UVIC
UNIVERSITAT
DE VIC

Unitat 3. Polinomis

Curs d'Anivellament de Matemàtiques

Montserrat Corbera / Vladimir Zaiats

montserrat.corbera@uvic.cat / vladimir.zaiats@uvic.cat

Escola Politècnica Superior

Índex

Unitat 3. Polinomis

3.1 Definicions

Definició 3.1.1:

Un **monomi de grau** i **en la variable** x *és una expressió de la forma* $a_i x^i$*, amb* $a_i \in \mathbb{R}$, $a_i \neq 0$ *i* $i \in \mathbb{N}$.

Definició 3.1.2:

Un **polinomi de grau** n **en la variable** x *és una expressió de la forma*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad a_i \in \mathbb{R}, \text{ per a tot } i = 0, 1, \ldots, n,$$

amb $a_n \neq 0$*. El monomi* $a_i x^i$ *s'anomena* **terme de grau** i *del polinomi. El nombre* a_i *s'anomena* **coeficient** *del terme de grau* i*. El terme* a_0 *s'anomena* **terme independent**.

Definició 3.1.3:

Sigui $\alpha \in \mathbb{R}$*. El* **valor numèric del polinomi** $P_n(x)$ **per a** $x = \alpha$ *ve donat per*

$$P_n(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0.$$

3.2 Operacions amb polinomis

Siguin $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ i $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$.

3.2.1 Suma (resta) de polinomis

El polinomi $P(x) \pm Q(x)$ és un polinomi que té per coeficients la suma (resta) dels coeficients dels termes del mateix grau i te per grau el màxim entre n i m; és a dir,

$$P(x) \pm Q(x) = \cdots + (a_i \pm b_i) x^i + \cdots + (a_2 \pm b_2) x^2 + (a_1 \pm b_1) x + (a_0 \pm b_0).$$

Exemple 3.2.1 Càlcul de la suma dels polinomis $P(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^3 + 2x + 3$ i $Q(x) = 3x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4$.

$$P(x) + Q(x) = x^5 + 3x^4 + \left(-\frac{1}{2} - 1\right)x^3 + \frac{1}{2}x^2 + (2+3)x + (3+4) = x^5 + 3x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 5x + 7.$$

3.2.2 Producte de polinomis

El producte $P(x) \cdot Q(x)$ és un polinomi de grau $n + m$ que ve donat per

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= a_n b_m x^{n+m} + \cdots + (a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \cdots + a_{i-1} b_1 + a_i b_0) x^i + \cdots + \\ & \quad (a_0 b^2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + a_0 b_0. \end{aligned}$$

En l'exemple següent es veu com multiplicar polinomis de dues maneres diferents. Les dues maneres són equivalents i si s'apliquen als polinomis $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ i $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ s'obté la fórmula anterior.

Exemple 3.2.2 Càlcul del producte dels polinomis $P(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^3 + 2x + 3$ i $Q(x) = 3x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4$.

a)

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &\overset{(*1)}{=} x^5 \left(3x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4\right) - \frac{1}{2}x^3 \left(3x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4\right) + \\ & \quad 2x \left(3x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4\right) + 3 \left(3x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4\right) \\ &\overset{(*2)}{=} \left(3x^9 - x^8 + \frac{1}{2}x^7 + 3x^6 + 4x^5\right) + \left(-\frac{3}{2}x^7 + \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{4}x^5 - \frac{3}{2}x^4 - 2x^3\right) + \\ & \quad \left(6x^5 - 2x^4 + x^3 + 6x^2 + 8x\right) + \left(9x^4 - 3x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x + 12\right) \\ &\overset{(*3)}{=} 3x^9 - x^8 + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)x^7 + \left(3 + \frac{1}{2}\right)x^6 + \left(4 - \frac{1}{4} + 6\right)x^5 + \\ & \quad \left(-\frac{3}{2} - 2 + 9\right)x^4 + (-2 + 1 - 3)\,x^3 + \left(6 + \frac{3}{2}\right)x^2 + (8+9)x + 12 \\ &= 3x^9 - x^8 - x^7 + \frac{7}{2}x^6 + \frac{39}{4}x^5 + \frac{11}{2}x^4 - 4x^3 + \frac{15}{2}x^2 + 17x + 12. \end{aligned}$$

(*1) Apliquem la propietat distributiva del producte respecte la suma.

(*2) Efectuem els productes aplicant una altra vegada la propietat distributiva del producte respecte la suma i tenint present que el producte de monomis ve donat per $a_i\, x^i \cdot a_j\, x^j = a_i \cdot a_j\, x^{i+j}$.

(*3) Efectuem la suma dels polinomis.

b) Una manera més pràctica de fer el procediment del cas a) és la següent:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 3x^4 & -x^3 & +\frac{1}{2}x^2 & +3x & +4 & (*1) \\
 & & & & & & x^5 & -\frac{1}{2}x^3 & +2x & +3 & \\
\hline
 & & & & & 9x^4 & -3x^3 & +\frac{3}{2}x^2 & +9x & +12 & (*2) \\
 & & & & 6x^5 & -2x^4 & +x^3 & +6x^2 & +8x & & (*3) \\
 & & -\frac{3}{2}x^7 & +\frac{1}{2}x^6 & -\frac{1}{4}x^5 & -\frac{3}{2}x^4 & -2x^3 & & & & (*4) \\
3x^9 & -x^8 & +\frac{1}{2}x^7 & +3x^6 & +4x^5 & & & & & & (*4) \\
\hline
3x^9 & -x^8 & -x^7 & +\frac{7}{2}x^6 & +\frac{39}{4}x^5 & +\frac{11}{2}x^4 & -4x^3 & +\frac{15}{2}x^2 & +17x & +12 & (*5)
\end{array}
$$

(*1) Posem el polinomi que té més termes (en aquest exemple és el polinomi $Q(x)$) a la part superior i el que en té menys a la part inferior. No és necessari, podríem deixar el polinomi que té menys termes a la part superior però no resulta tant pràctic.

(*2) Es multiplica el monomi 3 per cadascun dels monomis de $Q(x)$. Deixem espais en blanc en la posició dels termes de coeficient zero.

(*3) Es multiplica el monomi $2x$ per cadascun dels monomis de $Q(x)$, els termes que s'obtenen es posen sota els termes del mateix grau que s'han obtingut al pas anterior.

(*4) Procedim de manera similar amb els monomis x^5 i $-\frac{1}{2}x^3$.

(*5) Efectuem la suma dels termes del mateix grau.

3.2.3 Divisió de polinomis

Sigui $Q(x) \neq 0$. La divisió $P(x) : Q(x)$ consisteix en trobar dos polinomis $q(x)$ i $r(x)$ de manera que $\mathrm{grau}\,(r(x)) < \mathrm{grau}\,(q(x))$ i

$$P(x) = Q(x) \cdot q(x) + r(x). \tag{3.2.1}$$

El polinomi $P(x)$ s'anomena **dividend**, $Q(x)$ s'anomena **divisor**, $q(x)$ s'anomena **quocient** i $r(x)$ s'anomena **residu**.

Si $r(x) = 0$ llavors:

- La divisió és **exacte**,
- $P(x)$ és **divisible** per $Q(x)$,
- $Q(x)$ és **divisor** de $P(x)$.

Exemple 3.2.3 a) Càlcul de $P(x) : Q(x)$ amb $P(x) = x^4 - x^3 + x - 1$ i $Q(x) = x^2 - 1$.

i) Disposem els polinomis $P(x)$ i $Q(x)$ de la següent manera $\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} \end{array}$

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & -x^3 & & +x & -1 & x^2-1 \\ \cline{6-6} \end{array}$$

Els termes de $P(x)$ i $Q(x)$ estan ordenats de grau més gran a grau més petit i es deixen espais en blanc en la posició dels termes de coeficient zero del polinomi $P(x)$.

ii) Dividim el terme de grau més gran de $P(x)$ pel terme de grau més gran de $Q(x)$. El resultat ens donarà el terme de grau més gran del quocient.

Nota: La divisió de monomis ve donada per $\dfrac{a_i\,x^i}{a_j\,x^j} = \dfrac{a_i}{a_j}\,x^{i-j}$.

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & -x^3 & & +x & -1 & x^2-1 \\ \cline{6-6} & & & & & x^2 \end{array}$$

iii) Es multiplica el monomi que hem trobat per $Q(x)$ i el resultat es resta a $P(x)$ (sumem l'oposat), obtenint així un polinomi $r_1(x)$.

$$\begin{array}{lrrrrr|l}
 & x^4 & -x^3 & & +x & -1 & x^2-1 \\ \cline{7-7}
 & -x^4 & & +x^2 & & & x^2 \\ \cline{2-6}
r_1(x)\rightarrow & & -x^3 & +x^2 & +x & -1 &
\end{array}$$

iv) Si $\text{grau}\,(r_1(x)) < \text{grau}\,(Q(x))$, hem acabat. Com que no és així continuem el procés. Resseguim els passos ii) i iii) amb el polinomi $r_1(x)$ en lloc de $P(x)$, obtenint així un polinomi $r_2(x)$.

$$\begin{array}{lrrrrr|l}
 & x^4 & -x^3 & & +x & -1 & x^2-1 \\ \cline{7-7}
 & -x^4 & & +x^2 & & & x^2-x \\ \cline{2-6}
 & & -x^3 & +x^2 & +x & -1 & \\
 & & x^3 & & -x & & \\ \cline{3-6}
r_2(x)\rightarrow & & & x^2 & & -1 &
\end{array}$$

v) Si $\text{grau}\,(r_2(x)) < \text{grau}\,(Q(x))$, hem acabat. Com que no és així resseguim els passos ii) i iii) amb el polinomi $r_2(x)$ en lloc de $P(x)$, obtenint així un polinomi $r_3(x)$.

$$\begin{array}{lrrrrr|l}
 & x^4 & -x^3 & & +x & -1 & x^2-1 \\ \cline{7-7}
 & -x^4 & & +x^2 & & & x^2-x+1 \\ \cline{2-6}
 & & -x^3 & +x^2 & +x & -1 & \text{quocient} \\
 & & x^3 & & -x & & \\ \cline{3-6}
 & & & x^2 & & -1 & \\
 & & & -x^2 & & +1 & \\ \cline{4-6}
r_3(x)\rightarrow & & & & & 0 & \leftarrow\ \text{residu}
\end{array}$$

vi) $\text{grau}\,(r_3(x)) = 0 < \text{grau}\,(Q(x)) = 2$, per tant hem acabat.

El quocient de la divisió és $q(x) = x^2 - x + 1$ i el residu és $r(x) = 0$. La divisió és exacta ja que el residu és zero, per tant $P(x)$ és divisible per $Q(x)$ ($Q(x)$ és un divisor de $P(x)$).

Si es vol comprovar que el resultat de la divisió és correcte s'ha de veure que $P(x)$, $Q(x)$, $q(x)$ i $r(x)$ satisfan la igualtat (3.2.1).

b) Càlcul de la divisió $P(x) : Q(x)$ amb $P(x) = 2x^5 + 3x^3 + 3x + 2$ i $Q(x) = 2x^2 + x + 2$.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
2x^5 & & +3x^3 & & +3x & +2 & 2x^2+x+2 \\ \cline{7-7}
-2x^5 & -x^4 & -2x^3 & & & & x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} \\ \cline{1-6}
 & -x^4 & +x^3 & & +3x & +2 & \\
 & x^4 & +\frac{1}{2}x^3 & +x^2 & & & \text{quocient} \\ \cline{2-6}
 & & \frac{3}{2}x^3 & +x^2 & +3x & +2 & \\
 & & -\frac{3}{2}x^3 & -\frac{3}{4}x^2 & -\frac{3}{2}x & & \\ \cline{3-6}
 & & & \frac{1}{4}x^2 & +\frac{3}{2}x & +2 & \\
 & & & -\frac{1}{4}x^2 & -\frac{1}{8}x & -\frac{1}{4} & \\ \cline{4-6}
 & & & & \frac{11}{8}x & +\frac{7}{4} & \leftarrow \text{residu}
\end{array}
$$

El quocient de la divisió és $q(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$ i el residu és $r(x) = \frac{11}{8}x + \frac{7}{4}$. En aquest cas la divisió no és exacte, per tant $P(x)$ no és divisible per $Q(x)$ ($Q(x)$ no és divisor de $P(x)$).

3.2.4 Regla de Ruffini

La Regla de Ruffini serveix per calcular de manera ràpida divisions de polinomis de la forma $P(x) : Q(x)$ amb $Q(x) = (x - \alpha)$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ qualsevol.

Exemple 3.2.4 Càlcul de la divisió $P(x) : Q(x)$ amb $P(x) = 4x^4 - 9x^3 - 7x^2 + 1$ i $Q(x) = x - 3$.

a) Comencem efectuant la divisió com a l'Exemple 3.2.3.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
\boxed{4x^4} & -9x^3 & -7x^2 & & +1 & x-3 \\ \cline{6-6}
-4x^4 & +12x^3 & & & & 4x^3+3x^2+2x+6 \\ \cline{1-5}
 & \boxed{3x^3} & -7x^2 & & +1 & \text{quocient} \\
 & -3x^3 & +9x^2 & & & \\ \cline{2-5}
 & & \boxed{2x^2} & & +1 & \\
 & & -2x^2 & +6x & & \\ \cline{3-5}
 & & & \boxed{6x} & +1 & \\
 & & & -6x & +18 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 19 & \leftarrow \text{residu}
\end{array} \tag{3.2.2}
$$

El quocient de la divisió és $q(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 6$ i el residu és $r(x) = 19$.

b) A nosaltres només ens interessa el valor del quocient i del residu de (3.2.2). Anem a veure com trobar-los sense haver de fer els càlculs intermedis.

Fixeu-vos que els coeficients del quocient són els coeficients dels termes marcats en ▬ a (3.2.2) però amb un grau menys.

El primer coeficient del quocient $q(x)$ és el primer coeficient del dividend $P(x)$.

$$\begin{array}{c|ccccc l} & 4 & -9 & -7 & 0 & 1 & \leftarrow \text{coef. de } P(x) \\ 3 & \downarrow & & & & & \quad (^*1) \\ \hline & 4 & & & & & \leftarrow \text{coef. de } q(x) \end{array}$$

$(^*1)$ **Nota:** els coeficients de $P(x)$ que són zero també s'han de posar.

El segon coeficient del quocient s'obté multiplicant l'anterior per $\boxed{3}$ i sumant el resultat al segon coeficient del dividend. Aquest $\boxed{3}$ prové del divisor $(x - \boxed{3})$.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & -9 & -7 & 0 & 1 \\ \boxed{3} & \downarrow & +12 & & & \\ \hline & 4 & 3 & & & \end{array}$$

El tercer coeficient del quocient s'obté multiplicant l'anterior per $\boxed{3}$ i sumant el resultat al tercer coeficient del dividend.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & -9 & -7 & 0 & 1 \\ 3 & \downarrow & +12 & +9 & & \\ \hline & 4 & 3 & 2 & & \end{array}$$

I així successivament.

$$\begin{array}{c|ccccc l} & 4 & -9 & -7 & 0 & 1 & \\ 3 & \downarrow & +12 & +9 & +6 & +18 & \\ \hline & 4 & 3 & 2 & 6 & \boxed{19} & \leftarrow \text{residu} \end{array}$$

$$\underbrace{4 \quad 3 \quad 2 \quad 6}_{\text{Coef. del quocient}}$$

Així doncs, el quocient de la divisió és $q(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 6$ i el residu és $r(x) = 19$.

El procés descrit a l'apartat b) de l'Exemple 3.2.4 es coneix com la **Regla de Ruffini**.

Considerem ara el cas general. Sigui $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. La divisió $P(x) : (x - \alpha)$ usant la Regla de Ruffini es fa com a l'Exemple 3.2.4

$$\text{Terme independent del divisor} \rightarrow \quad \begin{array}{c|ccccc l} & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 & \leftarrow \text{Coeficients de } P(x) \\ \alpha & \downarrow & & \ldots & & & \\ \hline & a_n & & \ldots & & \boxed{r} & \end{array}$$

$$\underbrace{a_n \quad \ldots \quad \ldots}_{\text{Coef. del quocient}} \qquad \text{Residu}$$

Exemple 3.2.5 Càlcul de la divisió $P(x) : Q(x)$ amb $P(x) = x^3 - 2x$ i $Q(x) = x + 4$.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -2 & 0 \\
-4 & \downarrow & -4 & +16 & -56 \\
\hline
 & \underbrace{1 \quad -4 \quad 14}_{\text{Coef. de } q(x)} & & & \boxed{-56} \leftarrow \text{residu}
\end{array}$$

El quocient de la divisió és $q(x) = x^2 - 4x + 14$ i el residu és $r = -56$.

Teorema 3.2.1:

[Teorema del residu] Sigui $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. El residu de la divisió $P(x) : (x - \alpha)$ coincideix amb el valor numèric del polinomi $P(x)$ en el punt $x = \alpha$; és a dir, coincideix amb $P(\alpha)$.

La demostració del Teorema del residu és molt senzilla. A partir de (3.2.1) tenim que

$$P(x) = (x - \alpha) \cdot q(x) + r, \tag{3.2.3}$$

on $q(x)$ és el quocient de la divisió $P(x) : (x - \alpha)$ i r n'és el residu. Si avaluem l'expressió (3.2.3) a $x = \alpha$ obtenim $P(\alpha) = r$.

3.3 Operacions amb binomis

Definició 3.3.1:

*Un **binomi** és una expressió de la forma $a + b$ on a, b poden ser nombres reals, monomis, etc.*

3.3.1 Productes notables

$$\text{Binomi al quadrat: } (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2. \tag{3.3.4}$$

$$\text{Suma per diferencia: } (a + b)(a - b) = a^2 - b^2. \tag{3.3.5}$$

Exemple 3.3.1 a) $(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2\cdot(2x)\cdot(3) + (3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$

b) $(x-2)(x+2) = (x)^2 - (2)^2 = x^2 - 4.$

3.3.2 Binomi de Newton

Sigui n un nombre natural,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1}\cdot b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2}\cdot b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 \cdot b^n, \tag{3.3.6}$$

on els nombres combinatoris $\binom{n}{k}$ es poden calcular o bé a partir de la fórmula

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \tag{3.3.7}$$

o bé a partir del Triangle de Tartaglia

$$\begin{array}{cccccccccccl}
 & & & & & \mathbf{1} & & & & & & \\
 & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & & & & \leftarrow \text{Fila } \binom{1}{k} \\
 & & & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{1} & & & & \leftarrow \text{Fila } \binom{2}{k} \\
 & & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{1} & & & \leftarrow \text{Fila } \binom{3}{k} \\
 & \mathbf{1} & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} & & \mathbf{4} & & \mathbf{1} & & \leftarrow \text{Fila } \binom{4}{k} \\
\mathbf{1} & & \mathbf{5} & & \mathbf{10} & & \mathbf{10} & & \mathbf{5} & & \mathbf{1} & \leftarrow \text{Fila } \binom{5}{k} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
 & & & & & \cdots & & & & & &
\end{array}$$

Exemple

$$\begin{aligned}
(x-2)^4 &\overset{(*1)}{=} \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 (-2)^1 + \binom{4}{2} x^2 (-2)^2 + \binom{4}{3} x (-2)^3 + \binom{4}{4} (-2)^4 \\
&\overset{(*2)}{=} x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16.
\end{aligned}$$

$(^*1)$ Apliquem la Fórmula del Binomi de Newton (3.3.6).

$(^*2)$
- Trobem els valors dels nombres combinatoris $\binom{4}{k}$ ja sigui a partir de la fórmula (3.3.7) o a partir del triangle de Tartaglia. Si ho fem a partir del triangle de Tartaglia prenem la fila corresponent a $\binom{4}{k}$, llavors

$$\binom{4}{0} = 1, \qquad \binom{4}{1} = 4, \qquad \binom{4}{2} = 6, \qquad \binom{4}{3} = 4, \qquad \binom{4}{4} = 1.$$

- Calculem les potències $(-2)^k$ per $k = 1, \ldots, 4$.

3.4 Arrels enteres i fraccionàries de polinomis

Definició 3.4.1:

Direm que $x = \alpha$ *és una* **arrel** *del polinomi* $P(x) \iff P(\alpha) = 0.$

Pel Teorema del residu tenim que

$$x = \alpha \text{ és una arrel de } P(x) \iff \text{el residu de la divisió } P(x) : (x - \alpha) \text{ és zero,}$$

o dit d'una altra manera,

$$x = \alpha \text{ és una arrel de } P(x) \iff P(x) \text{ és divisible per } (x - \alpha).$$

Així doncs, la Regla de Ruffini ens serveix per trobar arrels de polinomis. En particular, les arrels que es troben aplicant la regla de Ruffini són arrels enteres o arrels fraccionaries de la forma $\alpha = \dfrac{\text{divisor de } a_0}{\text{divisor de } a_n}$.

Observeu que $x = \alpha$ és una arrel del polinomi $P(x)$ si i només si $x = \alpha$ és una **solució** de l'equació polinòmica $P(x) = 0$.
A la Unitat 5 veurem amb més detall com resoldre equacions polinòmiques, en particular veurem com calcular solucions que no són ni enteres ni fraccionàries.

Teorema 3.4.1:

Un polinomi de grau n *te com a molt* n *arrels diferents.*

Exemple 3.4.1 a) Trobeu totes les arrels enteres o fraccionàries de $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$.

Busquem per a quins valors de α la divisió $P(x) : (x - \alpha)$ té residu 0.

Els valors de α que busquem són valors de la forma $\alpha = \dfrac{\text{divisor de } a_0}{\text{divisor de } a_3}$. Com que el coeficient del terme de grau 3 només és divisible per ± 1, els únics valors de α que haurem d'estudiar són els divisors del terme independent: $\alpha = \pm 1, \pm 2, \pm 4 \pm 8$.

$\boxed{\alpha = 1}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -5 & 2 & 8 \\ 1 & \downarrow & +1 & -4 & -2 \\ \hline & 1 & -4 & -2 & \boxed{6} \end{array}$$

com que el residu és diferent de zero $x = 1$ no és una arrel de $P(x)$.

$\boxed{\alpha = -1}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 2 & 8 \\ -1 & \downarrow & -1 & 6 & -8 \\ \hline & 1 & -6 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

El residu és zero, per tant $x = -1$ és una arrel de $P(x)$. Per altra banda, el quocient és $q(x) = x^2 - 6x + 8$, llavors per (3.2.1) el polinomi inicial es pot expressar de la forma

$$x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = (x+1)(x^2 - 6x + 8) \quad (3.4.8)$$

Per trobar les arrels que falten haurem de trobar les arrels del polinomi $q(x) = x^2 - 6x + 8$. Ho fem també per Ruffini.

Busquem per a quins valors de α la divisió $(x^2 - 6x + 8) : (x - \alpha)$ té residu 0.

Els valors de α que estudiarem són valors de la forma $\alpha = \dfrac{\text{divisor de } 8}{\text{divisor de } 1} = \pm 1, \pm 2, \pm 4 \pm 8$. Abans hem vist que $\alpha = 1$ no es arrel $P(x)$, per tant aquest valor no cal provar-lo. El valor $\alpha = -1$ si que s'haurà de provar ja que tot i ser arrel de $P(x)$ pot ser també arrel del polinomi quocient $q(x)$.

$\boxed{\alpha = 2}$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -6 & 8 \\ 2 & \downarrow & 2 & -8 \\ \hline & 1 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

El residu és zero, per tant $x = 2$ és una arrel de $q(x)$. A més el quocient és $x - 4$, així per (3.2.1) el polinomi $x^2 - 6x + 8$ es pot expressar com

$$(x^2 - 6x + 8) = (x-2)(x-4). \quad (3.4.9)$$

Substituint la factorització (3.4.8) a (3.4.9) tenim que

$$x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = (x+1)(x^2 - 6x + 8) = (x+1)(x-2)(x-4).$$

Les arrels del polinomi $P(x)$ són $x = -1$, $x = 2$ i $x = 4$.

b) Trobeu totes les arrels enteres o fraccionàries de $P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$.

Busquem per a quins valors de α el polinomi $P(x)$ és divisible per $(x - \alpha)$. Els valors de α que busquem són valors de la forma $\alpha = \dfrac{\text{divisor de } 2}{\text{divisor de } 1} = \pm 1, \pm 2$.

$\boxed{\alpha = 1}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & \downarrow & +1 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

El residu és zero, per tant $x = 1$ és una arrel de $P(x)$. A més el quocient és $x^2 - 2$, així per (3.2.1) el polinomi $P(x)$ es pot expressar com

$$x^3 - x^2 - 2x + 2 = (x-1)(x^2 - 2).$$

Busquem ara les arrels enteres o fraccionaries de $x^2 - 2$ per Ruffini. Els valors de α que analitzem són $\alpha = \pm 1, \pm 2$.

$\boxed{\alpha = 1}$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & -2 \\ 1 & \downarrow & +1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{-1} \end{array}$$

$\boxed{\alpha = -1}$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & -2 \\ -1 & \downarrow & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & \boxed{-1} \end{array}$$

$\boxed{\alpha = 2}$ $\begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & -2 \\ 2 & \downarrow & +2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{2} \end{array}$ $\boxed{\alpha = -2}$ $\begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & -2 \\ -2 & \downarrow & -2 & 4 \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{2} \end{array}$

Cap d'aquests valors de α dóna residu 0, així doncs el polinomi $x^2 - 2$ no té cap arrel entera o fraccionària. També hauríem pogut calcular el residu a partir del Teorema del residu. Sigui $q(x) = x^2 - 2$.

El residu de la divisió $q(x) : (x - 1)$ és $q(1) = 1^2 - 2 = -1$

El residu de la divisió $q(x) : (x + 1)$ és $q(-1) = (-1)^2 - 2 = -1$

El residu de la divisió $q(x) : (x - 2)$ és $q(2) = 2^2 - 2 = 2$

El residu de la divisió $q(x) : (x + 2)$ és $q(-2) = (-2)^2 - 2 = 2$

En resum les arrels enteres o fraccionaries del polinomi $P(x)$ són: $x = 1$.

Observeu que $x^2 - 2$ és una suma per diferència, així per (3.3.5) tenim que $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. Per tant el polinomi $x^2 - 2$ té dues arrels $x = \sqrt{2}$ i $x = -\sqrt{2}$ que no són ni enteres ni fraccionàries. Una altra manera de trobar les arrels del polinomi $x^2 - 2$ és resolent l'equació de segon grau $x^2 - 2 = 0$ (la resolució d'equacions de segon grau s'explica a la Unitat 5).

Les arrels del polinomi $P(x)$ són: $x = 1$, $x = \sqrt{2}$ i $x = -\sqrt{2}$.

3.5 Factorització de polinomis

La **factorització** del polinomi $P(x)$ consisteix en descompondre el polinomi $P(x)$ com un producte de la forma

$$P(x) = K \cdot (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_k)Q(x),$$

on K és una constant, α_i per $i = 1, \ldots k$ és una arrel entera o fraccionaria del polinomi $P(x)$ i $Q(x)$ és un polinomi de grau $n - k$ que no te arrels ni enteres ni fraccionaries (a vegades també es pensa que α_i són arrels reals del polinomi $P(x)$ i $Q(x)$ és un polinomi de grau $n - k$ que no te arrels reals).

Exemple 3.5.1 a) Factorització de $P(x) = x^2 - 4x + 4$.

S'observa que $P(x)$ és un binomi al quadrat, llavors per (3.3.4) $P(x) = (x - 2)^2$.

b) Factorització de $P(x) = x^2 - 9$.

S'observa que $P(x)$ és una suma per diferència, llavors per (3.3.5) $P(x) = (x - 3)(x + 3)$.

c) Factorització de $P(x) = x^4 - 16$.

S'observa que $P(x)$ és una suma per diferència, llavors per (3.3.5) $P(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4)$. Factoritzem ara els polinomis $x^2 - 4$ i $x^2 + 4$.

El polinomi $x^2 - 4$ també és una suma per diferència, llavors per (3.3.5) $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

El polinomi $x^2 + 4$ no pot tenir mai arrels reals ja que $x^2 + 4 > 0$ sempre.

La factorització del polinomi $P(x)$ és

$$x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4).$$

d) La factorització de $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ és

$$x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = (x + 1)(x - 2)(x - 4)$$

(vegeu l'Exemple 3.4.1 a)).

e) La factorització de $P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$ és

$$x^3 - x^2 - 2x + 2 = (x - 1)(x^2 - 2)$$

(vegeu l'Exemple 3.4.1 b)).

f) Factorització de $P(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2$.

Busquem les arrels enteres o fraccionàries de $P(x)$ per Ruffini com a l'Exemple 3.4.1. Les possibles arrels seran $\alpha = \pm 1, \pm 2$.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 3 & 1 & -3 & -2 \\
1 & \downarrow & +1 & +4 & +5 & +2 \\
\hline
 & 1 & 4 & 5 & 2 & \boxed{0} \\
-1 & \downarrow & -1 & -3 & -2 & \\
\hline
 & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} & \\
-1 & \downarrow & -1 & -2 & & \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$\dashrightarrow$ $x^4+3x^3+x^2-3x-2 = (x-1)(x^3+4x^2+5x+2)$

(Busquem les arrels del polinomi $x^3 + 4x^2 + 5x + 2$)

$\dashrightarrow$ $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x + 1)(x^2 + 3x + 2)$

(Busquem les arrels del polinomi $x^2 + 3x + 2$)

$\dashrightarrow$ $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$

La factorització del polinomi $P(x)$ és

$$x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 1)(x + 2) = (x - 1)(x + 1)^2(x + 2).$$

g) Factorització de $P(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

Com que el polinomi $P(x)$ no té terme independent, primer traiem totes les x's que puguem factor comú

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1).$$

Ara factoritzem el polinomi que en resulta: $x^2 - 2x + 1$. Observem que aquest polinomi és un binomi al quadrat, llavors per (3.3.4) $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.

La factorització del polinomi $P(x)$ és

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2.$$

Observació: Trobar les arrels d'un polinomi és equivalent a factoritzar el polinomi. Efectivament, siguin $x = \alpha_i$ per $i = 1, \dots, n$ les arrels d'un polinomi $P(x)$ i sigui $P(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$ la seva factorització. Si coneixem les arrels coneixem la factorització i si coneixem la factorització coneixem les arrels.

Definició 3.5.1:

Direm que $x = \alpha$ és una **arrel del polinomi** *$P(x)$* **de multiplicitat** *k si i només si en la factorització de $P(x)$ hi apareix el factor $(x-\alpha)^k$, o el què és el mateix, si hi apareix k vegades el factor $x - \alpha$.*

3.6 Màxim comú divisor i mínim comú múltiple de polinomis

Siguin $P(x)$ i $Q(x)$ dos polinomis.

Definició 3.6.1:

a) *Es defineix el* **màxim comú divisor** *de $P(x)$ i $Q(x)$, $\mathrm{MCD}\,(P(x), Q(x))$, com el polinomi de grau més gran que és divisor de $P(x)$ i $Q(x)$ simultàniament.*

b) *Es defineix el* **mínim comú múltiple** *de $P(x)$ i $Q(x)$, $\mathrm{mcm}\,(P(x), Q(x))$, com el polinomi de grau més petit que és múltiple de $P(x)$ i $Q(x)$ simultàniament.*

3.6.1 Càlcul del màxim comú divisor i mínim comú múltiple

Factoritzem els polinomis $P(x)$ i $Q(x)$ (vegeu la Secció 3.5).

El màxim comú divisor de $P(x)$ i $Q(x)$ està format pel producte dels factors comuns a $P(x)$ i $Q(x)$ elevats al menor exponent.

El mínim comú múltiple de $P(x)$ i $Q(x)$ està format pel producte dels factors comuns i no comuns a $P(x)$ i $Q(x)$ elevats al major exponent.

Exemple 3.6.1 a) Càlcul del màxim comú divisor i mínim comú múltiple dels polinomis $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ i $Q(x) = x^2 - x - 6$.

Factoritzem els polinomis $P(x)$ i $Q(x)$.

$$P(x) = (x-1)(x+2)^2, \qquad Q(x) = (x+2)(x-3).$$

Només tenim un factor comú a $P(x)$ i $Q(x)$, aquest és el factor $(x+2)$.

$$\begin{aligned} &\mathrm{MCD}\,(P(x), Q(x)) = x + 2 \\ &\mathrm{mcm}\,(P(x), Q(x)) = (x+2)^2(x-1)(x-3) = x^4 - 9x^2 - 4x + 12 \end{aligned}$$

b) Càlcul del màxim comú divisor i mínim comú múltiple dels polinomis $P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$, $Q(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$ i $R(x) = x^2 - 1$.

Factoritzem els polinomis $P(x)$, $Q(x)$ i $R(x)$

$$P(x) = (x-1)^3(x+2), \qquad Q(x) = (x-1)^2(x+2)^2, \qquad R(x) = (x-1)(x+1).$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{MCD}\,(P(x), Q(x), R(x)) = x - 1 \\ &\mathrm{mcm}\,(P(x), Q(x), R(x)) = (x-1)^3(x+2)^2(x+1) = x^6 + 2x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 4x - 4 \end{aligned}$$

Exercicis d'autoavaluació

1. Efectueu les següents operacions amb polinomis.

a) $(3+x^2-x^3+4x^4)+(-2-x^3+x^4-x^5)$

b) $\left(x+x^3+2x^5+\frac{1}{2}x^6\right)+\left(\frac{1}{2}x+x^2-x^3+\frac{1}{4}x^4-3x^5+\frac{3}{2}x^6\right)$

c) $\left(\frac{1}{2}+x^2+x^3\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3\right)$

d) $\left(x^3-\frac{3}{4}x^2y+\frac{1}{3}xy^2-\frac{5}{8}y^3\right)+\left(x^3+\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{4}xy^2-y^3\right)$

e) $(2-x-x^4)\cdot(1+3x+2x^2+2x^3+x^4)$

f) $\left(x+x^2+\frac{1}{2}x^3\right)\cdot\left(-1+\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x^2+x^3\right)$

g) $(x+1)(x-1)(x^2+2)$

h) $(x^3-x^2y+xy^2-y^3)(x+y)$

i) $(x^3+2x^2y+2xy^2+y^3)(x^3+2x^2y+2xy^2-y^3)$

j) $(x^4+11x^2-12x-5x^3+6):(-3x+3+x^2)$

k) $(1-x-3x^2-x^5):(1+2x+x^2)$

l) $(x^3-x+1):(1-x+2x^2)$

Solució

a) $-x^5+5x^4-2x^3+x^2+1$

b) $2x^6-x^5+\frac{1}{4}x^4+x^2+\frac{3}{2}x$

c) $\frac{5}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}$

d) $2x^3-\frac{1}{4}x^2y+\frac{7}{12}xy^2-\frac{13}{8}y^3$

e) $-x^8 - 2x^7 - 2x^6 - 4x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 2$

f) $\dfrac{1}{2}x^6 + \dfrac{4}{3}x^5 + \dfrac{23}{12}x^4 + \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - x$

g) $x^4 + x^2 - 2$

h) $x^4 - y^4$

i) $x^6 + 4x^5y + 8x^4y^2 + 8x^3y^3 + 4x^2y^4 - y^6$

j) quocient: $x^2 - 2x + 2$ residu: 0

k) quocient: $-x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ residu: 0

l) quocient: $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ residu: $-\frac{5x}{4} + \frac{3}{4}$

2. Donats els polinomis $P(x) = x^2 - 3x + 1$ i $Q(x) = x^3 + 5x^2 - 4x$ es demana que avalueu les següents expressions i simplifiqueu al màxim el resultat final.

a) $P(x) - 2Q(x)$

b) $P(-2)$

c) $Q(1/2)$

d) $Q(-1/2)$

e) $P(y-2)$

f) $P\left(\dfrac{2}{y} - z\right)$

g) $Q(y^2)$

h) $Q(1-y)$

i) Per $y > 0$, $Q(\sqrt{y})$

Solució

a) $-2x^3 - 9x^2 + 5x + 1$

b) 11

c) $-5/8$

d) $25/8$

e) $y^2 - 7y + 11$

f) $z^2 - \dfrac{4z}{y} + 3z - \dfrac{6}{y} + \dfrac{4}{y^2} + 1$

g) $y^6 + 5y^4 - 4y^2$

h) $-y^3 + 8y^2 - 9y + 2$

i) $y\sqrt{y} + 5y - 4\sqrt{y}$

3. Efectueu les següents divisions usant la regla de Ruffini.

a) $(3x^2 + 5x - 1) : (x - 2)$

b) $(2x^7 - 7x^5 - x^3 - 2x - 1) : (x + 3)$

Solució

a) quocient: $3x + 11$ residu: 21

b) quocient: $2x^6 - 6x^5 + 11x^4 - 33x^3 + 98x^2 - 294x + 880$ residu:-2641

4. Trobeu el màxim comú divisor i el mínim comú múltiple dels següents parells de polinomis.

a) $\{(x^3 + 2x^2 + 2x + 1), (x^2 + 2x + 1)\}$

b) $\{(x^4 + x^3 - 13x^2 - 31x - 18), (x^4 - 12x^2 - 20x - 9)\}$

c) $\{(x^5 - 3x^3 + x^2 + 2x - 1), (x^4 - 2x^2 + 1)\}$

Solució

a) MCD: $(x + 1)$ mcm: $(x^2 + x + 1)(x + 1)^2$

b) MCD: $(x + 1)(x^2 - 2x - 9)$ mcm: $(x+1)^2(x+2)(x^2-2x-9)$

c) MCD: $(x + 1)(x - 1)^2$ mcm: $(x-1)^2(x+1)^2(x^2+x-1)$

Glossari de termes

Bibliografia

Podeu consultar qualsevol llibre de primer i segon de Batxillerat.