Matemàtiques 1
Curs 2009-2010/1
Grup M1 - Professora: Núria Parés

Primer examen parcial. 12.00h. 19/10/2009

`[10 punts]` **TEORIA 1:** Demostreu que per a tot $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

`[10 punts]` **TEORIA 2:** Enunccieu la definició formal de $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
Utilitzant aquesta definició, demostreu que $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$.

`[10 punts]` **TEST:** Responeu a les següents preguntes UNI-RESPOSTA. Un encert suma 2 punts. Els errors NO RESTEN.

(i) Considereu la funció $f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right)}$. Quina de les següents afirmacions és certa?

- ☐ $\mathrm{Dom}(f) = (2, +\infty)$
- ☐ $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 2)$
- ☐ $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
- ☐ cap de les anteriors

(ii) Considereu la funció $f(x) = |x^2 - 2|$. Quina de les següents afirmacions és certa?

- ☐ f és invertible
- ☐ f restringida a l'interval $[-2, 2]$ és invertible
- ☐ f restringida a l'interval $[0, +\infty)$ és invertible
- ☐ cap de les anteriors

(iii) Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \leq 0 \\ x+2 & x > 0 \end{cases}$$

Quina de les següents afirmacions és certa?

- ☐ f és contínua en $\mathbb{R}$
- ☐ f és contínua per la dreta en $\mathbb{R}$
- ☐ f és contínua per l'esquerra en $\mathbb{R}$
- ☐ cap de les anteriors

(iv) Sigui $f(x) = \dfrac{x^2+2}{\sin(x^2)+2} - 3$.

- ☐ $\mathrm{Im}(f) = [-4, +\infty)$
- ☐ f és invertible
- ☐ $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{x \text{ tals que } x = k\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$
- ☐ cap de les anteriors

(v) Considereu la funció $f(x) = |x^3 - 8|$. Aleshores

- ☐ $f^{-1}(19) = \{-\sqrt[3]{11}, 0, 3\}$
- ☐ $f^{-1}(0) = \{-2, 2\}$
- ☐ $f^{-1}(92)$ té tres elements
- ☐ Cap de les anteriors.

1. `[40 punts]` Feu els següents càlculs. Poseu el resultat en el rectangle corresponent.

a) $L_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x+1}{x}\right)^{x} = \boxed{}$

b) $L_2 = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}\cdot(x^2-1)} = \boxed{}$

c) $L_3 = \lim\limits_{x\to 0^-} \sin(x)\cdot\dfrac{1}{x^2} = \boxed{}$

d) $L_4 = \lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2x}{x+1}\right)^{\dfrac{1}{x-1}} = \boxed{}$

e) $L_5 = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{2x^2-8x+6} = \boxed{}$

f) $L_6 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x + x + \sqrt{x}}{e^x} = \boxed{}$

g) $L_7 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x} = \boxed{}$

h) $C_1 = \dfrac{2e^{\pi/2i}}{1+3i} = \boxed{}$
(en forma binòmica)

AJUDES: $\ln(x+1) \sim_0 x \quad , \quad \sin x \sim_0 x$

2. `[15 punts]` Considerem la funció $f(t) = e^{(1+\pi i)t}$ on $t \in \mathbb{R}$. Per a cada valor de $t \in \mathbb{R}$, $f(t)$ és un nombre complex, per exemple, $f(1) = e^{1+\pi i} = e^1 \cdot e^{\pi i}$.

(a) `[5 punts]` Calculeu $f(0)$, $f(1/4)$, $f(1/2)$, $f(1)$ i $f(3/2)$ en forma binòmica sense decimals. Dibuixeu aquests nombres al pla complex (aproximadament).
Ajut: $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $e^{1/4} \approx 1.28$, $e^{1/2} \approx 1.64$, $e^1 \approx 2.72$ *i* $e^{3/2} \approx 4.48$.

(b) `[5 punts]` Calculeu les arrels quartes del nombre complex $f(0)$ i doneu el resultat en forma binòmica.

(c) `[5 punts]` Calculeu el mòdul de $f(t)$ i l'argument de $f(t)$, és a dir, $|f(t)|$ i $\arg(f(t))$.

3. `[15 punts]` Considereu l'expressió de $\cos x$ en funció de e^{xi} i e^{-xi},

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{xi} + e^{-xi}\right). \tag{1}$$

(a) `[5 punts]` Utilitzant la igualtat (1), calculeu $\cos(bi)$ on $b \in \mathbb{R}$ i vegeu que és un nombre real.

(b) `[5 punts]` Utilitzant la igualtat (1), calculeu $\cos^3 x = (\cos x)^3$ en funció de e^{xi}, e^{-xi}, e^{3xi} i e^{-3xi}.

(c) `[5 punts]` Utilitzant l'apartat (b) demostreu que

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x.$$

Matemàtiques 1
Curs 2009-2010/1
Grup M1 - Professora: Núria Parés

Primer examen parcial. 12.00h. 19/10/2009

`[10 punts]` **TEORIA 1:** Demostreu que per a tot $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

$\boxed{\text{Cas base } n=1}$ $\quad \frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{Hipòtesi d'inducció } n=k \Longrightarrow n=k+1}$

Suposem que la igualtat és certa per a $n=k$, és a dir, suposem que:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

i vegem que llavors també és certa per a $n=k+1$.
És a dir, volem veure que

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Utilitzant la hipòtesi d'inducció,

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}}_{\frac{k}{k+1}}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{1}{k+1}\left(k+\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{k(k+2)+1}{k+2}=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{k^2+2k+1}{k+2}=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{(k+1)^2}{k+2}=\frac{k+1}{k+2}$$

com volíem veure. $\square$

`[10 punts]` **TEORIA 2:** Enuncieu la definició formal de $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
Utilitzant aquesta definició, demostreu que $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad\Longleftrightarrow\quad \forall k>0, \exists\lambda>0 \text{ tal que si } x>\lambda \text{ llavors, } f(x)>k.$$

Anem a demostrar ara que $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$.
Per a $k>0$ prenem $\lambda=\sqrt{k}$. Hem de veure que $x>\lambda \Longrightarrow f(x)>k$.
$x>\lambda \quad\Longrightarrow\quad x>\sqrt{k} \quad\Longrightarrow\quad f(x)=x^2>(\sqrt{k})^2 \quad\Longrightarrow\quad f(x)>k$ com volíem veure. $\square$.

[10 punts] **TEST:** Responeu a les següents preguntes UNI-RESPOSTA. Un encert suma 2 punts. Els errors NO RESTEN.

(i) Considereu la funció $f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right)}$. Quina de les següents afirmacions és certa?

- ☐ $\mathrm{Dom}(f) = (2, +\infty)$
- ■ $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 2)$
- ☐ $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
- ☐ cap de les anteriors

(ii) Considereu la funció $f(x) = |x^2 - 2|$. Quina de les següents afirmacions és certa?

- ☐ f és invertible
- ☐ f restringida a l'interval $[-2, 2]$ és invertible
- ☐ f restringida a l'interval $[0, +\infty)$ és invertible
- ■ cap de les anteriors

(iii) Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \leq 0 \\ x+2 & x > 0 \end{cases}$$

Quina de les següents afirmacions és certa?

- ☐ f és contínua en $\mathbb{R}$
- ☐ f és contínua per la dreta en $\mathbb{R}$
- ■ f és contínua per l'esquerra en $\mathbb{R}$
- ☐ cap de les anteriors

(iv) Sigui $f(x) = \dfrac{x^2+2}{\sin(x^2)+2} - 3$.

- ☐ $\mathrm{Im}(f) = [-4, +\infty)$
- ☐ f és invertible
- ☐ $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{x \text{ tals que } x = k\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$
- ■ cap de les anteriors

(v) Considereu la funció $f(x) = |x^3 - 8|$. Aleshores

- ☐ $f^{-1}(19) = \{-\sqrt[3]{11}, 0, 3\}$
- ☐ $f^{-1}(0) = \{-2, 2\}$
- ☐ $f^{-1}(92)$ té tres elements
- ■ Cap de les anteriors.

(i) Hem de calcular el domini de la funció $f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right)}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dom}(f) &= \left\{x \in \mathbb{R}, \ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right) \geq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}, \frac{x-3}{x-2} \geq e^0 = 1\right\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \text{ tals que si } x-2>0, x-3 \geq x-2 \text{ o si } x-2<0, x-3 \leq x-2\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \text{ tals que si } x-2>0, -3 \geq -2 \text{ o si } x-2<0, -3 \leq -2\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \text{ tals que } x-2<0\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tals que } x<2\} = (-\infty, 2).
\end{aligned}$$

(ii) Considereu la funció $f(x) = |x^2 - 2|$. Quina de les següents afirmacions és certa?

$f(x)$ no és invertible perquè per a tot $y \geq 0$, $f^{-1}(y)$ té dues, tres o quatre antiimatges.

$f(x)$ tampoc és invertible en l'interval $[-2, 2]$ ja que $f(-1) = f(1) = |1-2| = 1$.

$f(x)$ tampoc és invertible en l'interval $[0, +\infty)$ ja que $f(0) = f(2) = 2$.

Per tant l'opció correcta és cap de les anteriors.

(iii) Considerem la funció

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \leq 0 \\ x+2 & x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ és contínua en $\mathbb{R} - \{0\}$ per ser polinòmica. Vegem què passa en $x = 0$.

$$\begin{aligned}
&f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \\
&\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x + 2 = 2 \\
&\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 2x + 1 = 1
\end{aligned}$$

Com que els dos límits laterals no són iguals, la funció no és contínua en $x = 0$. Ara bé, com que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$ la funció si que és contínua per l'esquerra en $x = 0$.

Per tant f és contínua per l'esquerra en $\mathbb{R}$.

(iv) Considerem $f(x) = \dfrac{x^2+2}{\sin(x^2)+2} - 3$.

Com que $\sin(x^2) + 2 > 0$, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ i per tant la tercera opció no és correcta.

Observem també que com que $\frac{x^2+2}{\sin(x^2)+2} > 0 \Longrightarrow \frac{x^2+2}{\sin(x^2)+2} - 3 > -3$. Per tant, si $f(x) > -3$ sempre, $\mathrm{Im}(f) \neq [-4, +\infty)$.

A més $f(-1) = f(1)$ i per tant, f no és invertible.

Per tant, l'opció correcta és cap de les anteriors.

(v) Considerem la funció $f(x) = |x^3 - 8|$.

$$\begin{aligned}
f^{-1}(19) &= \{x \in \mathbb{R} \text{ tals que } f(x) = 19\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tals que } |x^3 - 8| = 19\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \text{ tals que } x^3 - 8 = 19 \text{ o bé } x^3 - 8 = -19\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \text{ tals que } x^3 = 27 \text{ o bé } x^3 = -11\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \text{ tals que } x = \sqrt[3]{27} = 3 \text{ o bé } x = \sqrt[3]{-11} = -\sqrt[3]{11}\} = \{3, -\sqrt[3]{11}\}
\end{aligned}$$

Per tant, $f^{-1}(19) = \{-\sqrt[3]{11}, 3\}$ i no $f^{-1}(19) = \{-\sqrt[3]{11}, 0, 3\}$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(0) &= \{x \in \mathbb{R} \text{ tals que } f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tals que } |x^3 - 8| = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \text{ tals que } x^3 = 8\} = \{2\} \end{aligned}$$

Per tant, $f^{-1}(0) = \{2\}$ i no $f^{-1}(0) = \{-2, 2\}$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(92) &= \{x \in \mathbb{R} \text{ tals que } f(x) = 92\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tals que } |x^3 - 8| = 92\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \text{ tals que } x^3 - 8 = 92 \text{ o bé } x^3 - 8 = -92\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \text{ tals que } x^3 = 100 \text{ o bé } x^3 = -84\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \text{ tals que } x = \sqrt[3]{100} \text{ o bé } x = \sqrt[3]{-84}\} \end{aligned}$$

Per tant $f^{-1}(92)$ té dos elements i no tres i la resposta correcta és cap de les anteriors.

$\square$

1. `[40 punts]` Feu els següents càlculs. Poseu el resultat en el rectangle corresponent.

a) $L_1 = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x+1}{x}\right)^x = \boxed{+\infty}$

b) $L_2 = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3} \cdot (x^2-1)} = \boxed{\frac{1}{4}}$

c) $L_3 = \lim_{x \to 0^-} \sin(x) \cdot \frac{1}{x^2} = \boxed{-\infty}$

d) $L_4 = \lim_{x \to 1} \left(\frac{2x}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \boxed{e^{1/2}}$

e) $L_5 = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{2x^2 - 8x + 6} = \boxed{-\frac{1}{4}}$

f) $L_6 = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x + x + \sqrt{x}}{e^x} = \boxed{0}$

g) $L_7 = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = \boxed{0}$

h) $C_1 = \frac{2e^{\pi/2 i}}{1+3i} = \boxed{0.6 + 0.2i}$
(en forma binòmica)

AJUDES: $\ln(x+1) \sim_0 x$, $\sin x \sim_0 x$

$\boxed{L_1 = +\infty}$

$$L_1 = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x+1}{x}\right)^x = 3^{+\infty} = +\infty.$$

$\boxed{L_2 = \frac{1}{4}}$

$$L_2 = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3} \cdot (x^2-1)} = \frac{0}{2 \cdot 0} = \frac{0}{0} = \text{IND}$$

Per resoldre la indeterminació factoritzarem el polinomi que apareixen al denominador, i simplificarem el terme $x - 1$:

$$L_2 = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3} \cdot (x^2-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3} \cdot (x+1)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3} \cdot (x+1)} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}.$$

$\boxed{L_3 = -\infty}$

$$L_3 = \lim_{x\to 0^-} \sin(x)\cdot\frac{1}{x^2} = 0\cdot\frac{1}{0^+} = 0\cdot(+\infty) = \text{IND}$$

Per resoldre la indeterminació utilitzarem que $\sin x \sim_0 x$, és a dir, que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

$$L_3 = \lim_{x\to 0^-} \sin(x)\cdot\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

$\boxed{L_4 = e^{1/2}}$

$$L_4 = \lim_{x\to 1}\left(\frac{2x}{x+1}\right)^{\dfrac{1}{x-1}} = \left(\frac{2}{2}\right)^{\dfrac{1}{0}} = 1^\infty = \text{IND}$$

Per resoldre la indeterminació reescriurem el límit perquè ens aparegui el número e:

$$\begin{aligned}
L_4 &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{2x}{x+1}\right)^{\dfrac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1+x-1}{x+1}\right)^{\dfrac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1}\left(1+\frac{x-1}{x+1}\right)^{\dfrac{1}{x-1}}\\
&= \lim_{x\to 1}\left(1+\frac{1}{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)^{\dfrac{x+1}{x-1}\cdot\dfrac{x-1}{x+1}\cdot\dfrac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1}\left[\left(1+\frac{1}{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)^{\dfrac{x+1}{x-1}}\right]^{\dfrac{x-1}{x+1}\cdot\dfrac{1}{x-1}}\\
&= \lim_{x\to 1}\left[\left(1+\frac{1}{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)^{\dfrac{x+1}{x-1}}\right]^{\dfrac{1}{x+1}} = e^{\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}} = e^{1/2}
\end{aligned}$$

on hem utilitzat que

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{1}{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)^{\dfrac{x+1}{x-1}} = e,$$

ja que si $x\to 1$, $\frac{x+1}{x-1}\to\infty$.

$\boxed{L_5 = -\dfrac{1}{4}}$

$$L_5 = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{2x^2-8x+6} = \frac{\ln 1}{2-8+6} = \frac{0}{0} = \text{IND}$$

Per resoldre la indeterminació farem el canvi de varible $x = 1+t$ per a poder utilitzar l'infinitèssim $\ln(t+1) \sim_0 t$.

$$L_5 \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{2x^2-8x+6} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{2(x^2-4x+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{2(x-1)(x-3)} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{2t(t-2)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{\ln(1+t)}{t}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{2(t-2)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2(t-2)} = \frac{1}{2\cdot(-2)} = -\frac{1}{4}.$$

$\boxed{L_6 = 0}$

$$L_6 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x + x + \sqrt{x}}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{IND}$$

Aquesta indeterminació es resol utilitzant ordres d'infinitud:

$$\sin x << \sqrt{x} << x << e^x$$

Per tant:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}.$$

Llavors:

$$L_6 \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x + x + \sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x/e^x + x/e^x + \sqrt{x}/e^x}{e^x/e^x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\sin x/e^x}^{\to 0} + \overbrace{x/e^x}^{\to 0} + \overbrace{\sqrt{x}/e^x}^{\to 0}}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

$\boxed{L_7 = 0}$

$$L_7 = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^x \cdot \frac{1}{x} = e^{-\infty} \cdot \frac{1}{-\infty} = 0 \cdot 0 = 0.$$

$\boxed{C_1 = 0.2i + 0.6}$

$$C_1 \quad = \frac{2e^{\pi/2i}}{1+3i} = \frac{2\cos(\pi/2) + 2\sin(\pi/2)i}{1+3i} = \frac{2i}{1+3i} = \frac{2i}{1+3i} \cdot \frac{1-3i}{1-3i} = \frac{2i(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}$$

$$= \frac{2i - 6i^2)}{1-3i+3i-9i^2} = \frac{2i-6(-1)}{1-9(-1)} = \frac{2i+6}{1+9} = \frac{2i+6}{10} = 0.2i + 0.6$$

$\square$

2. [15 punts] Considerem la funció $f(t) = e^{(1+\pi i)t}$ on $t \in \mathbb{R}$. Per a cada valor de $t \in \mathbb{R}$, $f(t)$ és un nombre complex, per exemple, $f(1) = e^{1+\pi i} = e^1 \cdot e^{\pi i}$.

(a) [5 punts] Calculeu $f(1)$, $f(1/4)$, $f(1/2)$, $f(1)$ i $f(3/2)$ en forma binòmica sense decimals. Dibuixeu aquests nombres al pla complex (aproximadament).
Ajut: $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $e^{1/4} \approx 1.28$, $e^{1/2} \approx 1.64$, $e^1 \approx 2.72$ *i* $e^{3/2} \approx 4.48$.

(b) [5 punts] Calculeu les arrels quartes del nombre complex $f(0)$ i doneu el resultat en forma binòmica.

(c) [5 punts] Calculeu el mòdul de $f(t)$ i l'argument de $f(t)$, és a dir, $|f(t)|$ i $\arg(f(t))$.

(a) Calculem els valors que ens demanen:

$$z_1 = f(0) = e^0 = 1$$

$$z_2 = f\left(\tfrac{1}{4}\right) = e^{(1+\pi i)/4} = e^{1/4} \cdot e^{\pi/4i} = e^{1/4}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) i\right) = e^{1/4}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2} i\right)$$

$$z_3 = f\left(\tfrac{1}{2}\right) = e^{(1+\pi i)/2} = e^{1/2} \cdot e^{\pi/2i} = e^{1/2} i$$

$$z_4 = f(1) = e^{1+\pi i} = e^1 \cdot e^{\pi i} = e^1 \cdot -1 = -e$$

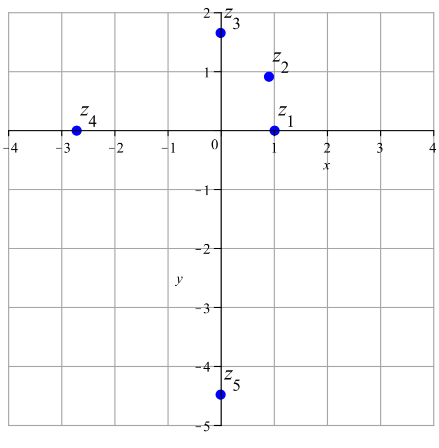
$$z_5 = f\left(\tfrac{3}{2}\right) = e^{(1+\pi i)\cdot 3/2} = e^{3/2} \cdot e^{3\pi/2i} = -e^{3/2} i$$

Per a dibuixar-los, els escriurem en decimals:

$z_1 = 1$, $z_2 \approx 1.28 \cdot (0.71 + 0.71i) = 0.9088 + 0.9088i$, $z_3 \approx 1.64i$, $z_4 \approx -2.72$, $z_5 \approx -4.48i$

Aquests nombres complexos estan associats als punts del pla complex:

$$z_1 \sim (1,0)\ ,\ z_2 \sim (0.91, 0.91)\ ,\ z_3 \sim (0, 1.64)\ ,\ z_4 \sim (-2.72, 0)\ ,\ z_5 \sim (0, -4.48)$$



(b) [5 punts] Hem de calcular les arrels quartes del nombre complex $z = f(0) = 1 = 1e^{0i}$.

$$z_1 = \sqrt[4]{1} e^{0/4i} = 1$$

$$z_2 = \sqrt[4]{1} e^{0/4i + 2\pi/4i} = e^{\pi/2i} = i$$

$$z_3 = \sqrt[4]{1} e^{0/4i + 2\cdot 2\pi/4i} = e^{\pi i} = -1$$

$$z_4 = \sqrt[4]{1} e^{0/4i + 3\cdot 2\pi/4i} = e^{3\pi/2i} = -i$$

Les quatre arrels són: $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$, $z_4 = -i$.

(c) `[5 punts]` Calculeu el mòdul de $f(t)$ i l'argument de $f(t)$, és a dir, $|f(t)|$ i $\arg(f(t))$.

$$f(t) = e^{(1+\pi i)t} = e^{t+\pi it} = e^t \cdot e^{\pi ti}$$

El mòdul és $|f(t)| = e^t$ i l'argument és $\arg(f(t)) = \pi t$.

$\square$

3. `[15 punts]` Considereu l'expressió de $\cos x$ en funció de e^{xi} i e^{-xi},

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{xi} + e^{-xi}\right). \tag{1}$$

(a) `[5 punts]` Utilitzant la igualtat (**??**), calculeu $\cos(bi)$ on $b \in \mathbb{R}$ i vegeu que és un nombre real.

(b) `[5 punts]` Utilitzant la igualtat (**??**), calculeu $\cos^3 x = (\cos x)^3$ en funció de e^{xi}, e^{-xi}, e^{3xi} i e^{-3xi}.

(c) `[5 punts]` Utilitzant l'apartat (b) demostreu que

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x.$$

(a) Hem de calcular $\cos(bi)$ on $b \in \mathbb{R}$ i veure que és un nombre real.

$$\cos(bi) = \frac{1}{2}\left(e^{bii} + e^{-bii}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{bi^2} + e^{-bi^2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-b} + e^{b}\right) \in \mathbb{R}.$$

(b) Hem de calcular $\cos^3 x$ en funció de e^{xi}, e^{-xi}, e^{3xi} i e^{-3xi}.

$$\begin{aligned}
\cos^3 x &= (\cos x)^2 = \left[\frac{1}{2}\left(e^{xi} + e^{-xi}\right)\right]^3 = \frac{1}{8}\left(e^{xi} + e^{-xi}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\left[\left(e^{xi}\right)^3 + 3\left(e^{xi}\right)^2 e^{-xi} + 3e^{xi}\left(e^{-xi}\right)^2 + \left(e^{-xi}\right)^3\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[e^{3xi} + 3e^{2xi}e^{-xi} + 3e^{xi}e^{-2xi} + e^{-3xi}\right] = \frac{1}{8}\left[e^{3xi} + 3e^{xi} + 3e^{-xi} + e^{-3xi}\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[e^{3xi} + e^{-3xi}\right] + \frac{3}{8}\left[e^{xi} + e^{-xi}\right]
\end{aligned}$$

(c) Anem a demostrar que

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x$$

utilitzant l'apartat (b).

Aplicant la definició de $\cos x$ i de $\cos(3x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(e^{3xi} + e^{-3xi}\right) + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(e^{xi} + e^{-xi}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{3xi} + e^{-3xi}\right) + \frac{3}{8}\left(e^{xi} + e^{-xi}\right) = \cos^3 x.
\end{aligned}$$

$\square$