# DERIVADES

## 1.1 Introducció

### 1.1.1 Variació d'una funció en un interval

*Definició*

Donada una funció $y = f(x)$ definida en l'interval $[x_1, x_2]$, es defineix la variació mitjana de la funció en l'interval com a:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad .$$

Com que el denominador és sempre positiu, el signe de la variació depèn del numerador.

Aquest quocient rep el nom de quocient incremental i s'expressa amb la notació $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ i ens indica quan varia la funció segons la variació de la variable independent.

*Exemple*

Sigui la funció $f(x) = -x^2 + 6x - 8$. La seva variació mitjana en l'interval $[0, 2]$ és:

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{8}{2} = 4 \quad .$$

En l'interval $[2, 4]$ aquesta variació val:

$$\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = 0 \quad .$$

Això vol dir que en l'interval $[0, 2]$, la variació mitjana de la funció és quatre vegades la variació de la variable independent, i en l'interval $[2, 4]$ no hi ha variació mitjana, malgrat que la funció no és constant en aquest interval.

*Exercicis*

1) Comproveu que la variació mitjana de la funció $f(x) = 2x + 5$ és sempre la mateixa, independentment de l'interval considerat.

2) Calculeu la variació mitjana de $f(x) = -x^2 + 4x$ en l'interval $[2.9, 3.1]$.

3) Calculeu la variació mitjana de $f(x) = 15$ en un interval qualselvol $[x_1, x_2]$.

### 1.1.2 Derivada d'una funció en un punt

*Definició*

Donada la funció $y = f(x)$, anomenem derivada de la funció en el punt d'abscissa $x = x_0$ el valor que resulta de calcular el límit següent:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad .$$

Si fem $x - x_0 = h$, resulta $x = x_0 + h$ i podem expressar:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad .$$

Com veiem, la derivada és el límit de la variació de la funció en l'interval $[x_0 - h, x_0]$ si $h < 0$ o $[x_0, x_0 + h]$ si $h > 0$.

La derivada és una mesura de la rapidesa amb què canvia la funció al voltant de $x = x_0$. En altres paraules, la podríem definir com la variació *instantània* de la funció al punt $x_0$.

*Exemple*

Calculem la derivada de la funció $f(x) = x^2$ al punt $x_0$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0 h + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x_0 h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2x_0 + h = 2x_0 \quad .$$

*Exercicis*

4) Apliqueu la definició de derivada per calcular $f'(8)$, essent $f(x) = \sqrt{x}$.

5) Apliqueu la definició de derivada per calcular $f'(2)$, essent $f(x) = \frac{1}{x}$. Què passa a $x = 0$?

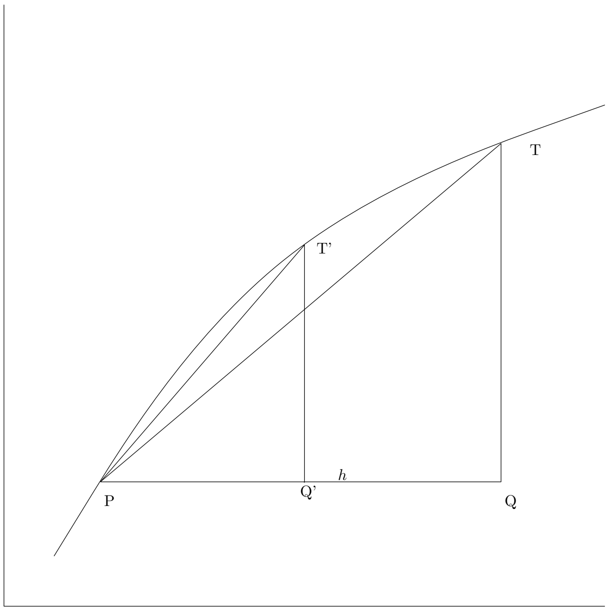
6) Apliqueu la definició de derivada per calcular $f'(x_0)$, essent $f(x) = x^3$.

### 1.1.3 Interpretació geomètrica

Donada la funció $y = f(x)$, derivable a $x_0$, considerem un petit increment $h$ de la variable independent. El quocient:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

és la tangent de l'angle $\alpha$ del triangle PQT de la figura següent:




A mesura que l'increment $h$ es fa més petit, la recta secant de la figura tendeix a la recta tangent de la gràfica en el punt indicat i, per tant, la tangent de l'angle $\alpha$ tendirà cap al pendent d'aquesta recta tangent.

*Exemples*

1) Trobem la derivada de $f(x) = x^2$ en el punt d'abscissa 3. I calculem l'equació de la recta tangent en aquest punt.

   Tenim que $f(3) = 9$ i la derivada serà:

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2-9}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{9+h^2+6h-9}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+6h}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} (h+6) = 6 \quad .$$

   Per tant, el pendent de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = x^2$ en el punt $(3, 9)$ val $f'(3) = 6$ i l'equació d'aquesta recta tangent és $y - 9 = 6(x - 3)$, o, en la seva forma explícita, $y = 6x - 9$.

2) Una funció pot estar definida en un punt i tenir límit en aquest punt i en canvi no tenir derivada.

   Si considerem la funció $f(x) = |x|$, observem que, per definició de valor absolut, si $x > 0$, llavors $|x| = x$ ; i si $x < 0$, llavors $|x| = -x$.

Per tant, hem de trobar les que s'anomenen *derivades laterals* en la forma següent:

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

Per tant, si calculem aquest límit acostant-nos a 0 per la seva dreta, aquest val 1.

De manera semblant:

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Si ens acostem a 0 per la seva esquerra, el límit és igual a $-1$. Són, per tant, diferents, i per tant direm que la funció $f(x) = |x|$ no té derivada al punt $x = 0$, tot i que sí que té derivades laterals en aquest punt.

### 1.1.4 Funció derivada

Si una funció $f(x)$ és derivable en tots els punts $x$ del seu domini, és possible definir una nova funció que associï cada punt $x$ del seu domini amb el valor $f'(x)$ de la derivada de la funció en aquest punt. Obtenim d'aquesta manera una nova funció que rep el nom de funció derivada i que simbolitzem emb $f'$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,.$$

*Exemple*

La funció derivada de $f(x) = 2x^2 - 5x + 6$ és $f'(x) = 4x - 5$, ja que:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(2(x+h)^2 - 5(x+h) + 6) - (2x^2 - 5x + 6)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(2(x+h)^2 - 5(x+h) + 6) - (2x^2 - 5x + 6)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{4xh + 4h^2 - 5h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4xh + 4h^2 - 5h}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} (4x + 4h - 5) = 4x - 5\,.$$