Els nombres enters

Els nombres enters

Els nombres enters són els que permeten comptar tant els objectes que es tenen com els objectes que es deuen.

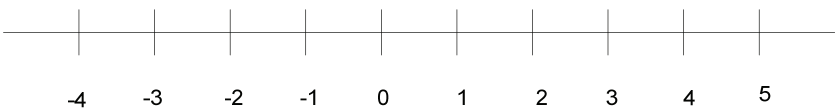
Tipus d'enters

- Enters positius: precedits del signe + o de cap signe. Exemples:
  3, +5, 6, +12
- El zero, 0, que no és ni positiu ni negatiu
- Enters negatius: precedits sempre del signe $-$. Exemples:
  $-5,\ -7,\ -23$

L'ordenació dels enters

- Signes
  - $>$ significa "major que". Exemple: $58 > 12$
  - $<$ significa "menor que". Exemple: $-3 < 12$
- Caracterització
  - Qualsevol nombre positiu sempre es major que quasevol nombre negatiu.
    Per exemple, $+3 > -8$ (o bé, $-8 < +3$).
  - El 0 es major que qualsevol nombre negatiu, i menor que qualsevol nombre postiu.
    Per exemple, $-30 < 0 < 4$ (o bé, $4 > 0 > -30$).
  - Entre dos enters negatius, el major és aquell que, sense signe, és el menor.
    Per exemple, $-5 > -12$ (o be, $-12 < -5$).

Representació en una recta dels enters:



El valor absolut d'un nombre enter és el mateix nombre sense signe: $|-4| = |4| = 4$.

Les operacions entre nombre enters

La suma

Nombres amb signes iguals	Se sumen els valors absoluts i es posa el signe que tenen: $+5 + (+4) = +9$ $-4 + (-10) = -14$
Nombres amb signes diferents	Es resten els valors absoluts del més gran menys el del més petit, i es posa el signe del més gran: $+8 + (-7) = +1$.

Propietats de la suma

- La propietat commutativa: $7 + (-2) = -2 + (+7) = 5$
- La propietat associativa: $-3 + (+2) + (-5) = (-3 + (+2)) + (-5) = -3 + ((+2) + (-5)) = -6$
- L'element neutre de la suma de nombres enters és el 0
- L'element oposat d'un nombre enter: l'oposat de 3 és -3

La resta

La resta de dos nombres és la suma de minuend i l'oposat del subtrahend:

$$-4 - (-7) = -4 + (+7) = +3$$

La multiplicació i la divisió

Propietats de la multiplicació

- La propietat commutativa: $3 \cdot (-4) = (-4) \cdot 3 = -12$
- La propietat associativa : $-3 \cdot (+2) \cdot (-4) = (-3 \cdot (+2)) \cdot (-4) = -3 \cdot ((+2) \cdot (-4)) = 24$
- La propietat distributiva del producte respecte de la suma:

$-5 \cdot (4 + (-3)) = -5 \cdot 4 + (-5) \cdot (-3)$

Regla dels signes

Multiplicació	+	–	Divisió	+	–
+	+	–	+	+	–
–	–	+	–	–	+

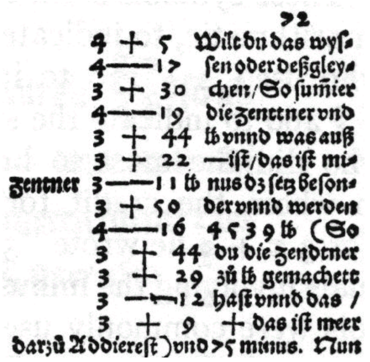
Les operacions i l'ordre dels enters

La suma	No altera l'ordre: $-2 < +4$; per tant, $-2 + (-3) < +4 + (-3)$
La resta	No altera l'ordre: $-2 < +4$; per tant, $-2 - (-3) < +4 - (-3)$
La multiplicació	Si es multiplica per un nombre positiu, no altera l'ordre: $-2 < +4$; per tant, $-2 \times (+3) < +4 \times (+3)$ Si es multiplica per un nombre negatiu, altera l'ordre: $-2 < +4$; per tant, $-2 \times (-3) > +4 \times (-3)$
La divisió	Si es divideix per un nombre positiu, no altera l'ordre: $-4 < +2$; per tant, $-4 : (+2) < +2 : (+2)$ Si es divideix per un nombre negatiu, altera l'ordre: $-4 < +2$; per tant, $-4 : (-2) > +2 : (-2)$

Que és un nombre enter?

> Els nombres enters són els que permeten comptar tant objectes que es tenen com objectes que es deuen.

Els nombres enters permeten contar, entre moltes altres situacions, tant allò que es posseeix com allò que es deu. Més genèricament, els nombres enters permeten representar les situacions en les quals els objectes contats es poden dividir en dos grups, un de format pels objectes que es compten a partir d'un punt en endavant, i l'altre format pels que es compten a partir d'aquest mateix punt cap enrere.


72
4 + 5 Wiltu das wyss
4 — 17 sen oder dessgley
3 + 30 chen / So summier
4 — 19 die zentner und
3 + 44 lb und was auss
3 + 22 — ist / das ist mi
Zentner 3 — 11 lb nus dz setz beson
3 + 50 der und werden
4 — 16 4539 lb (So
3 + 44 du die zendtner
3 + 29 zu lb gemachett
3 — 12 hast und das /
3 + 9 + das ist meer
darzu Addierest) und >5 minus. Nun

Els símbols + i – van aparèixer impresos per primera vegada en *Aritmètica Mercantil*, de Johannes Widmann, publicada a Leipzig el 1489. L'autor va utilitzar aquests símbols per a referir-se a guanys i pèrdues en problemes comercials.

Els nombres enters es poden classificar en:

- Enters positius, que són els que permeten comptar allò que es posseeix; es poden associar als nombres naturals (excepte el 0). Els enters positius es poden escriure com s'escriuen els nombres naturals, o bé poden anar precedits del signe +. Per exemple, el nombre enter 5 també es pot escriure com a +5. Així, per a indicar que es posseeixen 13 €, es pot escriure +13 € o, simplement, 13 €.
- Enters negatius, que són els que permeten comptar el que es deu. Els enters negatius s'escriuen utilitzant un nombre natural, precedit d'un signe –. Així, un enter negatiu podria ser –6, que es llegeix "menys 6". Per tant, per a indicar que es deuen 23 €, es pot escriure –23 €.
- El zero, que és un enter ni positiu ni negatiu.

Com estan ordenats els nombres enters?

> Donats dos nombres enters diferents qualssevol, un d'ells sempre és més gran que l'altre, fet que es pot expressar amb els signes de desigualtat.

Donats dos nombres enters diferents qualssevol, un d'ells sempre és més gran que l'altre. Aquest fet tan senzill es pot expressar mitjançant els signes de desigualtat:

- El signe **>** significa 'major que', i indica que el que es troba a l'esquerra del signe és més gran que el que es troba a la dreta. Per exemple, l'expressió $6 > 4$ indica que el 6 és més gran que el 4.
- El signe **<** significa 'menor que', i indica que el que es troba a l'esquerra del signe és més petit que el que es troba a la dreta. Per exemple, l'expressió $1 < 17$ indica que l'1 és menor que el 17.

Com en el cas del signe igual, = , es poden encadenar diversos signes < ó >. Ara bé, en una mateixa expressió, només poden aparèixer signes < ó > del mateix tipus. Per exemple, és correcte escriure $5 < 7 < 8$; en canvi, és incorrecte escriure $8 > 1 < 2$ (encara que ambdues parts de l'expressió siguin correctes).

Utilitzant aquests signes es poden ordenar tots els nombres enters, tenint en compte que:

- Qualsevol nombre positiu sempre és més gran que qualsevol nombre negatiu. Això és fàcil d'entendre amb un exemple: és evident que +3 € és més gran que –9 €; és a dir, es posseeix més diners tenint 3 € que devent 9 €. Així, doncs, +3 > –9 (o bé, –9 < +3).

- El 0 és més gran que qualsevol nombre negatiu i menor que qualsevol nombre positiu. És clar que no tenir cap euro (0 €) és posseir més que deure'n trenta (–30 €) però, en canvi, és tenir menys que quatre euros (+4 €). Així, doncs, –30 < 0 < 4 (o bé, 4 > 0 > –30).
- Entre dos enters negatius, el més gran és aquell que, sense signe, és el menor. Un exemple pot il·lustrar aquest fet: Qui té més diners, algú que deu 5 €, o bé algú que deu 12 €? És fàcil contestar que qui deu 5 €. És a dir, –6 > –12 (o bé, –12 < –6).

Què és el valor absolut d'un nombre enter?

> El valor absolut d'un nombre enter és igual al mateix nombre enter eliminant el seu signe.

El valor absolut d'un nombre enter és igual al mateix nombre enter sense el seu signe. És a dir, per a trobar el valor absolut d'un nombre enter, n'hi ha prou amb llevar-li el signe i convertir-lo en un nombre natural. Així, per exemple, el valor absolut del +6 és igual a 6; el valor absolut de –23 és igual a 23; evidentment, el valor absolut de 0 és 0.

Per a expressar el valor absolut d'un nombre, es fan servir dos petits segments verticals col·locats a banda i banda del nombre; així, el valor absolut de +6, s'expressa |+6|, i |+6| = 6. De la mateixa manera:

$|-23| = 23 \qquad |0| = 0.$

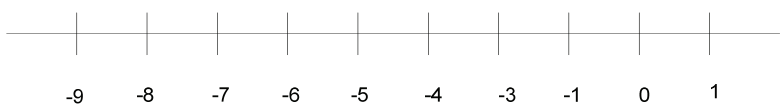
Com es representen els nombres enters en una recta?

> Les característiques dels nombres enters permeten representar-los en una recta.

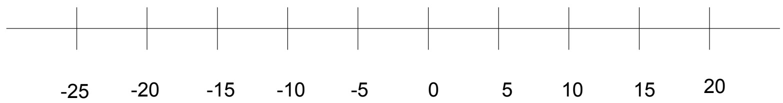
Les característiques dels nombres enters permeten representar-los sobre una recta, com a punts equidistants, és a dir, punts que es troben a la mateixa distància, ja que:

- No hi ha cap nombre enter que sigui el primer, ni tampoc l'últim. És a dir, donat un nombre enter qualsevol, sempre es pot trobar un nombre que sigui menor i un altre nombre que sigui major.
- Un nombre enter i el següent sempre es diferencien en una unitat.
- Els nombres enters es poden llistar ordenats d'esquerra a dreta; evidentment, aquesta llista sempre serà incompleta. Per exemple:
  ... –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ...

Així, doncs, una altra representació dels nombres enters pot ser aquesta:



També és possible representar nombres enters no consecutius, encara que la diferència entre un i el següent sempre ha de ser, habitualment, la mateixa. Per exemple, en aquesta representació els nombres es troben de 5 en 5:



Com es pot observar, el zero no s'ha de trobar sempre en el centre de la representació; fins i tot pot no trobar-se entre els nombres representats. Per exemple:

Com es fan la suma i la resta entre nombres enters?

> La suma i la resta de nombres enters tenen unes regles especials i compleixen les propietats commutativa i associativa.

Les operacions entre nombres enters són les mateixes que entre els nombres naturals i compleixen, a més, les mateixes propietats; ara bé, tenen certes regles de càlcul específiques per la distinció que hi ha entre enters positius i enters negatius. En tot cas, la denominació d'operacions i elements que formen part de cada operació se segueix mantenint.

Les regles per a sumar nombres enters són les següents:

- Per a sumar dos nombres que tenen el mateix signe, se sumen els seus valors absoluts i, al resultat, s'hi afegeix el signe comú. Per exemple:

  $+17 + (+12) = +29$

  $-10 + (-6) = -16$

- Per a sumar dos nombres amb signe diferent, s'han de restar els seus valors absoluts, el més gran del més petit. Finalment, s'ha d'afegir el signe del nombre que té el valor absolut més gran. Per exemple:

  $+13 + (-11) = +2$ (el valor absolut de $+13$, 13 és més gran que el valor absolut de -11, 11; per això, el signe ha d'ésser +)

  $+6 + (-11) = -5$ (el valor absolut de -11, 11 és més gran que el valor absolut de $+6$, 6; per això el signe ha d'ésser –)

La suma de nombres enters té les propietats següents:

- La propietat commutativa, és a dir, que l'ordre dels sumands no altera el resultat. Per exemple: $7 + (-2) = -2 + (+7) = 5$
- La propietat associativa, és a dir, una suma de més de dos enters no depèn de l'ordre en què es fan les sumes. Per exemple:

  $-3 + (+2) + (-5) = (-3 + (+2)) + (-5) = -3 + ((+2) + (-5)) = -6$

Hi ha dos tipus d'elements que compleixen certes propietats especials: l'element neutre de la suma de nombres enters és el 0; l'element oposat d'un nombre enter és un altre nombre enter que, sumat amb l'anterior, dóna zero. Per exemple, l'oposat de $+5$ és -5, perquè $+5 + (-5) = 0$. És fàcil observar que per a calcular l'oposat d'un nombre, únicament s'ha de canviar el seu signe. Tot nombre enter té un únic oposat i tots dos nombres tenen el mateix valor absolut. En l'exemple: $|+5| = |-5| = 0$.

La resta o diferència de nombres enters té una regla senzilla: la diferència de dos nombres enters és igual a la suma del minuend amb l'oposat del subtrahend. Per exemple:

$14 - (+3) = 14 + (-3) = 11$

$-12 - (+16) = -12 + (-16) = -28$

Sempre signifiquen el mateix els signes + i –?

> Els signes + i – poden representar el signe d'un nombre enter, o bé una operació.

Els signes + i – poden expressar tant una operació com el signe d'un nombre (positiu o negatiu). Cada vegada que es detecta un signe d'aquest tipus en una expressió numèrica, s'ha de distingir quin és el seu sentit. Així, per exemple:

signes d'operació

$+2 - (-12) - (+7) - (-9)$

signes dels números

+2 – (–12) – (+7) – (–9)

Quan entre dos nombres només hi ha un únic signe, aquest no pot expressar altra cosa que una operació. Per exemple:

$5 - 7$

signe d'operació

Per descomptat, en aquest cas, el signe del nombre que segueix el signe d'operació és sempre positiu perquè és sabut que quan un nombre no té signe, aquest és positiu.

Una expressió amb nombres enters pot ser molt confusa per la quantitat de signes i parèntesis innecessaris (parèntesis que només tanquen un nombre). Per a evitar-ho, es poden eliminar dos signes consecutius (un d'operació i l'altre del nombre) seguint per ordre aquestes senzilles regles:

- S'eliminen tots els parèntesis.
- Se substitueixen dos signes consecutius.

$$\begin{cases} \text{per un signe +, si es tracta de dos signes iguals} \\ \text{per un signe –, si es tracta de signes diferents} \end{cases}$$

Per exemple:

$$-5 + (-8) - (-13) + (-2) - (+4) + (+6) = -5 - 8 + 13 - 2 - 4 + 6$$

Una manera ràpida d'obtenir el resultat final és la següent: se sumen, d'una banda, tots els nombres precedits d'un signe +; per altra banda, se sumen tots aquells que van precedits d'un signe –. Finalment, es fa la suma d'aquests dos valors, tenint en compte que tenen signes diferents.

Com es fan la multiplicació i la divisió entre nombres enters?

> Les regles multiplicació de nombres enters tenen unes regles especials i compleixen les propietats commutativa i associativa.

Per a fer una multiplicació entre nombres enters, en primer lloc es realitza el producte dels seus valors absoluts; a continuació s'ha d'establir el signe del resultat. Amb aquesta finalitat només cal recordar la regla següent:

- si ambdós nombres tenen el mateix signe, el seu producte és positiu;
- si els nombres tenen signe diferent, el seu producte és negatiu.

És usual escriure aquesta regla d'aquesta manera:

$+ \times + = +$	$+ \times - = -$
$- \times - = +$	$- \times + = -$

En tot cas, s'ha de tenir en compte que aquestes expressions només serveixen per a recordar la regla, i no es poden trobar dintre d'una expressió numèrica (en la qual està prohibit l'ús de dos signes consecutius). Així, per exemple:

$$+5 \cdot (+4) = +20$$
$$-5 \cdot (-4) = +20$$
$$+5 \cdot (-4) = -20$$
$$-5 \cdot (+4) = -20$$

Les mateixes regles són vàlides per a la divisió, canviant el signe de multiplicar pel signe de dividir:

$+ : + = +$	$+ : - = -$
$- : - = +$	$- : + = -$

En cas que la divisió sigui exacta, igual que amb els nombres naturals, es diu que el dividend és un múltiple del divisor. Les regles i propietats de múltiples i divisors són també les mateixes, utilitzant el valor absolut dels nombres. Per exemple, el –3 és un divisor del 12 perquè $|12| : |-3| = 4$ és una divisió exacta.

Les propietats del producte de nombres enters són:

- La propietat commutativa: l'ordre dels factors no afecta el producte. Per exemple: $3 \cdot (-4) = (-4) \cdot 3 = -12$.
- La propietat associativa: el producte de més de dos factors no depèn de l'ordre com es fan las multiplicacions. Per exemple:
  $$-3 \cdot (+2) \cdot (-4) = (-3 \cdot (+2)) \cdot (-4) = -3 \cdot ((+2) \cdot (-4)) = 24.$$

Una altra propietat que relaciona la suma i el producte de nombres enters és la propietat distributiva del producte respecte de la suma. Aquesta propietat afirma que el producte d'un nombre per la suma de dos nombres és igual a la suma dels productes del primer nombre per cadascun dels altres dos. Per exemple:

$$-5 \cdot (4 + (-3)) = -5 \cdot 4 + (-5) \cdot (-3)$$

Com afecten les operacions a l'ordre dels nombres enters?

> En sumar o restar un mateix nombre a dos nombres enters, els resultats mantenen la mateixa relació d'ordre que els dos nombres originals; en canvi, en multiplicar o dividir dos nombres per un mateix nombre enter, els resultats mantenen la mateixa relació d'ordre només si aquest últim nombre és positiu.

És important conèixer la influència que exerceixen les operacions en l'ordre dels nombres enters. En altres paraules, donats dos nombres enters qualssevol, com influeix l'operació (suma, resta, multiplicació o divisió) amb un altre nombre en la seva ordenació?

Si se suma (o es resta) un mateix nombre a dos més, els resultats conserven el mateix ordre que tenien aquests dos nombres. Per exemple, evidentment $-4 < 8$. Si se suma +3 a ambdós nombres, els resultats mantenen el mateix ordre:

$$-4 < 8.$$

sumant 3 a banda i banda de la desigualtat

	-4 **+ 3**	8 **+ 3**
resulta	$-1 < 11.$	

per la qual cosa es manté la desigualtat.

Així, doncs, els resultats mantenen el mateix ordre que els nombres inicials.

De la mateixa manera, en restar un mateix nombre a dos nombres, els resultats conserven el mateix ordre que tenien aquests dos nombres. Per exemple:

$$-4 < 8.$$

restant 4 a banda i banda de la desigualtat

$$-4 - \mathbf{4} \qquad 8 - \mathbf{4}.$$

resulta $-8 < 4.$

amb la qual cosa es manté la desigualtat.

En general, se sol dir que en sumar o restar un mateix nombre als dos costats d'una desigualtat, la desigualtat es manté. També es pot dir que la suma i la resta mantenen l'ordre dels enters.

En canvi, quan es multipliquen o es divideixen ambdós costats d'una desigualtat per un mateix nombre, no sempre passa el mateix. Si es multiplica, per exemple, +3, a banda i banda d'aquesta desigualtat:

$$-5 < 3$$

els resultats són $-5 \cdot 3 \qquad 3 \cdot 3.$

és a dir $-15 < 9.$

l'ordre de resultat segueix essent el mateix. En canvi, si es multiplica per un nombre negatiu, per exemple, el –4

$$-5 < 3$$

els resultats són $-5 \cdot (-4) \qquad 3 \cdot (-4)$

és a dir $20 > -12.$

en aquest cas, l'ordre és exactament el contrari, com es pot observar, ja que s'ha canviat el signe < pel signe >.

D'aquesta manera, es pot afirmar que:

- els resultats mantenen el mateix ordre si el nombre pel qual es multipliquen és positiu;
- els resultats tenen un ordre contrari si el nombre pel qual es multipliquen és negatiu.

Altres exemples podrien ser:

$$-9 < -3$$

si es multipliquen ambdós nombres per +5,

$$-9 \cdot 5 \qquad -3 \cdot 5$$

s'obté $-35 < -15;$

en canvi, si es multipliquen ambdós nombres per –2,

$$-9 \cdot (-2) \qquad -3 \cdot (-2)$$

s'obté $18 > 6$

tal com s'esperava.

De manera semblant, sabem que,

$$4 > -3$$

si es multipliquen ambdós nombres per +3,

$$4 \cdot (+3) \qquad -3 \cdot (+3)$$

s'obté $12 > -9,$

tal com s'esperava. En canvi, si es multipliquen ambdós nombres per –5

$$4 \cdot (-5) \qquad -3 \cdot (-5)$$

s'obté $-20 < 15,$

tal com afirma la regla.

En el cas de la divisió, les regles s'apliquen de la mateixa manera que amb la multiplicació. Per exemple:

$$-15 < 30$$

si es divideixen ambdós costats entre 5,

$$-15 : 5 \qquad 30 : 5$$

s'obté $-3 < 6$;

en canvi,

$$-36 < -30$$

Si es divideixen ambdós costats entre –2,

$$-36 : (-2) \qquad -30 : (-2)$$

s'obté $18 > 15$,

com es podia preveure.