CIM–Curs d'Introducció a les Matemàtiques Bloc 1 Guies i suggeriment de feina S&H, Capítol 5, Apèndix A.

Professors: Angel Gil (coord.), Joan Miralles, Pelegrí Viader, Ramon Villanova

Referències

La referència bàsica és el mateix llibre que usarem durant el curs regular: S&H=Sydsaeter&Hammond "Matemáticas para el Análisis Económico". Ed. Prentide&Hall

Índex

Prioritats i la importància dels parèntesi

1. Quan hem de fer diferents operacions, els parèntesis indiquen la prioritat:
   - $(2*4)+3=8+3=11$
   - $2*(4+3)=2*7=14$
2. Si no escrivim tot els parèntesis, cal seguir el següent ordre per avaluar una expressió:
   - Potències i arrels - Productes i quocients - Sumes i restes
   - $9-7+5+2-6+8-3=8$
   - $3*2-5=1$ mentre que $3*(2-5)=3*(-3)=-9$
   - $10:2+3*5+4=5+15+4=24$ mentre que $10:(2+3)*3+4=2*3+4=10.$
   - $2*3^2=2*9=18$ mentre que $(2*3)^2=36$

Escrivim : i / per a quocients i $*$ o $\cdot$ per el producte.

Exemples

1. Quant val "el doble de la suma de 7 i 9 menys la meitat de 3, més 4"? Escriu les operacions que cal realitzar amb els parèntesis que calguin.
2. $6 * 3/2 + 3 * 2 + 5$
3. $6 + 6/2 + 4$
4. $(6 + 6)/2 + 4$
5. $(-3) * 4 + 3 * (2/6) + 4^2$
6. $(-3) * 4 + 3 * (2/6 + 4)^2$
7. $-3 \cdot (4/2 + 3) + 2$
8. $-3 \cdot 4/2 + 3 \cdot 2$
9. $a + (a - 8) - 2a + (4 - 6) - (2 + 3)$

Exercicis

1. Les següents expressions es poden interpretar de diferents formes; escriviu els parèntesis que calguin per evitar les ambigüitats (penseu que pot haver diferents formes de col·locar els parèntesi i que trobareu valors diferents).
   - $2 \cdot -3 + 4 : -2 + 3$.
   - $-2 \cdot -3 - 1 \cdot -2$
   - $A * -B - B + A$
2. Són correctes les següents igualtats?
   - $(-a) * (-b) = a * b$
   - $(-a) * b = a * (-b)$
   - $a * (-b) = -(a * b)$
3. Corregiu els errors de $x - 3 + 4 + 4 = x - 7 + 4 = x - 11$

Operacions amb fraccions

Recordem que, sempre que els denominadors siguin diferents de 0,

1. Igualtat: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $ad = bc$.
2. (fraccions equivalents) $\frac{a}{b} = \frac{Ka}{Kb}$
3. (producte de fraccions) $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a*c}{b*d}$
4. (quocient de fraccions) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$
5. (suma de fraccions d'igual denominador) $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$
6. (suma de fraccions) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} = \frac{ad+cb}{bd}$ (o bé usant el mínim comú múltiple dels denominadors)
7. (ordre de les fraccions) $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si i només si $ad < bc$
8. L'expressió "set octaus de 14" equival a multiplicar $\frac{7}{8} * 14$.

Exercicis

1. $\frac{2}{10}$ es equivalent a $\frac{1}{5}$?
2. Calculeu $\frac{2}{5} + \frac{3}{5}$, $\frac{2}{5} - \frac{3}{5}$.
3. Calculeu $\frac{2}{6} + \frac{3}{5}$, $\frac{2}{8} - \frac{3}{5}$.
4. Calculeu $\frac{2}{6} + \frac{3}{10}$, $\frac{2}{8} - \frac{3}{20}$.
5. Calculeu $\frac{2}{6} * \frac{3}{10}$, $\frac{2}{8} * \left(-\frac{3}{20}\right)$.
6. Calculeu $\frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{10}}$, $\frac{\frac{2}{8}}{-\frac{3}{20}}$.
7. Simplifiqueu $\frac{1}{\frac{x}{x+y}}$, $\frac{\frac{x}{2x+2y}}{\frac{2}{x}}$.
8. És cert que $\frac{2}{3} < \frac{1}{4}$?
9. Quan $\frac{a}{3} < \frac{2}{5}$?

Exercicis II

1. Té sentit $\frac{0}{5}$? i $\frac{10}{0}$? Quin dels dos té un valor numèric.
2. Calculeu $\frac{\frac{3}{4}}{2}$
3. Simplifiqueu $\frac{3}{a}+\frac{b}{a}$, $\frac{2}{ab}-\frac{b}{ab}$.
4. Simplifiqueu $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}$, $\frac{2b}{c}-\frac{c}{b}$.
5. Simplifiqueu $\frac{2}{abc}+\frac{3a}{bc}$, $\frac{b}{ac}-\frac{a}{bc}$.
6. Simplifiqueu $\frac{a}{bc}*\frac{c}{4a}$, $\frac{2a}{KL}*\left(-\frac{L}{K}\right)$.
7. Simplifiqueu $\frac{\frac{2L}{RT}}{\frac{R}{T}}$, $\frac{\frac{KM}{LP}}{-\frac{LK}{PM}}$.
8. És cert que $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$?
9. És cert que $\frac{P}{S}=\frac{P+K}{S+K}$?
10. És cert que $\frac{P}{S}=\frac{P+P}{S+S}$?

Decimals i fraccions

Recordem que qualsevol nombre decimal es pot escriure com una fracció. Si ens limitem als que tenen un nombre finit de decimals podem veure com, per exemple

$$4.345=\frac{4345}{1000}, 0.0023=\frac{23}{10000}$$

Observeu que usem el punt com a separador decimal per no confondre'l amb la coma gramatical. D'aquesta forma podem fer alguns productes i divisions:

$$23*0.01=23*\frac{1}{100}=\frac{23}{100}=0.23$$

i

$$\frac{23}{0.01}=\frac{23}{\frac{1}{100}}=23*100=2300$$

Exercicis

Calculeu

1. $456 * 0.001$
2. $456 : 0.001$
3. $456 * 0.002$
4. $456 : 0.002$

Els quadrats

Recordem que a^2 denota el producte de a per a, és a dir

$$a^2 = a * a$$

Geomètricament

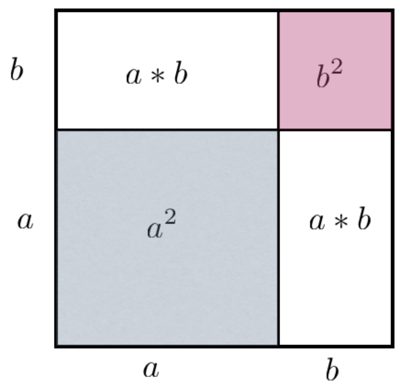
1. a^2 es l'àrea d'un quadrat de base a
2. $a * b$ es el àrea d'un rectangle de costats a i b.

Si en comptes de tenir exponent 2 tenim altre exponent natural,

$$a^k = \underbrace{a * \cdots * a}_{k}$$

El quadrat $(a+b)^2$

Recordem que $(a+b)^2$ es l'àrea del quadrat de costat $a+b$, i que, tal i como es veu en el següent gràfic,



es té que

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

La propietat distributiva i el factor comú

Si ens trobem el producte de un nombre per una suma (o diferència) podem aplicar la propietat distributiva, segons la que

$$a*(b+c) = a*b + a*c$$

Mirant aquesta propietat de dreta a esquerra tenim el que es coneix com a factor comú

$$a*b + a*c = a*(b+c)$$

que també es pot aplicar quan b o c són 1, per exemple

$$a + a*c = a*1 + a*c = a*(1+c)$$

Exemples

1. $2(a+3)+b-2a+6-3(b-a)+a+b-2a.$
2. Apliqueu la propietat distributiva a
   - $6(9+2d)$, $6(4+b)$, $a(3c+d)$, $(a+b)(2a+c)$, $(a+b)(a-b)$.
3. Traieu tots els factors possibles en
   - $2a+ka+a$
   - $a-b+3b+ab$
   - $ab-bc-ac-ab$
   - $ak+k^2$
   - $ak+k$
   - $a\sigma+\sigma^2$
   - $at+tsa^2$
4. Per quant hem de multiplicar $tx+1+\frac{k^3t^2x}{2}$ per a obtenir $\frac{t}{k}x^2+\frac{x}{k}+\frac{k^2t^2x^2}{2}$.

El quadrat d'una suma

De vegades resulta problemàtic el càlcul de $(a+b)^2$; usant la propietat distributiva podem obtenir fàcilment que

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)*(a+b) = a*(a+b)+b*(a+b)\\ &= a*a+a*b+b*a+b*b = a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

Es important recordar que

$$(a+b)^2 \neq a^2+b^2$$

com es pot veure geomètricament, ja que a^2+b^2 és només la suma de les àrees dels quadrats de costats a i b.

Exercicis

1. $(2+3)^2 - 2^2 - 3^2$
2. $(a+b)^2 - a^2 - b^2$
3. $(2+a)^2$
4. $(3b+a)^2$
5. $(ab+a)^2$
6. $(a-b)^2$
7. $(a+b+c)^2$
8. $(a+b)^3$
9. Demostreu que
   9.1 $(X+O)^2 = X^2 + 2XO + O^2$
   9.2 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
   9.3 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
10. $(a+2b)^2$
11. $(a-cb)^2$.
12. Escriu en forma de producte $a^2 - 4b^2$ i $a^2 - 2b^2$.

L'arrel quadrada

Recordem que si $x \geq 0$, aleshores

$$\sqrt{x}$$

és aquell nombre no negatiu tal que

$$\sqrt{x} * \sqrt{x} = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$$

Així doncs tenim que

$$\sqrt{x} \geq 0 \quad \text{i} \quad \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$$

Propietats de l'arrel quadrada

L'arrel quadrada

1. Es comporta bé amb els productes: $\sqrt{a*b} = \sqrt{a} * \sqrt{b}$ $(\sqrt{8*2} = \sqrt{8} * \sqrt{2})$.
2. Es poden simplificar amb les potències parells ja que $\sqrt{x^{2n}} = x^n$ (per exemple $\sqrt{2^4} = 2^2$)
3. Se comporten malament amb les sumes ja que normalment $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (per exemple $\sqrt{8+1} \neq \sqrt{9} + \sqrt{1}$).

Exercicis

1. Calculeu $\sqrt{16}, \sqrt{25}, \sqrt{144}$
2. Simplifiqueu al màxim $\sqrt{2^2 * 3^6 * 4^3}$
3. Simplifiqueu al Màxim $\sqrt{L^2 * (CL)^6 * 8^2}$
4. Simplifiqueu al màxim $\sqrt{\frac{L^2}{(KL)^6} * 8^2}$

Funcions Potencials

Les funcions de la forma $f(x) = x^n$ on n es un nombre enter s'anomenen funcions potencials. Per a repassar-les cal recordar les propietats dels exponents:

1. $x^n = \underbrace{x * \cdots * x}_{n}$
2. $x^n * x^k = x^{n+k}$
3. $\frac{x^n}{x^k} = x^{n-k}$
4. $x^{-k} = \frac{1}{x^k}$ y $\frac{1}{x^{-k}} = x^k$.
5. (potència d'una fracció) $\left(\frac{a}{b}\right)^K = \frac{a^K}{b^K}$
6. Potència d'una potència $\left(x^K\right)^L = x^{KL}$.

Exemples

Calculeu

1. $2^2, 2^3, 2^4, 2^5$
2. Simplifiqueu les potències al màxim en $2^3 * 6^4$,
3. Simplifiqueu les potències al màxim en $2^3 + 6^4$
4. Simplifiqueu les potències al màxim en $a^3 * 6(ab)^4$,
5. Simplifiqueu les potències al màxim en $a^3 + (ab)^4$
6. $\frac{2^3}{6^2}$
7. $\frac{(ac)^3}{(ab)^2}$

Exercicis

1. Simplifiqueu $\frac{2^3 \cdot 3 \cdot 5^2}{2 \cdot 3^2 \cdot 5}$
2. Simplifiqueu $\frac{2^3 \cdot 5^2 + 2^2 \cdot 15}{20}$
3. Simplifiqueu $x^7 x^3$, $\frac{x^7}{x^3}$, $\frac{x^{-3}}{x^7}$, $\frac{1}{\frac{1}{x^{-23}}}$.
4. Simplifiqueu $\left(x^2\right)^3$, $\left(x^k\right)^L$

Les arrels són potències fraccionaries

ja que

$$\sqrt[K]{x^L} = x^{\frac{L}{K}}$$

Per exemple

1. $\sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}$
2. $\sqrt[4]{x^2} = x^{\frac{2}{4}} = x^{\frac{1}{2}}$
3. $\sqrt[5]{x^{-3}} = x^{\frac{-3}{5}}$
4. $\sqrt{x * y} = (x * y)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$
5. Per aïllar podem elevar els dos membres per la fracció inversa:

$$\sqrt[4]{x^5} = 2 \Rightarrow x^{\frac{5}{4}} = 2 \Rightarrow \left(x^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{4}{5}} = 2^{\frac{4}{5}} \Rightarrow x = 2^{\frac{4}{5}}$$

Simplificació d' arrels

Moltes vegades podem simplificar arrels factoritzant el radicand i després aplicant les propietats de les funcions potencials (ens ajudarà escriure les potencies i les arrels como a exponents):

- $\sqrt{20} = \sqrt{2^2 * 5} = \sqrt{2^2} * 5 = 2 * 5$

Exercicis I

1. Calculeu $(0.1)^4$
2. Calculeu $(0.9)^{-2}$
3. Calculeu $\left(\frac{2}{3}\right)^4$
4. Calculeu $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^3$
5. Calculeu $\left(\frac{5}{3}\right)^6 \left(\frac{5}{3}\right)^{-3}$
6. Calculeu $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$
7. Calculeu $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \left(\frac{2}{3}\right)^3$
8. Calculeu $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\right)^4$
9. Simplifiqueu $\frac{\sqrt{x}}{x^2}$.
10. Simplifiqueu $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$.

Exercicis II

1. Simplifiqueu $\frac{x^{200}}{y^4 x^{200}}$
2. Simplifiqueu $\frac{x^{100}}{x^{-2}}$
3. Simplifiqueu $\frac{x^2 y^3 z^9}{\sqrt{x^3 y^2}}$
4. Simplifiqueu $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$
5. Simplifiqueu $\frac{x^L y^k x^M}{\sqrt{x^{3M}}}$
6. Resoleu $\sqrt[4]{x^3} = 2$
7. Resoleu $\sqrt[3]{x^4} = 2.$