C(x) = x^2 + 100x = (x + 50)^2 - 2500$ i per tant, ràpidament tenim situat el vèrtex d'aquesta paràbola en el mateix punt trobat abans (-50, -2500)

Si situem en el pla el vèrtex trobat i tenint en compte que el "coeficient quadràtic" a és positiu (a = 1), queda clar que s'han de buscar els punts de tall amb els eixos:

$x^2 + 100x = 0 \rightarrow x = 0$ i $x = -100$

Per tant, la representació gràfica és:

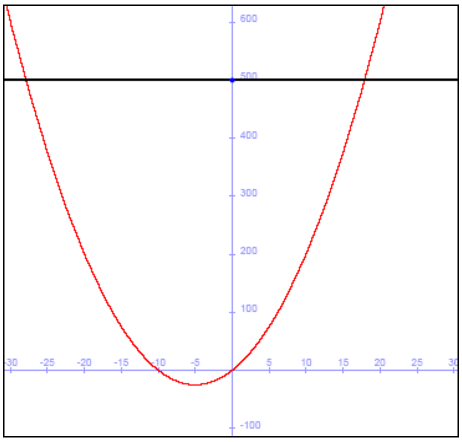


b. ***Per a quines produccions el cost és nul?***
Coincideixen amb els punts de tall abans calculats: $x^2 + 100x = 0$: $x = 0$ i $x = -100$

Quin és el cost quan encara no s'ha produït res?
Es a dir, què val la funció $C(x)$ quan $x = 0$, $C(0) = 0$, per tant, quan encara no hem produït res el cost és nul.

Per a quines produccions el cost és superior a 500 €?
Hem de resoldre la inequació següent: $x^2 + 100x \geq 50$. En un mateix gràfic dibuixem les gràfiques $f(x) = x^2 + 100x$ i $g(x) = 50$

Gràficament s'interpreta molt fàcilment que les solucions trobades correspondran als intervals on la paràbola "estigui per sobre" de la recta, és a dir, des de $-\infty$ fins al primer punt de tall, i des del segon punt de tall fins a $+\infty$.



Calculem els punts de tall:
$x^2 + 100x = 50$: $x_1 = 4{,}77$ i $x_2 = -104{,}77$.

Per tant, la solució matemàtica a la qüestió plantejada és:
$x \in (-\infty, -104'77] \cup [4'77, +\infty)$

Ara bé, les x són produccions, per tant, només tindran sentit per valors positius. És a dir, la solució a la qüestió plantejada és $x \in [4'77, +\infty)$

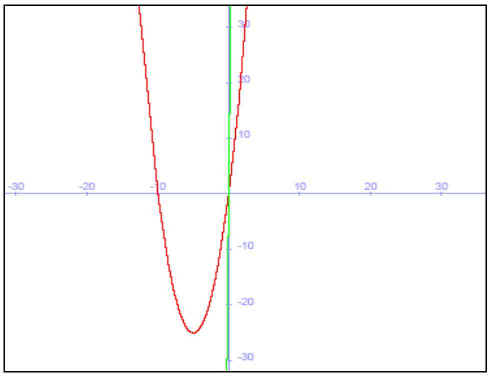
c. ***Donar l'expressió general de la funció de ingressos per la venta de x unitats de l'article si el preu de venta és de 120 € per unitat. Representeu la funció de ingressos juntament amb la de costos.***

Com Ingrés és Preu per Quantitat, aleshores, la funció ingressos ve donada per la funció:

$I(x) = 120x$.

Llavors, la representació d'aquesta nova funció amb la funció ja estudiada:

$C(x) = x^2 + 100x$



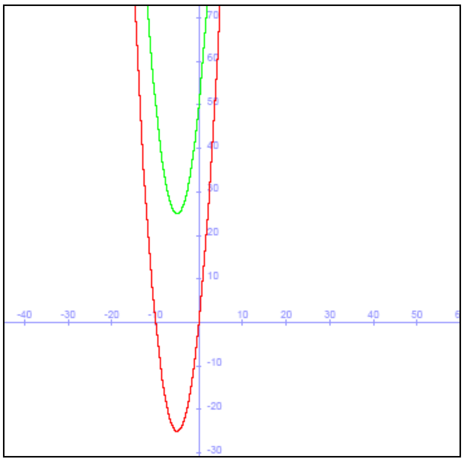
d. ***Quines quantitats ha de produir l'empresa per tenir beneficis positius? Indiqueu en la gràfica quines produccions permeten obtenir més beneficis.***

Volem determinar per quines x tenim $B(x) \geq 0$, és a dir, per quines x tenim $I(x) - C(x) \geq 0$ ó equivalentment: per quines x tenim que $I(x) \geq C(x)$, és a dir, gràficament és veure quan la gràfica de la recta de l'ingrés està "per sobre" de la paràbola del cost. A la gràfica (vista a l'apartat anterior) no s'acaba d'apreciar si existeixen punts de tall, llavors els calculem analíticament:

$$x^2 + 100x = 120x \leftrightarrow x^2 - 20x = 0 \leftrightarrow x(x-20) = 0 \leftrightarrow x_1 = 0 \ \ i \ \ x_2 = 20$$

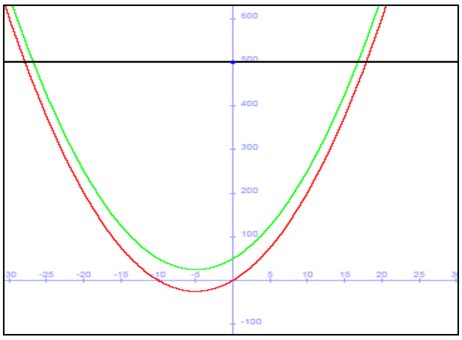
Per tant, si comparem les dues gràfiques tindrem: $B(x) \geq 0 \leftrightarrow I(x) \geq C(x) \leftrightarrow x \in [0,\ 20]$

e. ***Repetir els apartats anteriors si la empresa es veu forçada a afegir un cost constant de manteniment de la maquinaria de 50 €. Com influeix aquest fet a la funció de costos? Com es veuen afectats els beneficis?***



La nova funció de costos que resulta després d'aquest canvi és:
$C(x) = x^2 + 100x + 50$, la funció amb la que treballàvem abans però ara desplaçada amunt 50 unitats; fem un esbós ràpid d'aquesta gràfica:

Amb la representació d'una i alta funció de costos ja podem intuir que l'interval on hi haurà beneficis positius disminuirà respecte el que havíem descrit en l'apartat anterior $x^2 + 100x + 50 = 120x \leftrightarrow x^2 - 20x + 50 = 0 \leftrightarrow x_1 = 2'93 \; x_2 = 17'07$

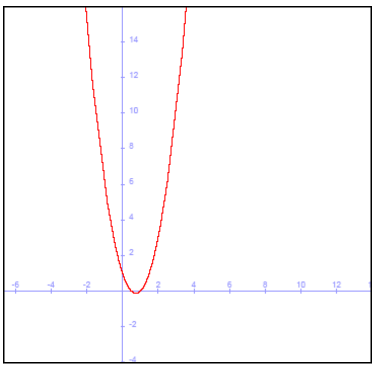


I comparant gràficament les dues funcions: $B(x) \geq 0 \leftrightarrow I(x) \geq C(x) \leftrightarrow x \in [2'93, 17'07]$

De forma ràpida i sense fer gaires càlculs, obtenim una resposta precisa a la qüestió plantejada, mitjançant la manipulació gràfica.

Exercici 2:

(a) ***Representeu la funció gràficament:***



Podem fer servir qualsevol dels mètodes emprats per calcular el vèrtex i obtenim que té com a coordenades: $\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{8}\right)$

(b) ***Per a quines produccions el cost és nul?***

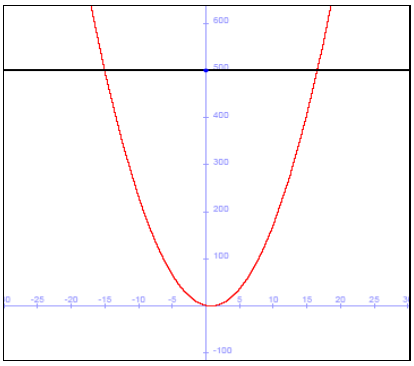
Tindrem costos nuls quan: $2x^2 - 3x + 1 = 0 \leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \dfrac{3 \pm 1}{4} \leftrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = \dfrac{1}{2}$

Quin és el cost quan encara no s'ha produït res?

Els costos quan encara no hem produït res, és a dir, quan: $x = 0 \ \rightarrow \ C(0) = 1$

Per a quines produccions el cost és superior a 500 €?

Per veure quan les produccions són superiors a 500€:



$2x^2 - 3x + 1 \geq 500 \leftrightarrow 2x^2 - 3x - 499 \geq 0$.

Veiem-ho gràficament:

$2x^2 - 3x - 499 = 0 \leftrightarrow x_1 = -15'07 \ x_2 = 16'57$

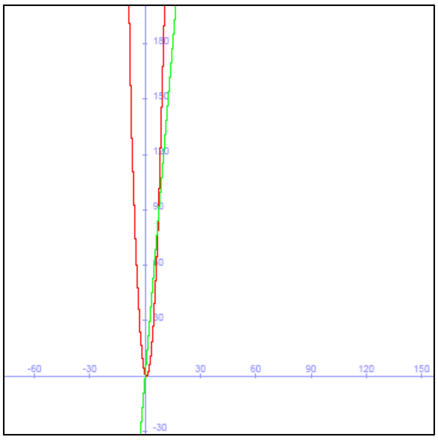
Llavors, gràficament veiem que C(x)≥500: $x \in (-\infty, -15'063] \cup [16'563, +\infty)$

(c) Donar l'expressió general de la funció de ingressos per la venta de x unitats de l'article si el preu de venta és de 12 € per unitat. Representeu la funció de ingressos juntament amb la de costos.

(d) ***Quines quantitats ha de produir l'empresa per tenir beneficis positius? Indiqueu en la gràfica quines produccions permeten obtenir més beneficis***

Respondrem a les dues preguntes:

La funció Ingrés coincideix amb la de l'exercici anterior: $I(x) = 12x$. Representem les dues funcions en un mateix gràfic.



Gràficament només veiem un punt de tall (per la distribució dels eixos). Ho calculem analíticament:

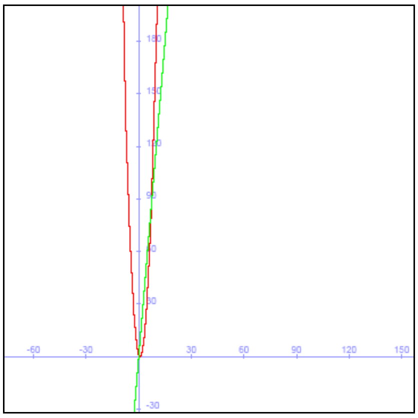
$2x^2 - 3x + 1 = 12 \rightarrow x_1 = 0{,}067$ i $x_2 = 7{,}43$

Llavors,

$B(x) \geq 0 \ \leftrightarrow \ I(x) \geq C(x) \ \leftrightarrow \ x \in [0'067,\ 7'43]$

i. Quins canvis es produeixen en la funció d'ingressos si els preus ara són de 15 € per unitat? Com canvien els beneficis?

La funció de costos és la mateixa, però la d'ingressos té més pendent:



ii. **Llavors respecte al Benefici:**

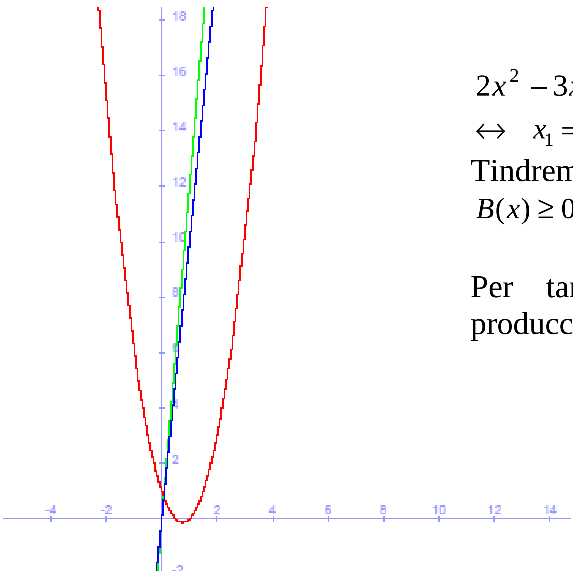
$2x^2 - 3x + 1 = 15x \leftrightarrow 2x^2 - 18x + 1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad x_1 = 0'056, \ x_2 = 8'94$

Tindrem: $B(x) \geq 0 \leftrightarrow I(x) \geq C(x) \leftrightarrow x \in [0'056, \ 8'94]$

Per tant, se'ns ha ampliat l'interval de produccions on obtenim beneficis positius.

iii. En canvi, què passa si els preus són de 10 € per unitat?

Ara seguim tenint $C(x) = 2x^2 - 3x + 1$ i ens ha variat: $I(x) = 10x$ que és una recta amb menys pendent que l'estudiada abans, veiem la gràfica:



$2x^2 - 3x + 1 = 10x \quad \leftrightarrow \quad 2x^2 - 13x + 1 = 0$

$\leftrightarrow \quad x_1 = 0'077, \ x_2 = 6'42$

Tindrem:

$B(x) \geq 0 \leftrightarrow I(x) \geq C(x) \quad \leftrightarrow \quad x \in [0'077, \ 6'42]$

Per tant, ha disminuït l'interval de produccions on obtenim beneficis positius.

Annex 3: Problema de modelització elemental amb paràmetres

COMANDA 1 - ¿Com guanyar 1000 € venent samarretes?

Un grup d'alumnes de 2n de batxillerat han decidit estampar i vendre samarretes en la festa major del barri per a finançar-se el viatge de fi de curs. Tenen dades dels seus companys de cursos anteriors. De moment, saben que, en els anys anteriors, s'havia de pagar 150 € a l'ajuntament pel lloguer de l' "stand" de la fira.
Us demanen que els ajudeu a determinar una estratègia per tal de recollir uns 1000 € de beneficis.

Curs	03/04	03/04	03/04	04/05	04/05
Vendes Samarretes	70	180	120	243	160
Costos Totals	325	600	450	757.5	550
Ingressos Totals	280	720	480	972	640

Taula per fer estratègies:

preu	*cost*	*lloguer*	*Ingressos*	*Costes*	*Benefici*	*Observacions*
p	*c*	*L*	*I*	*C*	*B = I – C*	**Per obtenir un benefici de 1000 € ...**

COMANDA 2 - ¿Com guanyar 7000 € venent samarretes?

Una botiga d'esports també ha vingut a demanar-nos ajut. Aquesta botiga ven un tipus especial de samarretes i ens demanen que estudiem el seu negoci i que fem propostes per a millorar la rendibilitat de forma que obtinguin amb les seves vendes un benefici de 7000 €, sabent que les vendes es troben entre 300 i 3000 unitats.
Sabem que el lloguer mensual del local és de 1200 €. Una altra informació addicional a tenir en compte és que el cost d'una samarreta és lineal, per tant, depèn linealment del nombre de samarretes comprades:

$$c = 10^{-5}x + 2{,}5 \text{ (on } x = \text{nombre de samarretes comprades)}$$

Mes	Gener	Febrer	Març	Abril	Maig	Juny
Samarretes Venudes	886	900	1093	2450	1660	2670
Costos Totals	3422,85	3458,10	3944,45	7385,03	5377,56	7946,29
Ingressos Totals	3544	3600	4372	9800	6640	10680

La botiga d'esports ha realitzat anteriorment un estudi de mercats del qual ha rebut la següent informació:
El preu de venda del producte que ens han proporcionat no podran ser superior a 5 €.
El cost unitari per a vendes petites sempre serà major que 2 €.
El preu del lloguer d'un local en la mateixa zona és superior a 900 €.

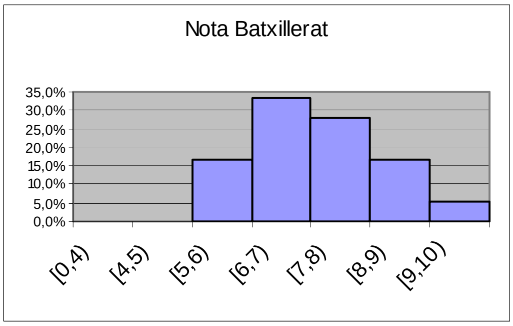
Annex 4: Qüestionari Alumnes

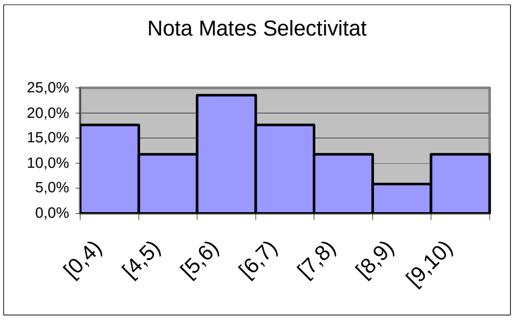
QÜESTIONARI ALUMNES – Curs 0 IQS – Setembre 2004

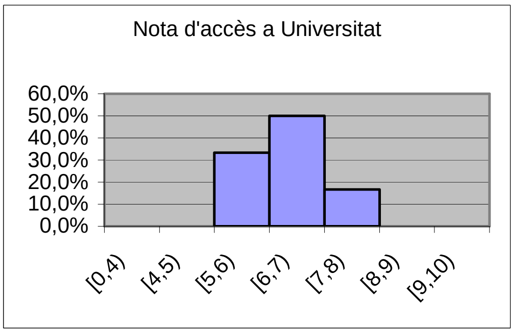
Estem fent una investigació sobre els cursos de setembre que es fan a diferents universitats catalanes. Si us plau,contesteu amb la màxima sinceritat. Les vostres respostes seran tractades confidencialment.
MOLTES GRÀCIES

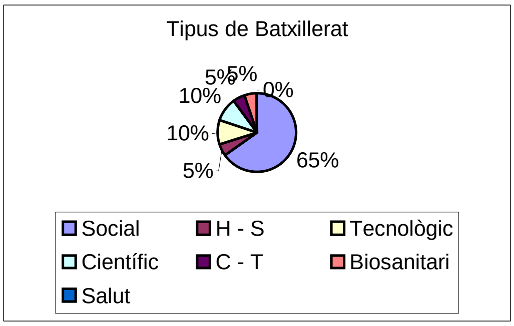
Nota Mates Batxillerat	Nota Mates Selectivitat	Nota d'accés a Universitat	Tipus de batxillerat
6.6994	**5.444**	**6.35222**	**SOCIAL**

→ En vermell els promitjos









1. Per quins motius vas decidir fer aquest curs?

El 50% de las persones que han respòs la pregunta han citat com a motiu REFRESCAR conceptes del Batxillerat, el 15% adquirir una DINÀMICA de treball, el 10% estar més PREPARATS en el primer curs d'Universitat i la resta, AMPLIAR conceptes.

2. Explica amb les teves paraules quin creus que és l'objectiu del curs:

El 50% de las persones que han respòs la pregunta han citat com a motiu REPASSAR coneixements, el 20% INTRODUCCIÓ de conceptes nous, el 20% ADQUIRIR un nivell òptim i la resta AGAFAR ritme de treball.

3. Valora del 1 al 5 les següents característiques del curs (encercla l'opció triada):

(a) Durada del curs ………..……… (massa curt=) 1 2 **3** 4 5 (= massa llarg)

(b) Durada de les sessions …………..(massa curtes=) 1 2 3 **3'45** 4 5 (= m llargues)

(c) Contingut teòric ………….………… (molt poc=) 1 2 **2'55** 3 4 5 (=molt alt)

(d) Contingut pràctic………….……….(molt poc=) 1 2 3 **3'52** 4 5 (=molt alt)

(e) Dificultat……….………….. ……(molt poca=) 1 2 **2'3** 3 4 5 (=molt alta)

(f) Temps dedicat a cada tema ………..(molt poc=) 1 2 **2'85** 3 4 5 (=molt alt)

(g) Han aparegut conceptes nous? ……. (molt poc=) 1 **1'8** 2 3 4 5 (=molt)

h) Han aparegut tècniques noves? ……. (molt poc=) 1 2 **2'9** 3 4 5 (=molt)

(i) Quantitat de treball que has fet a *classe* (molt poc=) 1 2 3 **3'3** 4 5 (=molt alt)

(j) Quantitat de treball que has fet a *casa* (molt poc =) 1 2 **2'75** 3 4 5 (=molt alt)

(k) Creus que el curs t'ha estat útil?……..(molt poc=) 1 2 3 **3'75** 4 5 (=molt)

4. Indica dues de les principals aportacions del curs:

De las persones que han respòs la pregunta han citat com a principals aportacions: REFRESCAR conceptes del Batxillerat, APARICIÓ de noves tècniques, INTRODUCCIÓ de nous conceptes, MOLTA aplicació econòmica, CONÈIXER nous companys i AGAFAR tant, ritme de treball com confiança.

5. Indica dues de les principals mancances del curs:

De las persones que han respòs la pregunta han citat com a motius principals mancances: FALTA de temari i de temps.

6. Sabries indicar alguna diferència entre el treball que has fet durant el curs i el que feies a Secundària?

De las persones que han respòs la pregunta han citat com a principals diferències la *forma* de treballar, el *ritme* de treball, la *distribució* del treball a classe i a casa, el fet que *s'explica* el perquè de les coses.

7. Comentaris sobre el curs en general:

Totes les persones que han respost aquesta pregunta donen una valoració positiva.