Equacions de 2n. Grau i Biquadrades

1.1 Equacions de 2n grau

Definició:

Una equació de 2n grau és una igualtat de la forma $P(x) = 0$ on $P(x)$ és un polinomi de segon grau. La forma general de l'equació de segon grau és

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

amb $a \neq 0$.

Les equacions de segon grau poden tenir 0, 1 ó 2 solucions.

Per a resoldre-les es pot fer de diverses formes depenent dels coeficients del polinomi. Anem a estudiar aquests casos.

1.1.1 Cas $b = 0$

L'equació queda de la forma $a\,x^2 + c = 0$

Per resoldre-la n´hi ha prou amb aïllar la x i ens queda $x^2 = -\frac{c}{a}$. Si $-\frac{c}{a} < 0$ l'equació no té solució, en cas contrari té dues solucions que són

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ i } x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

.

1.1.2 Cas $c = 0$

L'equació queda de la forma $a\,x^2 + b\,x = 0$ Traïem factor comú x i queda $x\,(a\,x + b) = 0$, per tant queden dues solucions

$$x = 0 \text{ i } x = -\frac{b}{a}$$

.

1.1.3 Cas $b \neq 0$ i $c \neq 0$

L'equació té com a expressió la seva forma general $a\,x^2 + b\,x + c = 0$solucions de la forma:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

A l'expressió de dins del radical, $b^2 - 4\,a\,c$, se l'anomena discriminant. Depenguen del signe del discriminant tenim els casos següents:

1) Si $0 < b^2 - 4\,a\,c$, llavors hi han dues solucions diferents.

2) Si $b^2 - 4\,a\,c = 0$, llavors hi ha dues solucions iguals, és a dir, una solució doble.

3) Si $b^2 - 4\,a\,c < 0$ l'equació no té solució.

Exercicis:

1) Resoleu les següents equacions:

a) $x^2 - 6\sqrt{2}\,x + 18 = 0$

b) $2\,x^2 - 7\,x + 3 = 0$

c) $x^2 - 6\,x + 9 = 0$

d) $x^2 - x + 1 = 0$

e) $3\,x^2 = 0$

f) $9\,x^2 - 25 = 0$

g) $x^2 - 2\,x = 0$

h) $(2\,x + 1)\,(x + 5) = 2$

i) $(x - \sqrt{3})^2 - 1 + x = x$

j) $1 + (x - 2)^2 = 1$

k) $(x + 1)^2 = 2$

2) Calculeu el valor del discriminant de les equacions següents i indiqueu el nombre de solucions de cadascuna.

a) $2\,x^2 - 3\,x + 1 = 0$

b) $3\,x^2 - x + 1 = 0$

c) $3\,x^2 + 2\sqrt{3}\,x + 1 = 0$

d) $x^2 + x - 1 = 0$

1.1.4 Suma i producte de les arrels

La suma de les arrels d'una equació de 2n grau cumpleixen que

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

El producte de les arrels d'una equació de 2n grau cumpleixen que

$$x_1\, x_2 = \frac{c}{a}$$

on x_1i $x_2$són les solucions i a, b i c són els coeficients de l'equació de 2n grau $a\, x^2 + b\, x + c = 0$.

Si $a = 1$ podem escriure l'equació de la següent forma $x^2 - s\, x + p = 0$ on $s = x_1 + x_2$ i $p = x_1\, x_2$.

Exemple:

Anem a escriure una equació de 2n grau que té com a solucions els nombres $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{3}$.

$$s = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} \quad \text{i} \quad p = \frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

llavors l'equació queda

$$x^2 - \frac{7\, x}{6} + \frac{1}{3} = 0$$

o bé multiplicant-la per 6

$$6\, x^2 - 7\, x + 2 = 0$$

.

1.2 Equacions biquadrades

Definició:

S'anomenen equacions biquadrades les equacions del tipus

$$a\, x^4 + b\, x^2 + c = 0$$

.

Per resoldre-les s'intenta transformar-les en una equació de 2n grau. Ja que els exponents de la incògnita són parells, poden fer el canvi de variable

$t = x^2$, així l'equació quedarà $a\, t^2 + b\, t + c = 0$, que ja és una equació de 2n grau.

Per tant podem resoldre l'equació en t i un cop trobada tindrem que

$$x_1 = \sqrt{t} \quad \text{i} \quad x_2 = -\sqrt{t}$$

Una equació biquadrada pot tenir 0, 2 ó 4 solucions.

Exemple:

Resolem l'equació $3\, x^4 + x^2 - 4 = 0$

Si fem $x^2 = t$llavors queda $3\, t^2 + t - 4 = 0$, les solucions d'aquesta equació són $t_1 = 1$i $t_2 = -\frac{4}{3}$.

Amb aquests dos valors anem a trobar la x.

Si $t = 1$ llavors $x^2 = 1$, per tant $x_1 = 1$i $x_2 = -1$.

Si $t = -\frac{4}{3}$llavors $x^2 = -\frac{4}{3}$, cosa que no pot ser.

Les úniques solucions seran $x_1 = 1$i $x_2 = -1$.

Podem generalitzar i considerar equacions del tipus

$$a\,x^{(2\,n)} + b\,x^n + c = 0$$

que es poden resoldre aplicant els mateixos mètodes.

Exercicis:

3) Resoleu les equacions següents:

a) $x^4 - x^2 - 6 = 0$

b) $x^4 - 3\,x^2 + 2 = 0$

c) $x^4 - 11\,x^2 + 18 = 0$

d) $3\,x^4 - 12\,x^2 + 9 = 0$

e) $-2\,x^4 + 12\,x^2 - 16 = 0$

f) $-x^4 - 4\,x^2 - 45 = 0$

g) $x^6 - 5\,x^3 + 6 = 0$