Matemàtiques 1
Curs 2009-2010/1
Grup M1 - Professora: Núria Parés

Segon examen parcial. 12.00h. 16/11/2009

`[10 punts]` **TEORIA 1:** Demostreu, mitjançant el càlcul de la derivada de la funció inversa, que si $g(x) = \arctan(x)$ llavors $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

`[10 punts]` **TEORIA 2:** Demostreu, utilitzant la definició de derivada d'una funció en un punt, que si $f(x) = e^x$ llavors $f'(x) = e^x$.

1. `[20 punts]` Feu els següents càlculs sense fer servir la regla de l'Hôpital. Poseu el resultat en el rectangle corresponent.

(a) $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+\sin^2(x)}\right) \Longrightarrow f'(x) =$ (b) $L_1 = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} =$

(c) $L_2 = \lim_{h\to 0} \dfrac{\ln(2+h) - \ln(2)}{h} =$

(d) $f(x) = e^{ix}$, digueu si és cert o no que $f''(x) + f(x) = 0$ (Responeu SI o NO)

En aquest apartat i és la unitat imaginària.

2. `[20 punts]` Considerem la funció $f(x) = \arctan(x) - \ln(x) - \dfrac{\pi}{4}$.

(a) `[5 punts]` Calculeu la recta tangent a la funció $f(x)$ en el punt $x = 1$.
Ajut: recordeu que $\arctan(1) = \pi/4$ *i que la derivada de la funció* $\arctan(x)$ *és* $1/(1+x^2)$

resultat:

(b) `[10 punts]` Calculeu el polinomi de Taylor d'ordre 2 al voltant del punt $x = 1$.

resultat:

(c) `[5 punts]` Calculeu el següent límit

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan(x) - \ln(x) - \dfrac{\pi}{4}}{1-x} =$$

3. `[25 punts]` Sigui $f(x)$ la funció definida per

$$f(x) = \begin{cases} x - e^{-x} & x \leq 1 \\ \dfrac{1}{4x - x^2 - 5} + a & x > 1 \end{cases}$$

(a) `[5 punts]` Calculeu el valor d'a que fa que la funció sigui contínua. $a =$

En els següents apartats agafeu el valor d'a obtingut en l'apartat (a).

(b) `[5 punts]` Calculeu $f'(x)$ per a tot valor de $x \in \mathbb{R}$ sabent que $f'_-(1) = 1 + e^{-1}$ i que $f'_+(1) = -1/2$.

(c) `[10 punts]` Trobeu els extrems de la funció en l'interval $[0, 5]$.

(d) `[5 punts]` Demostreu que la funció $f(x)$ té un zero en l'interval $[0, 1]$.

Ajut: $e^{-1} \approx 0.37$

4. `[15 punts]` Un forn de pa està especialitzat en dos tipus de pa diferent: el de cereals i el d'oliva. Per cada barra de pa de cereals es guanya 1 euro i per cada baguette de pa d'oliva es guanyen 2 euros (beneficis nets). Es vol determinar la quantitat òptima de producció per obtenir el màxim benefici diari, sabent que existeixen unes limitacions de pressupost: la inversió diària no pot superar els 300 euros. El preu de produir una peça de pa de cereals és de 0.25 euros, i el de produir una peça de pa d'oliva és de 0.75 euros.
Caculeu el nombre de barres de cerals i d'oliva que cal produir per maximitzar els beneficis.

resultat:

Matemàtiques 1
Curs 2009-2010/1
Grup M1 - Professora: Núria Parés

Segon examen parcial. 12.00h. 16/11/2009

`[10 punts]` **TEORIA 1:** Demostreu, mitjançant el càlcul de la derivada de la funció inversa, que si $g(x) = \arctan(x)$ llavors $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Sabem que les funcions $\arctan(x)$ i $\tan(x)$ són inverses una de l'altra, per tant

$$\tan(\arctan(x)) = x,$$

i a més sabem que $[\tan(x)]' = 1 + \tan^2(x)$.
Si derivem aquesta expressió utilitzant la regla de la cadena tenim que

$$\big(1 + \tan^2(\arctan(x))\big) \cdot [\arctan(x)]' = 1.$$

Ara, com que $\tan(\arctan(x)) = x$, l'expressió anterior es pot simplificar

$$\big(1 + x^2\big) \cdot [\arctan(x)]' = 1.$$

per tant

$$[\arctan(x)]' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$\square$

`[10 punts]` **TEORIA 2:** Demostreu, utilitzant la definició de derivada d'una funció en un punt, que si $f(x) = e^x$ llavors $f'(x) = e^x$.

Aplicant la definició de derivada en un punt $x = a$ tenim que:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^a e^h - e^a}{h} = e^a \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

Considerem el canvi $t = e^h - 1$, llavors

$$h \to 0 \Longrightarrow t \to 0, \text{ i } h = \ln(1+t).$$

Per tant, com que $\ln(1+t) \sim_0 t$

$$f'(a) = e^a \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^a \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)}}_{\to 1} = e^a.$$

És a dir, $f'(x) = e^x$ com volíem veure. $\square$

1. `[20 punts]` Feu els següents càlculs sense fer servir la regla de l'Hôpital. Poseu el resultat en el rectangle corresponent.

(a) $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+\sin^2(x)}\right) \Longrightarrow f'(x) = \boxed{\dfrac{\sin(x)\cos(x)}{1+\sin^2(x)}}$ (b) $L_1 = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

(c) $L_2 = \lim_{h\to 0} \dfrac{\ln(2+h) - \ln(2)}{h} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

(d) $f(x) = e^{ix}$, digueu si és cert o no que $f''(x) + f(x) = 0$ (Responeu SI o NO) $\boxed{\text{SI}}$

En aquest apartat i és la unitat imaginària.

(a) $\boxed{f(x) = \ln\left(\sqrt{1+\sin^2(x)}\right)}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2(x)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\sin^2(x)}} \cdot 2\sin(x)\cos(x) = \frac{\sin(x)\cos(x)}{1+\sin^2(x)}.$$

(b) $\boxed{L_1 = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}}$

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{0}{0} = \text{IND}$$

Per resoldre aquest límit utilitzarem el polinomi de Taylor de la funció $f(x) = e^x - 1 - x$ al voltant del punt $x = 0$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x - 1 - x &&\Longrightarrow f(0) = e^0 - 1 - 0 = 0\\
f'(x) &= e^x - 1 &&\Longrightarrow f'(0) = e^0 - 1 = 0\\
f''(x) &= e^x &&\Longrightarrow f''(0) = 1
\end{aligned}$$

Per tant sabem que:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3) = \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

Substituïnt en el límit

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} + \mathcal{O}(x) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

(c) $\boxed{L_2 = \lim_{h\to 0} \dfrac{\ln(2+h) - \ln(2)}{h}}$

$$L_2 = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(2+h) - \ln(2)}{h}$$

Observem que si considerem la funció $f(x) = \ln(x)$ i utilitzem la definició de derivada de la funció en el punt $x = 2$ obtenim:

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(2+h) - \ln(2)}{h}$$

Per tant, ens estan preguntant el valor de la derivada de la funció $f(x) = \ln(x)$ en el punt $x = 2$, és a dir,

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad f'(2) = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad L_2 = \frac{1}{2}$$

Una altra alternativa per a fer el límit és fer Taylor de la funció $g(h) = \ln(2 + h) - \ln(2)$ en el punt $h = 0$.

$$\begin{aligned} g(h) &= \ln(2+h) - \ln(2) &&\Longrightarrow\ g(0) = \ln(2) - \ln(2) = 0 \\ g'(h) &= \tfrac{1}{2+h} &&\Longrightarrow\ g'(0) = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Per tant sabem que:

$$g(h) = g(0) + g'(0)h + \mathcal{O}(h^2) = \frac{1}{2}h + \mathcal{O}(h^2)$$

Substituïnt en el límit

$$L_2 = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(2+h) - \ln(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}h + \mathcal{O}(h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2} + \mathcal{O}(h) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

(d) $\boxed{f(x) = e^{ix}}$

Hem de veure si $f''(x) + f(x) = 0$ o no.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{ix} \\ f'(x) &= ie^{ix} \\ f''(x) &= i \cdot ie^{ix} = i^2 e^{ix} = -e^{ix} \quad \text{perquè } i^2 = -1 \end{aligned}$$

Per tant

$$f''(x) + f(x) = -e^{ix} + e^{ix} = 0.$$

□

2. `[20 punts]` Considerem la funció $f(x) = \arctan(x) - \ln(x) - \dfrac{\pi}{4}$.

(a) `[5 punts]` Calculeu la recta tangent a la funció $f(x)$ en el punt $x = 1$.
Ajut: recordeu que $\arctan(1) = \pi/4$ *i que la derivada de la funció* $\arctan(x)$ *és* $1/(1 + x^2)$

(b) `[10 punts]` Calculeu el polinomi de Taylor d'ordre 2 de la funció $f(x)$ al voltant del punt $x = 1$.

(c) `[5 punts]` Calculeu el següent límit

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan(x) - \ln(x) - \frac{\pi}{4}}{1 - x}$$

(a) Considerem la funció $f(x) = \arctan(x) - \ln(x) - \frac{\pi}{4}$. Ens demanen que calculem la recta tangent a $f(x)$ en el punt $x = 1$, que és equivalent a calcular el polinomi de Taylor de la funció fins a ordre 1.

$$\text{recta tangent} = p_1(x) = f(1) + f'(1)(x-1).$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan(x) - \ln(x) - \tfrac{\pi}{4} && \Longrightarrow \quad f(1) = \arctan(1) - \ln(1) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 0 - \frac{\pi}{4} = 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x} && \Longrightarrow \quad f'(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Per tant la recta tangent és:

$$\text{recta tangent} = p_1(x) = 0 - \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x.$$

(b) Ens demanen que calculem el polinomi de Taylor d'ordre 2. Com que ja tenim la recta tangent, només ens cal afegir el termre d'ordre 2:

$$p_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 = p_1(x) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2.$$

Com que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x} \\ f''(x) &= \frac{0 \cdot (1+x^2) - 1 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad f''(1) = -\frac{2}{4} + \frac{1}{1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Per tant el polinomi de Taylor d'ordre 2 és:

$$p_2(x) = 0 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(x-1)^2 = -\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2.$$

(c) Per calcular el límit que ens demanen utilitzarem el polinomi de Taylor de la funció d'ordre 1 per escriure

$$f(x) = p_1(x) + \mathcal{O}\left((x-1)^2\right) = -\frac{1}{2}(x-1) + \mathcal{O}\left((x-1)^2\right)$$

Per tant:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{\arctan(x) - \ln(x) - \frac{\pi}{4}}{1-x} &= \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{2}(x-1) + \mathcal{O}\left((x-1)^2\right)}{1-x} = \lim_{x\to 1} -\frac{-\frac{1}{2}(x-1) + \mathcal{O}\left((x-1)^2\right)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} -\frac{-\frac{1}{2} + \mathcal{O}\left((x-1)\right)}{1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2} - \mathcal{O}\left((x-1)\right) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

3. `[25 punts]` Sigui $f(x)$ la funció definida per

$$f(x) = \begin{cases} x - e^{-x} & x \leq 1 \\ \dfrac{1}{4x - x^2 - 5} + a & x > 1 \end{cases}$$

(a) `[5 punts]` Calculeu el valor d'a que fa que la funció sigui contínua.

En els següents apartats agafeu el valor d'a obtingut en l'apartat (a).

(b) `[5 punts]` Calculeu $f'(x)$ per a tot valor de $x \in \mathbb{R}$ sabent que $f'_-(1) = 1 + e^{-1}$ i que $f'_+(1) = -1/2$.

(c) `[10 punts]` Trobeu els extrems de la funció en l'interval $[0, 5]$.

(d) `[5 punts]` Demostreu que la funció $f(x)$ té un zero en l'interval $[0, 1]$.

Ajut: $e^{-1} \approx 0.37$

(a) Hem de calcular el valor d'a que fa que la funció sigui contínua.

$\boxed{x < 1}$ Si $x < 1$, la funció és $x - e^{-x}$ en un entorn del punt i per tant és contínua per ser la suma d'un polinomi i d'una exponencial

$\boxed{x > 1}$ Si $x > 1$, la funció és $\dfrac{1}{4x - x^2 - 5} + a$ en un entorn del punt i per tant és contínua ja que en el quocient, el denominador no s'anul·la en cap punt. Les arrels de $4x - x^2 - 5$ són

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{-2} \notin \mathbb{R}.$$

$\boxed{x = 1}$ La funció serà contínua en $x = 1$ si

$$f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

$$\begin{cases} f(1) = 1 - e^{-1} \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x - e^{-x} = 1 - e^{-1} \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{4x - x^2 - 5} + a = \frac{1}{-2} + a = -\frac{1}{2} + a \end{cases}$$

Per tant la funció serà contínua si:

$$-\frac{1}{2} + a = 1 - e^{-1} \quad \Longrightarrow \quad a = 1 - e^{-1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - e^{-1}$$

(b) Hem de calcular $f'(x)$ quan $a = \dfrac{3}{2} - e^{-1}$.

$\boxed{x < 1}$ Si $x < 1$, la funció és $x - e^{-x}$ en un entorn del punt i per tant és derivable, sent la seva derivada $1 + e^{-x}$

$\boxed{x > 1}$ Si $x > 1$, la funció és $\dfrac{1}{4x - x^2 - 5} + a$ en un entorn del punt i per tant la seva derivada és

$$-\frac{4 - 2x}{(4x - x^2 - 5)^2} = \frac{2x - 4}{(4x - x^2 - 5)^2} = \frac{2(x - 2)}{(4x - x^2 - 5)^2}$$

$\boxed{x=1}$ Ens diuen que $f'_-(1) = 1 + e^{-1}$ i $f'_+(1) = -1/2$, per tant la funció no és derivable en $x = 1$.

La funció derivada és doncs:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + e^{-x} & x < 1 \\ \dfrac{2(x-2)}{(4x - x^2 - 5)^2} & x > 1 \\ \nexists & x = 1 \end{cases}$$

(c) Hem de trobar els extrems de la funció en l'interval $[0, 5]$.

Anem a calcular els candidats a extrem. Per l'apartat (a) sabem que la funció és contínua i per l'apartat (b) sabem que és derivable en tots els punts menys en el punt $x = 1$.

Anem a calcular els punts crítics.

Si $x < 1$, $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$. Per tant no tenim punts crítics en $[0, 1]$.

Si $x > 1$, $f'(x) = \dfrac{2(x-2)}{(4x - x^2 - 5)^2}$, que s'anul.la en el punt $x = 2$

En resum:

(0)	punts on f no és contínua	$\boxed{\emptyset}$
(1)	punts on f no és derivable	$\boxed{x = 1}$
(3)	extrems de l'interval	$\boxed{x = 0, x = 5}$
(2)	punts crítics	$\boxed{x = 2}$

Anem a veure quins són ara els extrems:

x	$f(x)$
0	$-1 \approx -1$
1	$1 - e^{-1} \approx 0.63$
2	$1/2 - e^{-1} \approx 0.13$
5	$7/5 - e^{-1} \approx 1.033$

Com que tenim una funció contínua en un interval tancat, sabem que existeixen el màxim i mínim absoluts que són (mirant a la taula), $x = 5$ i $x = 0$ respectivament.

En $x = 1$ i en $x = 2$ s'assoleixen un màxim i un mínim relatiu respectivament. Per veure això, fem un estudi de creixement i decreixement de la funció al voltant dels dos punts:

punt	signe de f'(x)	creixement
$x < 1$	$f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$	creixent
$x > 1$ (proper)	$f'(x) = \dfrac{2(x-2)}{(4x - x^2 - 5)^2} = \dfrac{-}{+} < 0$	decreixent
$x < 2$ (proper)	$f'(x) = \dfrac{2(x-2)}{(4x - x^2 - 5)^2} = \dfrac{-}{+} < 0$	decreixent
$x > 2$ (proper)	$f'(x) = \dfrac{2(x-2)}{(4x - x^2 - 5)^2} = \dfrac{+}{+} > 0$	creixent

Per tant els extrems són:

$x = 0$	mínim absolut
$x = 1$	màxim relatiu
$x = 2$	mínim relatiu
$x = 5$	màxim absolut

(d) Hem de demostrar que $f(x)$ té un zero en l'interval $[0, 1]$.

La funció $f(x)$ és contínua en $[0, 1]$ i a més $f(0) = -1$ i $f(1) = 1 - e^{-1} \approx 0.63$, és a dir $f(0) \cdot f(1) < 0$.

Per tant, el teorema de Bolzano ens garanteix que la funció $f(x)$ té un zero en l'interval $[0, 1]$, que és el que volíem demostrar.

□

4. `[10 punts][15 punts]` Un forn de pa està especialitzat en dos tipus de pa diferent: el de cereals i el d'oliva. Per cada barra de pa de cereals es guanya 1 euro i per cada baguette de pa d'oliva es guanyen 2 euros (beneficis nets). Es vol determinar la quantitat òptima de producció per obtenir el màxim benefici diari, sabent que existeixen unes limitacions de pressupost: la inversió diària no pot superar els 300 euros. El preu de produir una peça de pa de cereals és de 0.25 euros, i el de produir una peça de pa d'oliva és de 0.75 euros.
Caculeu el nombre de barres de cerals i d'oliva que cal produir per maximitzar els beneficis.

Denotem per n_c i n_o el nombre de barres de pa de cereals i d'olives que es produeixen en un dia respectivament.
El benefici que es treu al produïr n_c barres de cereals i n_o barres d'olives és $B = n_c + 2n_o$.
A més sabem que el cost de producció és $0.25n_c + 0.75n_o$ i que aquest cost no pot superar els 300 euros.
Per tant el problema que volem resoldre és:

$$\begin{array}{cl} \max & n_c + 2n_o \\ n_c \geq 0 & \\ n_o \geq 0 & \\ & \text{restringit a:} \quad 0.25n_c + 0.75n_o = 300 \end{array}$$

Utilitzant que $0.25n_c + 0.75n_o = 300 \implies n_c = 1200 - 3n_o$ tenim que el problema original és equivalent a:

$$\max_{0 \leq n_o \leq 400} \; 1200 - 3n_o + 2n_o$$

Per tant hem de trobar el màxim de la funció $1200 - n_o$ en l'interval $[0, 400]$.
Com que la funció és una recta, el màxim s'assolirà en un dels dos extrems (no té punts de discontinuïtat, ni de no derivabilitat, ni punts crítics i a més sabem que existeix per ser una funció contínua en un tancat).

n_o	benefici $= 1200 - n_o$
0	1200 euros
400	800 euros

Per tant la producció òptima és: $n_o = 0$ i $n_c = 1200$ amb un benefici de 1200 euros diaris.

□