# Matemàtiques 1
# Curs 2009-2010/1
## Grup M1 - Professora: Núria Parés

### Tercer examen parcial. 12.00h. 21/12/2009

[10 punts] **TEORIA 1:** Donada una corba en el pla definida per l'equació $y = f(x)$, la longitud d'aquesta corba des de $x = a$ fins a $x = b$ ve donada per $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$.
Demostreu que la longitud d'un quart de circumferència de radi $r$ és $\pi r/2$.
*AJUDA: feu el canvi* $x = r\sin(u)$ *en la integral i utilitzeu que* $\arcsin(0) = 0$ *i* $\arcsin(1) = \pi/2$.

[10 punts] **TEORIA 2:** Demostreu que si $f$ és una funció derivable tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x)e^{-sx} = 0$, llavors

$$\int_0^{+\infty} f'(x)e^{-sx}dx = s\int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}dx - f(0).$$

*AJUDA: utilitzeu la definició d'integral impròpia i la regla d'integració per parts.*

**1.** `[20 punts]` Constesteu a les següents preguntes:

(a) `[10 punts]` Calculeu el rang i el determinant de la següent matriu.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

rang d'$A$:

determinant d'$A$:

(b) `[7 punts]` Classifiqueu el següent sistema d'equacions segons els valors dels paràmetres $b$ i $c \in \mathbb{R}$:

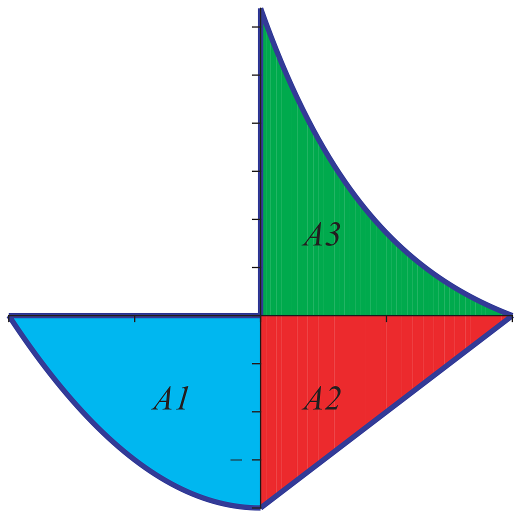
$$\begin{cases} s + t = 1 \\ bx + y = 1 \\ bs = c \\ bz + t = 1 \end{cases}$$

resultat:

(c) `[3 punts]` Trobeu les solucions del sistema anterior pels paràmetres $b = 0$ i $c = 1$

resultat:

**2.** `[20 punts]` Calculeu l'àrea que delimiten les següents corbes (vegeu la figura): $y = e^{2-x} - 1$, $y = 2x - 4$, $y = x^2 - 4$ i els eixos.




resultats:

$A_1 =$ [6pts]

$A_2 =$ [6pts]

$A_3 =$ [6pts]

$A_{TOTAL} =$ [2pts]

**3.** `[40 punts]` Feu els següents càlculs. Poseu el resultat en el rectangle corresponent.

(a) $I_1 = \displaystyle\int \tan^2 x dx =$

(b) $I_2 = \displaystyle\int \ln^2 x dx =$

(c) $I_3 = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}} dx =$

(d) $I_4 = \displaystyle\int \frac{1}{1 + 3\cos^2 x} dx =$

(e) $I_5 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x - 1}{1 + x^2} dx =$

(f) $I_6 = \displaystyle\int_0^1 4e^{-2x} dx =$

*AJUDES:*

*(a) considereu el canvi* $u = \tan x$ *i noteu que* $\frac{u^2}{u^2+1} = 1 - \frac{1}{u^2+1}$

*(b) apliqueu dues vegades integració per parts* *(c) Quasi-immediata*

*(d) considereu el canvi* $t = \tan x$ *i tingueu en compte que* $\cos(\arctan(t)) = 1/\sqrt{t^2 + 1}$

*(e) recordeu que* $\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \pi/2$

# Matemàtiques 1
# Curs 2009-2010/1
## Grup M1 - Professora: Núria Parés

## Tercer examen parcial. 12.00h. 21/12/2009

`[10 punts]` **TEORIA 1:** Donada una corba en el pla definida per l'equació $y = f(x)$, la longitud d'aquesta corba des de $x = a$ fins a $x = b$ ve donada per $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$. Demostreu que la longitud d'un quart de circumferència de radi $r$ és $\pi r/2$.
*AJUDA: feu el canvi* $x = r\sin(u)$ *en la integral i utilitzeu que* $\arcsin(0) = 0$ *i* $\arcsin(1) = \pi/2$.

---

L'equació que defineix la circumferència de radi $r$ i centre $(0, 0)$ en el primer quadrant és $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, ja que l'equació és $x^2 + y^2 = r^2$. Com que $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, llavors $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}}$.
Per tant, la longitud d'un quart de la circumferència ve donada per:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^r \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}dx = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{4x^2}{4(r^2 - x^2)}}dx = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}dx \\ &= \int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}dx = \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}dx = r\int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}dx. \end{aligned}$$

Fent el canvi que ens proposen $x = r\sin(u) \Longrightarrow u = \arcsin(x/r)$:

$$dx = r\cos(u)du \quad , \quad x = 0 \Longrightarrow u = \arcsin(0) = 0 \quad , \quad x = r \Longrightarrow u = \arcsin(1) = \pi/2.$$

$$\begin{aligned} L &= r\int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}dx = r\int_0^{\pi/2} \frac{r\cos(u)}{\sqrt{r^2 - r^2\sin(u)^2}}du = r\int_0^{\pi/2} \frac{r\cos(u)}{r\sqrt{1 - \sin(u)^2}}du \\ &= r\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(u)}{\sqrt{\cos(u)^2}}du = r\int_0^{\pi/2} 1du = r\,[u]_0^{\pi/2} = r\pi/2. \qquad \square \end{aligned}$$

`[10 punts]` **TEORIA 2:** Demostreu que si $f$ és una funció derivable tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x)e^{-sx} = 0$, llavors

$$\int_0^{+\infty} f'(x)e^{-sx}dx = s\int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}dx - f(0).$$

*AJUDA: utilitzeu la definició d'integral impròpia i la regla d'integració per parts.*

---

Hem de calcular una integral impròpia de primera espècie, per tant:

$$\int_0^{+\infty} f'(x)e^{-sx}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b f'(x)e^{-sx}dx.$$

Per resoldre la integral de 0 a $b$, aplicarem la regla d'integració per parts

$$\begin{aligned} \int_0^b f'(x)e^{-sx}dx &= \left[\begin{array}{ccc} u = e^{-sx} & \Longrightarrow & u' = -se^{-sx} \\ v' = f'(x) & \Longrightarrow & v = f(x) \end{array}\right] = \left[f(x)e^{-sx}\right]_0^b - \int_0^b \left[-se^{-sx}f(x)\right]dx \\ &= f(b)e^{-sb} - f(0)e^{-s0} + \int_0^b se^{-sx}f(x)dx = f(b)e^{-sb} - f(0) + s\int_0^b e^{-sx}f(x)dx \end{aligned}$$

Per tant:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f'(x)e^{-sx}dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b f'(x)e^{-sx}dx = \lim_{b\to+\infty} \left(f(b)e^{-sb} - f(0) + s\int_0^b e^{-sx}f(x)dx\right) \\ &= s\int_0^{+\infty} e^{-sx}f(x)dx - f(0) \qquad \text{ja que } \lim_{b\to+\infty} f(b)e^{-sb} = 0. \qquad \square \end{aligned}$$

**1.** `[20 punts]` Constesteu a les següents preguntes:

(a) `[10 punts]` Calculeu el rang i el determinant de la següent matriu.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

| | |
|---|---|
| rang d'$A$: | 4 |
| determinant d'$A$: | No es pot calcular el determinant perquè la matriu no és quadrada |

(b) `[7 punts]` Classifiqueu el següent sistema d'equacions segons els valors dels paràmetres $b$ i $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} s + t = 1 \\ bx + y = 1 \\ bs = c \\ bz + t = 1 \end{cases}$$

resultat:

| | | |
|---|---|---|
| $b \neq 0$ | $\Longrightarrow$ | Sist. compatible indeterminat($SCI$) |
| $b = 0, c = 0$ | $\Longrightarrow$ | Sist. compatible indeterminat($SCI$) |
| $b = 0, c \neq 0$ | $\Longrightarrow$ | Sist. incompatible($SI$) |

(c) `[3 punts]` Trobeu les solucions del sistema anterior pels paràmetres $b = 0$ i $c = 1$.

resultat: per aquests valors, el sistema és incompatible i per tant no té solucions

---

(a) Per calcular el rang de la matriu, la convertirem en $r$-esglaonada, on $r$ serà el rang. Per convertir-la en esglaonada, utilitzarem les sis transformacions elementals de fila i columna.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \underset{f_5 \leftarrow f_5 - f_2}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \underset{f_6 \leftarrow f_6 - f_3}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{f_6 \leftarrow f_6 - f_2}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{f_1 \leftrightarrow f_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{f_3 \leftrightarrow f_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{c_4 \leftrightarrow c_5}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Per tant, com que hem transformat la matriu en 4-esglaonada, el rang és 4.

En quant al determinant, la matriu és de tamany $6 \times 5$, per tant no és una matriu quadrada, i per tant, no existeix el seu determinant.

(b) Per classificar el sistema d'equacions, utilitzarem el teorema de Rouche-Frobenius que ens diu el tipus de sistema en funció del rang de la matriu i la matriu ampliada.

La matriu ampliada del sistema d'equacions és:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & s & t \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & c \\ 0 & 0 & b & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Per reduïr el nombre de transformacions elementals que farem, canviarem l'ordre de les variables i després farem transformacions elementals de fila:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} t & y & s & z & x \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 & b & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \underset{f_4 \leftarrow f_4 - f_1}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} t & y & s & z & x \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -1 & b & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \underset{f_3 \leftrightarrow f_4}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} t & y & s & z & x \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & -1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & c \end{array}\right] \end{array}$$

$$\underset{f_4 \leftrightarrow f_4 - bf_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & -1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^2 & 0 & c \end{array}\right]$$

El rang de la matriu, és 4 si $b \neq 0$ i 3 si $b = 0$.

El rang de la matriu ampliada és 4 si $b \neq 0$, i en el cas que $b = 0$, el rang és 3 si $c = 0$ o 4 si $c \neq 0$.

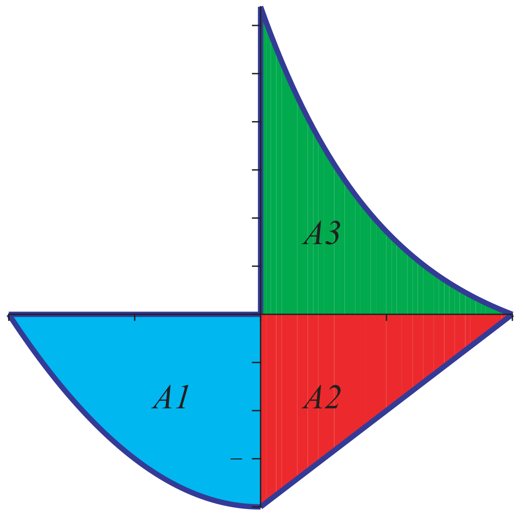
En resum:

$$\begin{cases} b \neq 0 & \Longrightarrow \ \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b) = 4 < 5 = \text{n}^{\text{o}} \text{ incògnites} \ \Longrightarrow \ \text{Sist. compatible indeterminat}(SCI) \\ b = 0, c = 0 & \Longrightarrow \ \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b) = 3 < 5 = \text{n}^{\text{o}} \text{ incògnites} \ \Longrightarrow \ \text{Sist. compatible indeterminat}(SCI) \\ b = 0, c \neq 0 & \Longrightarrow \ \operatorname{rang}(A) = 3 < 4 = \operatorname{rang}(A|b) \ \Longrightarrow \ \text{Sist. incompatible}(SI) \end{cases}$$

(c) Hem de trobar les solucions del sistema pels paràmetres $b = 0$ i $c = 1$. En l'apartat anterior, hem vist que per aquests valors, el sistema és incompatible, per tant no té solució.

Observem que això es veu fàcilment mirant la tercera equació $bs = c$, pels valors que ens donen, l'equació és $0 = 1$ que no és possible.

**2.** `[20 punts]` Calculeu l'àrea que delimiten les següents corbes (vegeu la figura): $y = e^{2-x} - 1$, $y = 2x - 4$, $y = x^2 - 4$ i els eixos.




resultats:

| | | |
|---|---|---|
| $A_1 =$ | $\dfrac{16}{3}$ | `[6pts]` |
| $A_2 =$ | $4$ | `[6pts]` |
| $A_3 =$ | $e^2 - 3$ | `[6pts]` |
| $A_{TOTAL} =$ | $\dfrac{19}{3} + e^2$ | `[2pts]` |

---

Calculem les tres àrees per separat:

$\boxed{A_1}$ L'àrea $A_1$ ve delimitada per la corba $y = x^2 - 4$. La funció $x^2 - 4$ talla l'eix OX en els punts $x = \pm 2$. A més, en l'interval $[-2, 0]$, la funció és negativa.

Per tant, l'àrea ve donada per:

$$A_1 = -\int_{-2}^{0} \left[x^2 - 4\right] dx = -\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-2}^{0} = -\left(\frac{0^3}{3} - 4 \cdot 0 - \frac{(-2)^3}{3} + 4(-2)\right) = -\left(\frac{8}{3} - 8\right) = \frac{16}{3}$$

$\boxed{A_2}$ L'àrea $A_2$ ve delimitada per la recta $y = 2x - 4$. La recta talla l'eix OX en el punt $x = 2$. A més, en l'interval $[0, 2]$, la funció és negativa.

Per tant, l'àrea ve donada per:

$$A_2 = -\int_{0}^{2} \left[2x - 4\right] dx = -\left[x^2 - 4x\right]_0^2 = -(4 - 8 - 0) = 4$$

Observem que aquesta àrea també es pot calcular com l'àrea del triangle de base 2 i alçada 4, és a dir, $A_2 = 2 \cdot 4/2 = 4$.

$\boxed{A_3}$ L'àrea $A_3$ ve delimitada per la corba $y = e^{2-x} - 1$. Anem a calcular els talls amb l'eix OX.

$$e^{2-x} - 1 = 0 \iff e^{2-x} = 1 \iff 2 - x = \ln(1) = 0 \iff x = 2.$$

Per tant, la funció només tall un cop l'eix i sempre és positiva.

L'àrea ve donada doncs per:

$$A_3 = \int_0^2 \left[e^{2-x} - 1\right] dx = \left[-e^{2-x} - x\right]_0^2 = -e^0 - 2 + e^2 + 0 = e^2 - 3.$$

$\boxed{A_{TOTAL}}$ Finalment, l'àrea total és:

$$A_{TOTAL} = \frac{16}{3} + 4 + e^2 - 3 = \frac{16 + 3}{3} + e^2 = \frac{19}{3} + e^2$$

**3.** `[40 punts]` Feu els següents càlculs. Poseu el resultat en el rectangle corresponent.

(a) $I_1 = \displaystyle\int \tan^2 x dx = \boxed{\tan x - x}$ (b) $I_2 = \displaystyle\int \ln^2 x dx = \boxed{x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x}$

(c) $I_3 = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2}} dx = \boxed{\sqrt{x^2-2}}$ (d) $I_4 = \displaystyle\int \frac{1}{1+3\cos^2 x} dx = \boxed{\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\tan x\right)}$

(e) $I_5 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x-1}{1+x^2} dx = \boxed{+\infty}$ (f) $I_6 = \displaystyle\int_0^1 4e^{-2x} dx = \boxed{2-2e^{-2}}$

*AJUDES:*

*(a) considereu el canvi* $u = \tan x$ *i noteu que* $\frac{u^2}{u^2+1} = 1 - \frac{1}{u^2+1}$

*(b) apliqueu dues vegades integració per parts* *(c) Quasi-immediata*

*(d) considereu el canvi* $t = \tan x$ *i tingueu en compte que* $\cos(\arctan(t)) = 1/\sqrt{t^2+1}$

*(e) recordeu que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \pi/2$

---

(a) $\boxed{I_1 = \displaystyle\int \tan^2 x dx = \tan x - x}$

Aquesta integral es podia fer de manera molt senzilla adonant-se de que si considerem la funció $\varphi(x) = \tan(x)$, la seva derivada és $\varphi'(x) = \tan^2 x + 1$.

Per tant, si considerem la funció $\varphi(x) = \tan(x) - x$ i la derivem tenim que: $\varphi'(x) = \tan^2 x + 1 - 1 = \tan^2 x$.

Per tant, una primitiva de $\tan^2 x$ és $\tan x - x$.

Anem a fer ara la integral utilitzant el canvi de variable que proposa l'enunciat.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \tan^2 x dx = \left[\begin{array}{l} u = \tan x \\ du = (1+\tan^2 x)dx \Longrightarrow dx = \frac{1}{1+\tan^2 x}du = \frac{1}{1+u^2}du \end{array}\right] \\ &= \int u^2 \cdot \frac{1}{1+u^2} du = \int \frac{u^2}{1+u^2} du = \int \frac{u^2+1-1}{1+u^2} du = \int \left[1 - \frac{1}{1+u^2}\right] du \\ &= u - \arctan(u) = \tan x - \arctan(\tan(x)) = \tan x - x. \end{aligned}$$

(b) $\boxed{I_2 = \displaystyle\int \ln^2 x dx = x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x}$

Aquesta integral es pot resoldre aplicant dues vegades integració per parts:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \ln^2 x dx = \left[\begin{array}{l} u(x) = \ln^2(x) \Longrightarrow u'(x) = 2\ln(x)\frac{1}{x} \\ v'(x) = 1 \Longrightarrow v(x) = x \end{array}\right] = x\ln^2(x) - \int x2\ln(x)\frac{1}{x}dx \\ &= x\ln^2(x) - 2\int \ln(x)dx = \left[\begin{array}{l} u(x) = \ln(x) \Longrightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = 1 \Longrightarrow v(x) = x \end{array}\right] = x\ln^2(x) - 2\left[x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx\right] \\ &= x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2\int 1dx = x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x \end{aligned}$$

(c) $\boxed{I_3 = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-2}}dx = \sqrt{x^2-2}}$

Aquesta integral és quasi-immediata. Observem que la derivada de $x^2-2$ és $2x$. Per tant, si prenem $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$ i $g(x) = x^2-2$, tenim que $f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-2}}$ i que

$$I_3 = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-2}}dx = \frac{1}{2}\int f(g(x))g'(x)dx = \frac{1}{2}\varphi(g(x))$$

on $\varphi(x)$ és una primitiva de $f(x)$.

És a dir, com que $\varphi(x) = 2\sqrt{x}$, tenim que:

$$I_3 = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x^2-2} = \sqrt{x^2-2}.$$

Com totes les integrals quasi-immediates, també es podia resoldre per canvi de variable, fent el canvi $u = g(x) = x^2-2$.

$$I_3 = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-2}}dx = \begin{bmatrix} u = x^2-2 \\ du = 2xdx \Longrightarrow xdx = \frac{1}{2}du \end{bmatrix} = \int \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}du = \sqrt{u} = \sqrt{x^2-2}.$$

(d) $\boxed{I_4 = \int \frac{1}{1+3\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\tan x\right)}$

A l'ajuda ens recomanen que utilitzem el canvi $t = \tan x$.

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \frac{1}{1+3\cos^2 x}dx = \begin{bmatrix} t = \tan x \Longrightarrow x = \arctan(t) \\ dt = (1+\tan^2 x)dx \Longrightarrow dx = \frac{1}{1+\tan^2 x}dt = \frac{1}{1+t^2}dt \end{bmatrix} \\ &= \int \frac{1}{1+3\cos^2(\arctan(t))}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt \end{aligned}$$

A més, ens diuen que $\cos(\arctan(t)) = 1/\sqrt{t^2+1} \Longrightarrow \cos^2(\arctan(t)) = \left(1/\sqrt{t^2+1}\right)^2 = 1/(t^2+1)$. És a dir,

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \frac{1}{1+3\cos^2(\arctan(t))}\frac{1}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{1+\frac{3}{t^2+1}}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{1+t^2+3}dt = \int \frac{1}{t^2+4}dt \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{(t/2)^2+1}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1/2}{(t/2)^2+1}dt = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\tan x\right) \end{aligned}$$

(e) $\boxed{I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{2x-1}{1+x^2}dx = +\infty}$

Hem de calcular una integral impròpia de primera espècie, per tant:

$$I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{2x-1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{2x-1}{1+x^2}dx$$

La integral resultant, és una integral d'un quocient de polinomis on el denominador és un polinomi irreductible ja que $1+x^2 \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^{+\infty} \frac{2x-1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{2x-1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \left[\frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right]dx \\ &= \lim_{b\to+\infty}\left[\ln|1+x^2| - \arctan(x)\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left[\ln|1+b^2| - \arctan(b) - \ln|1| + \arctan(0)\right] \\ &= \lim_{b\to+\infty}\left[\ln|1+b^2| - \arctan(b)\right] = +\infty + \pi/2 = +\infty. \end{aligned}$$

(f) $\boxed{I_6 = \int_0^1 4e^{-2x}dx = 2-2e^{-2}}$

$$I_6 = \int_0^1 4e^{-2x}dx = \left[-2e^{-2x}\right]_0^1 = -2e^{-2} + 2e^0 = 2-2e^{-2}$$

□