

CIM–Curs d'Introducció a les Matemàtiques
Bloc 5
Guies i suggeriment de feina
S & H 4.1, 4.2, 4.5, 4.6, 4.7.

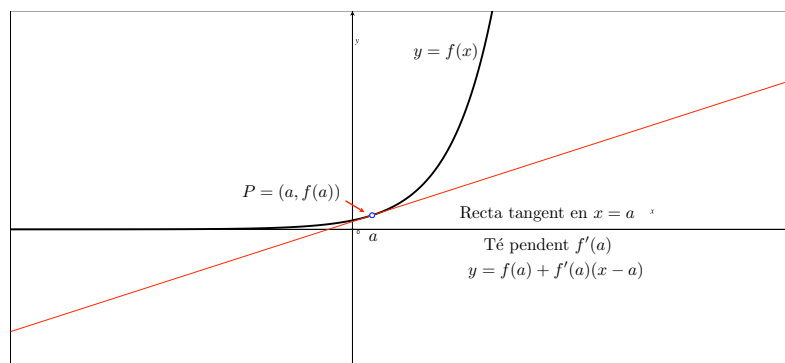
Índex

1. Derivada(I)
 - Recta tangent i derivada
 - Funció derivada i notacions
 - Regles de derivació

Recta tangent

Recordem que la derivada de la funció $f(x)$ en el punt $(a, f(a))$ (escrita $f'(a)$), és el pendent de la recta tangent a $f(x)$ en el punt $x = a$. Així doncs, l'equació de la recta tangent en el punt $P = (a, f(a))$ serà

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (1)$$



La funció derivada i les derivades successives

Donada la funció $f(x)$, es pot considerar la funció $f'(x)$, que calcula en cada punt $x = a$ el valor de $f'(a)$ (sempre que existeixi). De la mateixa manera, es pot considerar $f''(x)$, que calcula la derivada de la derivada, és a dir $f''(x) = (f')'(x)$. També podem calcular la derivada tercera, que és la derivada de la derivada segona, és a dir $f'''(x) = (f'')'(x)$.

Notació

Les funcions derivada i les derivades successives es poden denotar de moltes maneres, per exemple

Funció	Derivada	Derivada en $x = a$	Segona derivada
$y = f(x)$	$y' = f'(x)$	$y'(a) = f'(a)$	$y'' = f''(x)$
$y = f(x)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$	$\frac{dy}{dx}(a) = \frac{df}{dx}(a)$	$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2}$
$y = f(x)$	$\frac{d}{dx}f(x)$	$\frac{d}{dx}f(a)$	$\frac{d^2}{dx^2}f(x)$
$x(t)$ (pàg. 107)	$\dot{x}(t)$	$\dot{x}(a)$	$\ddot{x}(t)$

Per a derivades d'ordre superior escriurem per exemple $\frac{d^{(n)}}{dx^n}$ o $f^{(n)}(x)$.

Ús de les notacions

Així doncs

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

denota la derivada de la funció $f(x)$.

En cas que la variable independent no sigui la x entendrem que es deriva respecte la variable indicada; així, si $P(t) = t^2$, tindrem que $P'(t) = 2t$ (derivo respecte la t).

Si pot haver confusió, podem indicar la variable respecte la que es deriva amb la notació $\frac{df}{dx}$; així, per exemple

$$P = t^2 + 3x \Rightarrow \frac{dP}{dx} = 3 \text{ ja que } t \text{ és considera constant.}$$

$$P = t^2 + 3x \Rightarrow \frac{dP}{dt} = 2t \text{ ja que ara és } x \text{ qui es considera constant.}$$

Regles bàsiques de derivació

1. (D'una constant) Si $f(x) = A \in \mathbb{R}$ aleshores $f'(x) = 0$.
2. (Constant additiva) Si $y = A + f(x)$, aleshores $y' = f'(x)$.
3. (Constant multiplicativa) Si $y = Af(x)$, aleshores $y' = Af'(x)$ (les constants multiplicatives es conserven en derivar).
4. (Potència): Si $f(x) = x^n$, aleshores $f'(x) = nx^{n-1}$ ($n \in \mathbb{R}$).
5. (Suma) Si $F(x) = f(x) + g(x)$, aleshores $F'(x) = f'(x) + g'(x)$.
6. (Producte) $F(x) = f(x)g(x)$, aleshores

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

7. (Quocient) Si $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, aleshores

$$F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Altres derivades freqüents

1. Si $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ aleshores $f'(x) = (1/2)x^{-(1/2)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
2. Si $f(x) = e^x$ aleshores $f'(x) = e^x$.
3. Si $f(x) = \ln(x)$, aleshores $f'(x) = \frac{1}{x}$.
4. Si $f(x) = a^x$ aleshores $f'(x) = a^x \ln(a)$ (si $a > 0$).
5. Si $f(x) = \log_a(x)$, aleshores $f'(x) = \frac{1}{\ln(a)} \frac{1}{x}$.

Exercicis

Calculeu les següents derivades

1. Si $f(x) = x^2 + 3x + 6$, aleshores $f'(x) = \dots$
2. Si $f(x) = \sqrt[3]{x}$, aleshores $f'(x) = \dots$
3. Si $P(t) = e^t + t^{-4} + t^7$, aleshores $\frac{d}{dt}P = \dots$
4. Si $f(x) = x^3 + 45x^2 - 1$, aleshores $\frac{d}{dx}f = \dots$
5. $\frac{d}{dp}(x^2 + e^p)$.
6. $\frac{d}{dx}(x^2 + e^p)$.
7. $\frac{d^2}{dx^2}(e^x + x^3)$.
8. La recta tangent a $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 4$ és \dots . Representeu gràficament $f(x)$ i la recta tangent en el punt $x = 4$.

Exercicis II

Calculeu les següents derivades

1. Si $f(x) = \frac{e^x}{x^2+4}$, aleshores $f'(x) = \dots$
2. Si $f(x) = \sqrt[3]{x} * \ln(x)$, aleshores $f'(x) = \dots$
3. $\frac{d}{dp}\left(\frac{x^2+e^p}{p^2}\right)$.
4. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+e^p}{p^2}\right)$.
5. $\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{x^2+e^p}{p^2}\right)$.
6. $\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x^2+e^p}{p^2}\right)$.