UVIC
UNIVERSITAT
DE VIC

Unitat 1. Potències, radicals i logaritmes

Curs d'Anivellament de Matemàtiques

Montserrat Corbera / Vladimir Zaiats

montserrat.corbera@uvic.cat / vladimir.zaiats@uvic.cat

Escola Politècnica Superior

Índex

Unitat 1. Potències, radicals i logaritmes

1.1 Tipus de nombres

Els nombres 1, 2, 3, 4, 5,..., que s'utilitzen per comptar o per indicar el nombre ordinal d'algun objecte entre objectes similars, s'anomenen **nombres naturals**. El conjunt dels nombres naturals es denota per $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}. \tag{1.1.1}$$

Qualsevol nombre natural en el sistema decimal s'escriu utilitzant les **xifres** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Per exemple, la notació 2457 significa que 2 és el nombre de milers, 4 és el nombre de centenars, 5 és el nombre de desenes i 7 és el nombre d'unitats, és a dir, $2457 = 2 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7$.

En el conjunt dels nombres naturals s'introdueixen de forma habitual les operacions de suma, resta, producte i quocient. Resulta que el conjunt $\mathbb{N}$ no està tancat respecte de l'operació de resta, per exemple, en restar $2 - 5$ no es pot trobar cap nombre natural que doni el resultat d'aquesta operació.

Per evitar aquest problema, el conjunt $\mathbb{N}$ s'amplia fins al conjunt dels **nombres enters** $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}. \tag{1.1.2}$$

El conjunt $\mathbb{Z}$ resulta tancat respecte de les operacions de suma, resta i producte, però no respecte de la divisió.

Aleshores s'introdueix un conjunt de nombres més ampli, concretament, el conjunt $\mathbb{Q}$ dels **nombres racionals**:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \;:\; m \in \mathbb{Z},\; n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{1.1.3}$$

És immediat que el conjunt $\mathbb{Z}$ queda comprès en el conjunt $\mathbb{Q}$ (s'escriu $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$), ja que qualsevol nombre enter m admet la representació $\frac{m}{1}$. Cada nombre racional pot representar-se com una fracció decimal finita o infinita periòdica.

El conjunt $\mathbb{R}$ dels **nombres reals** es defineix com a conjunt que conté totes les fraccions decimals, ja siguin periòdiques o no. Els nombres reals que es representen per fraccions decimals aperiòdiques s'anomenen **nombres irracionals**. Es pot demostrar, per exemple, que $\sqrt{2}$ és un nombre irracional.

Notacions d'alguns conjunts dels nombres

Resumim les notacions introduïdes i definim-ne unes de noves:

$\mathbb{N}$ denota el conjunt dels nombres naturals, és a dir, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$;

la notació $n \in \mathbb{N}$ (es llegeix "n pertany al conjunt $\mathbb{N}$") significa que n és un nombre natural (les notacions $m \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$ referides als conjunts $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ s'interpreten de forma similar);

$\mathbb{Z}$ denota el conjunt dels nombres enters, és a dir, $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$;

$\mathbb{Q}$ denota el conjunt dels nombre racionals, és a dir, $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \;:\; m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}\}$;

$\mathbb{R}$ denota el conjunt dels nombres reals.

1.2 Potències i radicals

Potències naturals

Sigui a qualsevol nombre real i sigui n un nombre natural superior a 1. S'anomena **potència n-èsima del nombre a** el producte de n factors cadascun dels quals val a:

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}^{n \text{ vegades}}. \tag{1.2.1}$$

Si $n = 1$, aleshores per definició $a^1 = a$. El nombre a s'anomena **base** i el nombre n, **potència**. Per exemple:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \overbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}^{4 \text{ vegades}} = \frac{1}{81}\,.$$

Propietats de les potències naturals

1. $a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}^{n}$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. En particular, $a^1 = a$.

2. $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$.

3. $\dfrac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$, si $n > k$.

4. $(a^n)^k = a^{nk}$.

5. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$.

6. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0.$

Per exemple:

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8; \quad (2^3)^5 = 2^{3 \cdot 5} = 2^{15}; \quad \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}\,.$$

Potència nul·la. Potència negativa

Si $a \neq 0$, aleshores se suposa per definició que $a^0 = 1$. Per exemple, $(2.7)^0 = 1$; $(-5)^0 = 1$. L'expressió 0^0 no té sentit.

Si $a \neq 0$ i $n \in \mathbb{N}$, aleshores es defineix la potència negativa:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}\,. \tag{1.2.2}$$

Per exemple:

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}\,; \qquad (-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}\,.$$

Es compleix la igualtat

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Representació científica d'un nombre real positiu

Es pot representar qualsevol nombre real a en la forma $a_1 \cdot 10^n$, on $1 \leqslant a_1 < 10$ i n és un nombre enter ($n \in \mathbb{Z}$).

Exemple 1.2.1 1. Sigui $a = 395$, aleshores $a = 3.95 \cdot 10^2$. Aquí, $a_1 = 3.95$ i $n = 2$.

2. Sigui $a = 4.13$, aleshores $a = 4.13 \cdot 10^0$. Aquí, $a_1 = 4.13$ i $n = 0$.

3. Sigui $a = 0.0023$, aleshores $a = 2.3 \cdot 10^{-3}$. Aquí, $a_1 = 2.3$ i $n = -3$.

Definició 1.2.1:

Si un nombre positiu a s'escriu com a $a_1 \cdot 10^n$, on $1 \leqslant a_1 < 10$ i $n \in \mathbb{Z}$, aleshores es diu que el nombre a **està representat en forma científica**. *L'índex n s'anomena* **ordre del nombre a**.

Definició de l'arrel aritmètica

Definició 1.2.2:

Si $a \geqslant 0$ i $n \in \{2, 3, \ldots\}$, aleshores existeix un, i només un, nombre no negatiu x tal que es compleix la igualtat $x^n = a$. Aquest nombre x s'anomena **arrel aritmètica d'ordre n** *del nombre a i es denota per $\sqrt[n]{a}$. Si $n = 2$, aleshores s'escriu $\sqrt{a}$ (ometent l'índex n) i es parla de* **l'arrel quadrada**. *Sovint en comptes de dir "arrel" es diu "radical".*

D'aquesta manera, la notació $\sqrt[n]{a} = x$, on $a \geqslant 0$, significa primer que $x \geqslant 0$ i, segon, que $x^n = a$, és a dir:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a. \tag{1.2.3}$$

Per exemple, $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt[3]{125} = 5$, $\sqrt[10]{0} = 0$.

Propietats de les arrels aritmètiques

Si $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$, aleshores es compleixen les propietats següents:

1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$.
3. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$.
4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.
5. $\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}$.

La propietat 1 s'estén al producte de qualsevol nombre de factors. Per exemple, $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 125} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{125} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Exemple 1.2.2 Simplifiqueu les expressions següents:

a) $\sqrt[5]{7+\dfrac{19}{32}}$; b) $(\sqrt[5]{a^2})^3$; c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}$; d) $\sqrt[6]{a^4}$.

a) $\sqrt[5]{7+\dfrac{19}{32}} = \sqrt[5]{\dfrac{243}{32}} \overset{\text{Prop.2}}{=} \dfrac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}} = \dfrac{3}{2}$.

b) $(\sqrt[5]{a^2})^3 \overset{\text{Prop.3}}{=} \sqrt[5]{(a^2)^3} = \sqrt[5]{a^6}$.

c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}} \overset{\text{Prop.4}}{=} \sqrt[4\cdot 3]{a} = \sqrt[12]{a}$.

d) $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3\cdot 2]{a^{2\cdot 2}} \overset{\text{Prop.5}}{=} \sqrt[3]{a^2}$ (la potència del nombre a i l'ordre de l'arrel es divideixen per 2).

Arrel d'ordre senar d'un nombre negatiu

Sigui $a < 0$ i $n \in \{2, 3, \ldots\}$. Si n és parell, aleshores la igualtat $x^n = a$ no es compleix per a cap nombre $x \in \mathbb{R}$. Això significa que sobre el conjunt dels nombres reals no es pot definir l'arrel d'ordre parell d'un nombre negatiu. Si n és un nombre senar, aleshores existeix un, i només un, nombre real x tal que $x^n = a$.

Definició 1.2.3:

Aquest nombre x es denota per $\sqrt[n]{a}$ i s'anomena **arrel d'ordre senar n del nombre negatiu a**.

Per exemple, $\sqrt[3]{-8} = -2$, ja que $(-2)^3 = -8$; $\sqrt[5]{-243} = -3$, ja que $(-3)^5 = -243$.

Si n és senar, aleshores les propietats 1–5 exposades a la pàgina 7 i referides a $a, b \geqslant 0$ s'estenen als valors negatius d'a i b.

Arrel d'ordre fraccionari

Definició 1.2.4:

Siguin $a \geqslant 0$, $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Aleshores es defineix

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Si, a més, $a > 0$, aleshores es defineix

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}\ .$$

Les potències no enteres d'un nombre negatiu no tenen sentit.

Exemple 1.2.3 Calculeu els valors numèrics de les expressions següents:

a) $8^{\frac{1}{3}}$; b) $81^{\frac{3}{4}}$; c) $4^{-\frac{1}{2}}$.

a) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$;

b) $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{(3^4)^3} = \sqrt[4]{3^{3\cdot 4}} = 3^3 = 27$;

c) $4^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$.

Propietats de les potències racionals

Per a qualsevol nombre $a \in \mathbb{R}$, hem definit la potència a^n amb n natural; si $a \neq 0$, estan definides les potències nul·la i negatives; per a tot $a \geqslant 0$ s'han definit potències positives fraccionàries; finalment, si $a > 0$ s'han introduït potències negatives fraccionàries.

Exemple 1.2.4 Calculeu el valor numèric de l'expressió següent:

$$(6.25)^{0.5} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{0.25} - (-4)^{-1} \cdot (0.343)^0.$$

Tenim:

$$(6.25)^{0.5} = \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2}\,;$$

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{0.25} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{1}{2}\,;$$

$$(-4)^{-1} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}\,;$$

$$(0.343)^0 = 1.$$

Ajuntant els resultats obtinguts, resulta:

$$(6.25)^{0.5} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{0.25} - (-4)^{-1} \cdot (0.343)^0 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 1 = \frac{5}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1.5.$$

Potències irracionals

Sigui α un nombre irracional. Quin sentit es pot donar a la notació a^{α}, on a és un nombre no negatiu? Considerem tres casos: $a = 1$, $a > 1$ i $0 < a < 1$.

1) Si $a = 1$, aleshores per definició $1^{\alpha} = 1$.

2) Sigui $a > 1$. Agafem un nombre racional qualsevol r_1 tal que $r_1 < \alpha$ i un nombre racional qualsevol r_2 tal que $r_2 > \alpha$. Aleshores $r_1 < r_2$ i $a^{r_1} < a^{r_2}$. En aquest cas a^{α} s'interpreta com a nombre tal que $a^{r_1} < a^{\alpha} < a^{r_2}$ per a qualsevol parell de nombres racionals r_1 i r_2 tals que $r_1 < \alpha < r_2$. Es pot demostrar que el nombre a^{α} existeix i es defineix de forma única per a qualsevol $a > 1$ i qualsevol nombre irracional α.

3) Sigui $0 < a < 1$. Agafem un nombre racional qualsevol r_1 tal que $r_1 < \alpha$ i un nombre racional qualsevol r_2 tal que $r_2 > \alpha$. Aleshores $r_1 < r_2$ i $a^{r_1} > a^{r_2}$. En aquest cas a^{α} s'interpreta com a nombre tal que $a^{r_1} > a^{\alpha} > a^{r_2}$ per a qualsevol parell de nombres racionals r_1 i r_2 tals que $r_1 < \alpha < r_2$. Es pot demostrar que el nombre a^{α} existeix i es defineix de forma única per a qualsevol $0 < a < 1$ i qualsevol nombre irracional α.

Potències reals

Anteriorment s'ha definit a^x per a tot nombre real $a > 0$ i per a tot nombre x, ja sigui racional o irracional. Com que els nombres racionals i irracionals formen el conjunt dels nombres reals $\mathbb{R}$, això defineix la potència a^x per a qualsevol $x \in \mathbb{R}$. Resumim a continuació les principals propietats de les potències.

Siguin $a > 0$, $b > 0$ dos nombres reals i siguin x i y dos nombres reals qualssevol. Aleshores:

1. $a^0 = 1$.
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.
3. $a^x : a^y = a^{x-y}$.
4. $(a^x)^y = a^{xy}$.
5. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$.
6. $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$.

1.3 Logaritmes

1.3.1 Logaritme: definició i propietats

Definició 1.3.1:

S'anomena **logaritme** *d'un nombre positiu x en base a $(a > 0,\ a \neq 1)$ la potència a la qual s'ha d'elevar el nombre a per obtenir el nombre x :*

$$a^{\log_a x} = x. \tag{1.3.1}$$

És a dir, la igualtat $\log_a x = y$ significa que $a^y = x$. El nombre a s'anomena **base** *del logaritme.*

Per exemple, $\log_3 81 = 4$, ja que $3^4 = 81$; $\log_{10} 0.001 = -3$, ja que $10^{-3} = 0.001$; $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} = -\frac{1}{2}$, ja que $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

És important que l'expressió $\log_a x$ està definida només si $x > 0$ i $a > 0$, $a \neq 1$. Per tant, les següents notacions no tenen sentit (per què?): $\log_{-2} 3$, $\log_4(-4)$, $\log_1 5$, $\log_{16}(-2)^3$.

La definició 1.3.1 implica les dues propietats importants:

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1.$$

La primera d'aquestes igualtats resulta del fet que $a^0 = 1$, mentre que la segona igualtat s'obté de la fórmula $a^1 = a$.

Cal remarcar que en general $\log_a a^r = r$.

Propietats dels logaritmes

Sigui $a > 0$, $a \neq 1$. Aleshores es compleixen les propietats exposades a continuació.

1. $\log_a 1 = 0$.
2. $\log_a a = 1$.
3. $\log_a(a^x) = x$.

4. Si $x > 0$ i $y > 0$, aleshores $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.

   Per exemple, $\log_3 15 = \log_3(3 \cdot 5) = \log_3 3 + \log_3 5 = 1 + \log_3 5$.

5. Si $x > 0$ i $y > 0$, aleshores $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.

   Per exemple, $\log_2 1.25 = \log_2 \left(\dfrac{5}{4}\right) = \log_2 5 - \log_2 4 = \log_2 5 - \log_2(2^2) = \log_2 5 - 2$.

6. Si $x > 0$, aleshores $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$.

   Per exemple, $\log_5 81 = \log_5(3^4) = 4 \cdot \log_5 3$.

7. Si n és un nombre parell i x és un nombre real qualsevol diferent de 0, aleshores $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a |x|$.

   Per exemple, $\log_2(x^4) = 4 \cdot \log_2 |x|; \quad \log_3(x^2) = 2 \cdot \log_3 |x|$.

Canvi de base del logaritme

Es compleixen les dues propietats següents que permeten canviar de base en el logaritme.

1. Si $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, aleshores

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \,. \tag{1.3.2}$$

   Per exemple:

$$\log_2 3 = \frac{\log_5 3}{\log_5 2}; \qquad \log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a} \,.$$

2. Si $x > 0$ i $y > 0$, aleshores $\log_a x = \log_{a^y}(x^y)$.

   Per exemple, $\log_2 5 = \log_{2^3}(5^3); \quad \log_2 5 = \log_{2^{1/2}}(5^{1/2}) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{5}$.

Exemple 1.3.1 Calculeu $\log_5 6$, si $\log_2 3 = a$ i $\log_2 10 = b$.

En el logaritme $\log_5 6$, canviem de base 5 a base 2. Utilitzem la fórmula (1.3.2):

$$\log_5 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 5} = \frac{\log_2(2 \cdot 3)}{\log_2\left(\frac{10}{2}\right)} = \frac{\log_2 2 + \log_2 3}{\log_2 10 - \log_2 2} = \frac{1 + a}{b - 1} \,.$$

Exemple 1.3.2 Calculeu $\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt[6]{32}$.

D'acord amb la propietat 2 dels canvis de base, la base i l'argument del logaritme poden elevar-se a la mateixa potència; el valor del logaritme no variarà. Apliquem aquesta propietat:

$$\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt[6]{32} = \log_{(\sqrt[3]{2})^3} (\sqrt[6]{32})^3 = \log_2 \sqrt{32} = \log_2 \left(2^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{5}{2}\,.$$

Càlcul de logaritmes i antilogaritmes

Si una expressió A està formada de nombres no negatius utilitzant les operacions de producte, quocient i potència, aleshores es poden fer servir les propietats dels logaritmes per expressar $\log_a A$ mitjançant els logaritmes dels nombres que formen part de l'expressió A.

Exemple 1.3.3 Calculeu el logaritme en base 5 de l'expressió $\dfrac{125a^3b^2}{\sqrt{c}}$, on a, b i c són nombres positius.

Tenim:

$$\log_5\left(\frac{125a^3b^2}{\sqrt{c}}\right) = \log_5(125a^3b^2) - \log_5\sqrt{c} =$$

$$= \log_5 125 + \log_5(a^3) + \log_5(b^2) - \log_5(c^{1/2}) = 3 + 3\log_5 a + 2\log_5 b - \frac{1}{2}\log_5 c.$$

Sovint s'ha de resoldre el problema invers: calcular una expressió sabent quant val el seu logaritme. Aquest tipus de càlcul pot interpretar-se com a càlcul d'antilogaritme.

Definició 1.3.2:

Sigui x un nombre real qualsevol i sigui $a > 0$ i $a \neq 1$. S'anomena **antilogaritme de x en base a** *el nombre y del qual x és logaritme en base a, és a dir, y és antilogaritme de x en base a, si:*

$$x = \log_a y. \tag{1.3.3}$$

Proposició 1.3.1:

Si dos nombres són iguals, aleshores els seus antilogaritmes en qualsevol base també són iguals.

Exemple 1.3.4 Calculeu x si se sap que $\log_3 x = 2\log_3 5 + \frac{1}{2}\log_3 8 - 3\log_3 10$.

Tenim:

$$\log_3 x = \log_3 25 + \log_3(8^{1/2}) - \log_3(10^3) = \log_3 \frac{25 \cdot 2\sqrt{2}}{1000} = \log_3 \frac{\sqrt{2}}{20}\,.$$

Aplicant la proposició 1.3.1, la igualtat $\log_3 x = \log_3 \frac{\sqrt{2}}{20}$ implica que són iguals els antilogaritmes, és a dir, $x = \frac{\sqrt{2}}{20}$.

1.3.2 Logaritmes decimals i neperians

Definició 1.3.3:

Si la base del logaritme és 10*, aquest logaritme s'anomena* **logaritme decimal**. *En comptes d'escriure* $\log_{10} x$ *s'escriu* $\log x$.

Definició 1.3.4:

Si la base del logaritme és el nombre $e \approx 2.7182818284590 45\ldots$*, aleshores aquest logaritme s'anomena* **logaritme natural** *o* **logaritme neperià**. *En comptes d'escriure* $\log_e x$ *s'escriu* $\ln x$.

El nombre e es defineix de forma estricta com a valor del límit

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \tag{1.3.4}$$

on se suposa que $n \in \mathbb{N}$. Aquest nombre s'anomena també **nombre neperià** commemorant a John Neper (1550–1617), matemàtic escocès. La notació e fa referència a la primera lletra del cognom de Leonhard Euler (1707–1783), matemàtic suïs.

Els logaritmes decimals satisfan les propietats següents:

$$\begin{array}{rll} & 10^{\log a} = a, & \\ \log 1 = 0, & \log 0.1 = -1, & \\ \log 10 = 1, & \log 0.01 = -2, & \\ \log 100 = 2, & \log 0.001 = -3, & \\ \ldots & \ldots & \\ \log(10^n) = n, & \log(10^{-n}) = -n, & n \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Suposem que un nombre positiu a ve representat en forma científica (vegeu la pàgina 7): $a = a_1 \cdot 10^n$, on $1 \leqslant a_1 < 10$ i $n \in \mathbb{Z}$. Apliquem logaritme en base 10 a ambdues parts d'aquesta igualtat i apliquem propietats dels logaritmes:

$$\log a = \log(a_1 \cdot 10^n) = \log a_1 + \log(10^n) = \log a_1 + n.$$

Així doncs, s'obté:

$$\log a = \log a_1 + n. \tag{1.3.5}$$

Com que $1 \leqslant a_1 < 10$, tenim $\log 1 \leqslant \log a_1 < \log 10$, és a dir, $0 \leqslant \log a_1 < 1$. Aleshores la fórmula (1.3.5) implica que n és el màxim nombre enter que no és superior a $\log a$ o, que és el mateix, n és la part entera del nombre $\log a$, és a dir, $n = [\log a]$. El terme $\log a_1$ llavors és la part fraccionària del nombre $\log a$, és a dir, $\log a_1 = \{\log a\}$.

Definició 1.3.5:

La part entera del nombre $\log a$, és a dir, l'ordre del nombre $\log a$, s'anomena **característica** *del logaritme $\log a$. La part fraccionària de $\log a$ s'anomena* **mantissa** *d'aquest logaritme.*

Es compleix la proposició següent.

Proposició 1.3.2:

Si un nombre $a > 0$ es multiplica per 10^k, on $k \in \mathbb{Z}$, aleshores la mantissa del logaritme decimal no variarà. És a dir, els nombres $\log a$ i $\log(a \cdot 10^k)$ tenen les mateixes mantisses.

Exercicis d'autoavaluació

1. Efectueu les següents operacions i simplifiqueu els resultats.

a) $1 - \Big[3 - 2 \cdot [4 - (1 - 3)]\Big]$

b) $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2} : \frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\right)$

c) $\frac{1}{5} : \left[\frac{2}{5} - 2 \cdot \left(1 - \frac{7}{10}\right)\right]$

d) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)^{-2}$

e) $\left[\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right) : \frac{3}{2}\right]^2$

f) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \left(-\frac{4}{6}\right)^2$

g) $-\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} - \frac{8}{9} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + (-3)^{-1}$

h) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\right)^{-2} : \frac{6}{7} - \sqrt[3]{1 - \frac{7}{8}} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)^{-1}$

i) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 : \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-2} \cdot \frac{1}{2}$

j) $\frac{2^3 \cdot (-2)^4}{2^3 : 2^2} : 2^{-5}$

k) $\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}$

Solució

a) 10 b) $-\dfrac{3}{100}$ c) -1

d) $\dfrac{4}{9}$ e) $\dfrac{16}{729}$ f) $\dfrac{4}{27}$

g) $\dfrac{2}{15}$ h) $-\dfrac{191}{14}$ i) $\dfrac{1}{2^{11}} = \dfrac{1}{2048}$

j) $2^{11} = 2048$ k) $\dfrac{14}{23}$

2. Simplifiqueu tant com es pugui les següents expressions. Es suposa que les variables són positives.

a) $\dfrac{a^2 \cdot a^7}{a^3}$ b) $\left(\dfrac{(a^5)^2}{a^6}\right)^9$ c) $\left(\dfrac{(a^2 \cdot a^{-3})^4}{a^{-2}}\right)^5$

d) $\left(\dfrac{(a^{-1} \cdot b^2)^{-3}}{(a^2 \cdot b^{-1})^3}\right)^4$ e) $\dfrac{(a^{-1/2})^3}{\sqrt{a^{-5}}}$ f) $\dfrac{(a^2 \cdot \sqrt[3]{a})^4}{(a^2)^{1/3}}$

g) $\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^5}}\right)^3$ h) $\dfrac{\sqrt{3} \cdot 3^{1/3}}{3^{-1}\sqrt[3]{9}}$ i) $\left(\left(\dfrac{a^{-1/2}}{a^{3/2}}\right)^{1/2}\right)^{3/2}$

j) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$ k) $\left[\dfrac{\left(\dfrac{a^3 \cdot a^5}{a^6}\right)^3}{\left(\dfrac{a \cdot a^3 \cdot a^7}{a^4 \cdot a^5}\right)^{-2}}\right]^4$ l) $\dfrac{\sqrt[6]{24a^3b^2} \cdot \sqrt[3]{16a^2}}{\sqrt[4]{72a^2b^3}}$

m) $\dfrac{(a^2y)^{3/4} \cdot (ay^{1/2})^{1/2}}{(a^{3/2} \cdot y^{1/2})^2}$ n) $\sqrt[3]{x^2\, y\, z^3}\,\sqrt[6]{x^2\, y}$ o) $\dfrac{(x^2\, y^{-1})^{-2}}{\sqrt{(x\, y^2)^{-4}}}$

p) $2\sqrt{x} - \dfrac{2x}{\sqrt{x}}$ q) $\dfrac{xy\sqrt{z}}{\sqrt[3]{x^6yz^4}}$

Solució

a) a^6 b) a^{36} c) $a^{-10} = \dfrac{1}{a^{10}}$

d) $(a \cdot b)^{-12} = \dfrac{1}{(a \cdot b)^{12}}$ e) a f) $a^{26/3} = a^8\sqrt[3]{a^2}$

g) $a^{5/4} = a\sqrt[4]{a}$ h) $3^{7/6} = 3\sqrt[6]{3}$ i) $a^{-3/2} = \dfrac{1}{a\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a^2}$

j) $3^{7/8} = \sqrt[8]{3^7}$ k) a^{40} l) $\dfrac{2^{13/12}a^{2/3}}{3^{1/3}b^{5/12}} = \dfrac{2\sqrt[12]{2}\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{3}\sqrt[12]{b^5}}$

m) $\dfrac{1}{a}$

n) $x\sqrt{y}\,z$

o) $\dfrac{y^6}{x^2}$

p) 0

q) $\dfrac{\sqrt[3]{y^2}}{x\sqrt[6]{z^5}}$

3. Treieu factor comú de les següents expressions:

a) $3\sqrt{2}+6\sqrt{8}+15\sqrt{6}$

b) $3\sqrt{6}-\sqrt{24}+\sqrt{42}$

c) $3a^2-3a$

d) $12x+3x^2-15x^3+9x^4$

e) $\dfrac{x+x^2}{3}-\dfrac{x^2}{3}$

f) $2ab-4a^2b^2+2a^3b$

g) $6x^2y+3xy^2+12x^2y-9xy$

h) $4t^2x^2y^4-2t^3xy^2+6t^5x^3y^3$

Solució

a) $15\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$

b) $\sqrt{6}(1+\sqrt{7})$

c) $3a(a-1)$

d) $3x(4+x-5x^2+3x^3)$

e) $x/3$

f) $2ab(1-2ab+a^2)$

g) $3xy(2x+y+4x-3)$

h) $2t^2xy^2(2xy^2-t+3t^3x^2y)$

4. Calculeu els següents logaritmes:

a) $\log_3 81$

b) $\log 0.000001$

c) $\log_2 \sqrt{2}$

d) $\log_4 1$

e) $\log_{\frac{1}{2}} 4$

Solució

a) 4, b) -6, c) 1/2, d) 0, e) -2.

5. Trobeu el valor de a en les següents igualtats:

a) $\log_a 16=2$

b) $\log_a 9=\frac{1}{2}$

c) $\log_{\frac{1}{2}} a=-4$

d) $\log_{27} a=-\frac{1}{3}$

e) $\log_a 125=-3$

f) $\ln a=-1$

Solució

a) 4, b) 81, c) 16, d) 1/3, e) 1/5, f) 1/e.

6. Doneu el valor numèric de les següents expressions sense utilitzar la calculadora

a) $\log_{16} \sqrt[4]{2} - \log_3(27\sqrt{3}) + \log_5 \sqrt{5\sqrt{5}}$

b) $\log_3 \dfrac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}}}{27} + \log_4 \dfrac{\sqrt[3]{8}}{128\sqrt{2}} - \log_7 \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt[3]{49}}$

c) $3^{1+\log_3 4} + 2^{-2+\log_2 3}$

d) $\log_4(\log_2(\log_3 81))$

Solució

a) $-\dfrac{43}{16}$ b) $-\dfrac{67}{12}$ c) $\dfrac{51}{4}$ d) $\dfrac{1}{2}$

7. Expresseu com un sol logaritme les següents expressions

a) $\log_a x + 3\log_a y - \dfrac{1}{2}\log_a(a^2+b) + \log_a c$

b) $2 - \ln x + 2\ln y - \dfrac{1}{4}\ln z$

c) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) + \ln\left(\dfrac{b}{c}\right) + \ln\left(\dfrac{c}{d}\right) - \ln\left(\dfrac{a\,y}{d\,x}\right)$

Solució

a) $\log_a\left(\dfrac{x\,y^3\,c}{\sqrt{a^2+b}}\right)$ b) $\ln\left(\dfrac{e^2\,y^2}{x\,\sqrt[4]{z}}\right)$ c) $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$

8. Demostreu la següent igualtat

$$\ln\left[\frac{\sqrt[3]{a\,b^{-1}\,c^{-2}}}{\sqrt[6]{a^{-1}\,b^{-2}\,c^{-4}}}\right] = \frac{\ln a}{2}$$

Glossari de termes

$\mathbb{N}$ conjunt dels nombres naturals, vegeu la Unitat 0
$\mathbb{Z}$ conjunt dels nombres enters, vegeu la Unitat 0
$\mathbb{Q}$ conjunt dels nombres racionals, vegeu la Unitat 0
$\mathbb{R}$ conjunt dels nombres reals, vegeu la Unitat 0
$\mathbb{R}^+$ conjunt dels nombres reals positius
$\mathbb{R}^-$ conjunt dels nombres reals negatius
$\in$ pertany ($a \in A$ indica que l'element a pertany al conjunt A)
$\cap$ intersecció ($A \cap B$ és el conjunt format per tots els elements que pertanyen a A i B simultàniament)
$\cup$ intersecció ($A \cup B$ és el conjunt format per tots els elements que pertanyen a A o a B)

Bibliografia

Podeu consultar qualsevol llibre de primer i segon de Batxillerat.