UVIC
UNIVERSITAT
DE VIC

# Unitat 4. Fraccions algèbriques

## Curs d'Anivellament de Matemàtiques

Montserrat Corbera / Vladimir Zaiats

montserrat.corbera@uvic.cat / vladimir.zaiats@uvic.cat

**Escola Politècnica Superior**

# Índex

# Unitat 4. Fraccions algèbriques

## 4.1 Definició

**Definició 4.1.1:**

*Una* **fracció algèbrica** *és una expressió de la forma*

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

*on $P(x)$ i $Q(x)$ són polinomis amb $Q(x) \neq 0$. El polinomi $P(x)$ s'anomena* **numerador** *de la fracció i el polinomi $Q(x)$ s'anomena* **denominador** *de la fracció.*

## 4.2 Equivalència i simplificació de fraccions algèbriques

**Definició 4.2.1:**

*La fracció algèbrica $\frac{P(x)}{Q(x)}$ és* **equivalent** *a la fracció algèbrica $\frac{R(x)}{S(x)}$ si i només si*

$$P(x) \cdot S(x) = R(x) \cdot Q(x).$$

**Exemple 4.2.1** La fracció algèbrica $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ és equivalent a la fracció $\frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}$.

Simplificar una fracció algèbrica consisteix en trobar una fracció algèbrica equivalent a la inicial de manera que el numerador i el denominador tinguin el mínim grau possible.

Per simplificar fraccions algèbriques fem el següent:

- Factoritzem el numerador i el denominador. La factorització de polinomis s'explica a la Unitat 3.
- Eliminem els factors que apareixen simultàniament al numerador i al denominador.

**Exemple 4.2.2** a) Simplificació de la fracció algèbrica $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$.

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-4} \overset{(*1)}{=} \frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} \overset{(*2)}{=} \frac{x-1}{x+2}.$$

(*1) Factoritzem el numerador i el denominador.

(*2) Eliminem els factors que apareixen simultàniament al numerador i al denominador.

b) Simplificació de la fracció algèbrica $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}$.

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x-1}{x+2}.$$

c) Simplificació de la fracció algèbrica $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3-x^2-x+1}$.

$$\frac{x^3-x^2+x-1}{x^3-x^2-x+1} = \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

Observeu que les fraccions algèbriques dels apartats a) i b) són les que apareixen a l'Exemple 4.2.1. Com que les fraccions són equivalents, una vegada simplificades, donen la mateixa fracció algèbrica.

## 4.3 Operacions amb fraccions algèbriques

### 4.3.1 Suma (resta) de fraccions algèbriques

La suma (resta) de fraccions algèbriques es fa com la suma de fraccions numèriques, però tenint present que operem amb polinomis en comptes de nombres.

**Exemple 4.3.1** a) $\dfrac{x^2-x-1}{x-1} + \dfrac{x}{x-1}$.

Com que les dues fraccions tenen el mateix denominador podem sumar-les directament

$$\frac{x^2-x-1}{x-1} + \frac{x}{x-1} = \frac{(x^2-x-1)+x}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1}.$$

Mirem si podem simplificar el resultat. El denominador només té el factor $(x-1)$, així la fracció es podrà simplificar si el numerador també té el factor $(x-1)$. El numerador és una suma per diferència

$x^2-1=(x-1)(x+1)$ (els productes notables s'expliquen a la Unitat 3), llavors simplificant el resultat tenim

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1.$$

b) $\dfrac{x+1}{x-3}+\dfrac{2x}{x+2}$.

En aquest cas els denominadors són diferents, per tant abans de fer la suma haurem de reduir les fraccions a comú denominador.

- Calculem el mínim comú múltiple dels denominadors (el càlcul del mínim comú múltiple de polinomis s'explica a la Unitat 3)

$$\operatorname{mcm}(x-3,x+2)=(x-3)(x+2).$$

- Reduïm les fraccions a comú denominador.

  Trobem una fracció equivalent a $\dfrac{x+1}{x-3}$ que té per denominador el mínim comú múltiple dels denominadors

$$\frac{(x+1)\cdot(x+2)}{(x-3)\cdot(x+2)}=\frac{x^2+3x+2}{(x+2)(x-3)}. \tag{4.3.1}$$

  Trobem una fracció equivalent a $\dfrac{2x}{x+2}$ que té per denominador el mínim comú múltiple dels denominadors

$$\frac{2x\cdot(x-3)}{(x+2)\cdot(x-3)}=\frac{2x^2-6x}{(x+2)(x-3)}. \tag{4.3.2}$$

- Sumem les fraccions (4.3.1) i (4.3.2)

$$\frac{x^2+3x+2}{(x+2)(x-3)}+\frac{2x^2-6x}{(x+2)(x-3)}=\frac{(x^2+3x+2)+(2x^2-6x)}{(x+2)(x-3)}=\frac{3x^2-3x+2}{(x+2)(x-3)}.$$

- Si és possible, simplifiquem el resultat.

  La factorització del denominador és $(x-3)(x+2)$, així doncs només cal que mirem si el numerador conté el factor $(x-3)$ o el factor $(x+2)$. Si el numerador conté el factor $(x-3)$ aleshores la divisió entre entre el numerador i $(x-3)$ és exacta; és a dir té residu $0$. El mateix passaria pel factor $(x+2)$. Podem saber el residu de la divisió calculant la divisió mitjançant la regla de Ruffini (per a més detalls vegeu la Unitat 3)

$$\boxed{\alpha=3}\qquad \begin{array}{r|rrr} & 3 & -3 & 2 \\ 3 & \downarrow & +9 & +18 \\ \hline & 3 & 6 & \boxed{20} \end{array}\qquad\qquad \boxed{\alpha=-2}\qquad \begin{array}{r|rrr} & 3 & -3 & 2 \\ -2 & \downarrow & -6 & 18 \\ \hline & 3 & -9 & \boxed{20} \end{array}$$

  El numerador no conté ni el factor $(x-3)$ ni el factor $(x+2)$, per tant la fracció no es pot simplificar.

El resultat final és $\dfrac{3x^2-3x+2}{(x+2)(x-3)} = \dfrac{3x^2-3x+2}{x^2-x-6}$.

c) $\dfrac{x^2-2x}{x^2-1} - \dfrac{x+2}{x^2+2x+1}$.

– Calculem el mínim comú múltiple dels denominadors

$$\mathrm{mcm}\,(x^2-1, x^2+2x+1) = \mathrm{mcm}\,((x-1)(x+1), (x+1)^2) = (x+1)^2(x-1).$$

– Reduïm les fraccions a comú denominador

$$\frac{x^2-2x}{x^2-1} = \frac{x^2-2x}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x^2-2x)\cdot(x+1)}{(x-1)(x+1)\cdot(x+1)} = \frac{x^3-x^2-2x}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$\frac{x+2}{x^2+2x+1} = \frac{x+2}{(x+1)^2} = \frac{(x+2)\cdot(x-1)}{(x+1)^2\cdot(x-1)} = \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2(x-1)}$$

– Restem les fraccions.

$$\frac{x^3-x^2-2x}{(x-1)(x+1)^2} - \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{(x^3-x^2-2x)-(x^2+x-2)}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{x^3-2x^2-3x+2}{(x-1)(x+1)^2}$$

– Mirem si es pot simplificar el resultat.
La factorització del denominador és $(x-1)(x+1)^2$, així doncs només cal que mirem si el numerador conté el factor $(x-1)$ o el factor $(x+1)$. Si el numerador conté el factor $(x-1)$ aleshores la divisió entre entre el numerador i $(x-1)$ té residu $0$. El mateix passaria pel factor $(x+1)$. Podem saber el residu de la divisió a partir del Teorema del residu (per a més detalls vegeu la Unitat 3).
Sigui $p(x) = x^3-2x^2-3x+2$, llavors $p(1) = -2 \neq 0$ i $p(-1) = 2 \neq 0$, per tant el numerador no conté ni el factor $(x-1)$ ni el factor $(x+1)$. La fracció no es pot simplificar.

El resultat final és $\dfrac{(x^3-x^2-2x)-(x^2+x-2)}{(x-1)(x+1)^2} = \dfrac{(x^3-x^2-2x)-(x^2+x-2)}{x^3+x^2-x-1}$.

d) $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x-2}{x+1} - \dfrac{2x^2-1}{x^2-1}$

– Calculem el mínim comú múltiple dels denominadors

$$\mathrm{mcm}\,(x-1, x+1, x^2-1) = \mathrm{mcm}\,(x-1, x+1, (x+1)(x-1)) = (x+1)(x-1).$$

– Reduïm les fraccions a comú denominador i les sumem

$$\frac{x}{x-1} + \frac{x-2}{x+1} - \frac{2x^2-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x(x+1)+(x-2)(x-1)-(2x^2-1)}{(x+1)(x-1)} =$$

$$\frac{(x^2+x)+(x^2-3x+2)-(2x^2-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2x+3}{(x+1)(x-1)}.$$

– Veiem que el resultat no es pot simplificar.

El resultat final és $\dfrac{-2x+3}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{-2x+3}{x^2-1}$.

### 4.3.2 Producte de fraccions algèbriques

El producte de fraccions algèbriques es fa com el producte de fraccions numèriques; és a dir, numerador per numerador i denominador per denominador, però tenint present que operem amb polinomis en comptes de nombres.

**Exemple 4.3.2** a) $\dfrac{2x+1}{x-3} \cdot \dfrac{2x-1}{x+2}$

$$\frac{2x+1}{x-3} \cdot \frac{2x-1}{x+2} = \frac{(2x+1)\cdot(2x-1)}{(x-3)\cdot(x+2)} = \frac{4x^2-1}{x^2-x-6}.$$

b) $\dfrac{x^4-16}{x-2} \cdot \dfrac{1}{x^2+2x}$

$$\frac{x^4-16}{x-2} \cdot \frac{1}{x^2+2x} = \frac{(x^4-16)\cdot 1}{(x-2)\cdot(x^2+2x)} \overset{(*1)}{=} \frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x-2)x(x+2)} = \frac{x^2+4}{x}.$$

(*1) Intentarem sempre donar el resultat el més simplificat possible. Per estalviar-nos feina, abans de fer els productes factoritzem tots els polinomis, tant del numerador com del denominador, i eliminem els factors que apareixen simultàniament al numerador i al denominador.

### 4.3.3 Divisió de fraccions algèbriques

La divisió de fraccions algèbriques es fa com la divisió de fraccions numèriques, però tenint present que operem amb polinomis en comptes de nombres.

**Exemple 4.3.3** a) $\dfrac{x+1}{x^2-3} : \dfrac{2x}{x-1}$

$$\frac{x+1}{x^2-3} : \frac{2x}{x-1} = \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x^2-3)\cdot 2x} = \frac{x^2-1}{2x^3-6x}.$$

b) $\dfrac{x^2}{x^2-9} : \dfrac{x}{x+3}$

$$\frac{x^2}{x^2-9} : \frac{x}{x+3} = \frac{x^2 \cdot (x+3)}{(x^2-9)\cdot x} \overset{(*1)}{=} \frac{x^2 \cdot (x+3)}{(x-3)(x+3)\cdot x} = \frac{x}{x-3}.$$

c) $\dfrac{x^2-2x+1}{1-x} : \dfrac{x^2+2x-1}{1+x}$

$$\frac{x^2-2x+1}{1-x} : \frac{x^2+2x-1}{1+x} = \frac{(x^2-2x+1)\cdot(1+x)}{(1-x)\cdot(x^2+2x-1)} \overset{(*1)}{=}$$

$$\frac{(x-1)^2(1+x)}{-(x-1)(x^2+2x-1)} = -\frac{(x-1)(x+1)}{x^2+2x-1} = -\frac{x^2-1}{x^2+2x-1}$$

(*1) Abans de fer els productes factoritzem tots els polinomis, tant del numerador com del denominador, i eliminem els factors que apareixen simultàniament al numerador i al denominador.

# Exercicis d'autoavaluació

**1.** Simplifiqueu les següents fraccions algèbriques.

a) $\dfrac{4x+4}{3x+3}$ b) $\dfrac{x^2+2x+1}{2x+2}$ c) $\dfrac{x^2-4}{x-2}$

d) $\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{(x^2+2x+1)(x-1)}$ e) $\dfrac{3x^3+4x^2+2x}{x^4+x^3+x^2}$

Solució

a) $\dfrac{4}{3}$ b) $\dfrac{x+1}{2}$ c) $x+2$ d) $\dfrac{x+1}{x-1}$ e) $\dfrac{3x^2+4x+2}{x^3+x^2+x}$

**2.** Efectueu les següents operacions amb fraccions algèbriques simplificant al màxim els resultats.

a) $\dfrac{2+x}{3+x}+\dfrac{2+x^2}{3+x^2}$

b) $\dfrac{3x+5}{3x^2}+\dfrac{2x^2-5x+1}{6x^3}$

c) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{x}{x^2-3x+2}$

d) $\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2+2x+1}-\dfrac{x+5}{x^2-2x+1}+\dfrac{x^2+x-3}{x^3+3x^2+3x+1}$

e) $\dfrac{x^2-4}{x^2+3}\cdot\dfrac{x^2-9}{x^2+2x}$

f) $\dfrac{x^3-1}{x^2+4x+4}\cdot\dfrac{x+2}{x^5+x^4+x^3}$

g) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x-12}:\dfrac{x^3-8}{x^2-16}$

h) $\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-2x+1}:\dfrac{1-x}{1+x}$

Solució

a) $\dfrac{2x^3+5x^2+5x+12}{(x^2+3)(x+3)}$

b) $\dfrac{8x^2+5x+1}{6x^3}$

c) $\dfrac{4}{x-2}$

d) $\dfrac{2x^5+x^4-13x^3-24x^2-7x-7}{(x-1)^2(x+1)^3}$

e) $\dfrac{(x-2)(x-3)(x+3)}{x(x^2+3)}$

f) $\dfrac{x-1}{x^4+2x^3}$

g) $\dfrac{x-4}{x^2+2x+4}$

h) $-\dfrac{(x+1)(x^2+2x-1)}{(x-1)^3}$

**3.** Efectueu les següents operacions. Simplifiqueu al màxim el resultat obtingut.

a) $\dfrac{x+1+\dfrac{x^2}{1-x}}{1-\dfrac{x}{1+x}\cdot\dfrac{x+1}{x^2-x}}$

b) $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{1}{1+x}\right)$

c) $\dfrac{x+2}{2x+1}-\dfrac{2}{4x^2-1}+\dfrac{x+1}{2x}$

d) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2}\cdot\dfrac{x^2-1}{x}$

e) $\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{x-\dfrac{1}{x}}\cdot(x-1)$

f) $\dfrac{\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}\cdot\dfrac{2x^2-8x-10}{x-1}}{\dfrac{2x+2}{x^2+x-2}:\dfrac{x+1}{x^3-4x^2-7x+10}}$

g) $\dfrac{\dfrac{2x-2}{(x+1)^2}-\left(\dfrac{x^2}{(x-1)^2}-\dfrac{2}{x-1}\right)}{\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}+\dfrac{x^2-2x+1}{(x+1)^2}}$

h) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{x+y}{xy}\right)\cdot\frac{2xy}{x+y}$

i) $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)$

Solució

a) $-\frac{1}{x-2}$

b) $\frac{1}{x}$

c) $\frac{8x^3+10x^2-9x-1}{2x(2x-1)(2x+1)}$

d) $\frac{(x+1)^2}{(x-1)x}$

e) $\frac{x^2+1}{x+1}$

f) $1$

g) $-\frac{(x^2-x+2)^2}{2x(x-1)(x^2+3)}$

h) $\frac{4y}{x+y}$

i) $4$

# Glossari de termes

# Bibliografia

Podeu consultar qualsevol llibre de primer i segon de Batxillerat.