MATERIALS D'AUTOAVALUACIÓ PER A L'ASSIGNATURA INTRODUCCIÓ A LES MATEMÀTIQUES ECONÒMIQUES I EMPRESARIALS.

R. Adillon, L. Jorba, P. Purroy, C. Ribas

Objectius de l'assignatura

L'heterogeneïtat en la procedència dels alumnes que accedeixen a qualsevol primer curs universitari es veu agreujada en el cas dels alumnes que accedeixen als estudis en l'àmbit de l'economia i l'empresa, doncs no sols ens trobem amb l'accés dels alumnes procedents de l'ensenyament mitjà, sinó que hi ha un elevat nombre d'alumnes que procedeixen de l'accés a la Universitat per majors de 25 anys.

Els actuals ensenyaments secundaris ja fomenten de per sí una gran variabilitat en el grau de coneixements adquirits. Aquest fet que de per sí no és bo ni dolent, ens obliga a fer l'esforç de reconsiderar allò que considerem essencial que l'alumne ha de saber per afrontar satisfactòriament les assignatures de Matemàtiques d'aquests graus.

Les assignatures relacionades amb les matemàtiques sovint són temudes pels alumnes, i l'experiència ens demostra que són molts alumnes que, en matemàtiques, necessiten una ajuda per assolir el nivell que els estudis universitaris exigeixen.

L'objectiu fonamental d'una assignatura introductòria a les matemàtiques és doncs, com es desprèn de tot el que estem exposant, el d'homogeneïtzar els coneixements matemàtics dels alumnes de nou accés que ho necessitin, per tal d'afrontar amb el nivell adequat, les posteriors assignatures amb continguts matemàtics d'aquests estudis universitaris.

Competències a adquirir en l'assignatura propedèutica d'introducció a les matemàtiques aplicades a l'economia i l'empresa

1. MATRIUS I SISTEMES D'EQUACIONS

Conceptes clau:
Matriu, determinant d'una matriu quadrada, rang d'una matriu, sistemes d'equacions lineals.

Objectius específics:
- Conèixer la disposició matricial de conjunts de nombres i les operacions bàsiques entre matrius
- Saber calcular el determinant d'una matriu quadrada de qualsevol ordre.
- Saber determinar el rang d'una matriu.
- Conèixer la notació matricial dels sistemes d'equacions lineals.
- Saber esbrinar si un sistema té solució o no sense necessitat de resoldre'l
- Saber resoldre sistemes d'equacions lineals fins i tot amb algun paràmetre.

2.- FUNCIÓ REAL DE VARIABLE REAL

Conceptes clau:
Aplicació, funció real de variable real, domini, composició, funció inversa, polinomis, exponencials, logaritmes, angles, graus, radians, funcions trigonomètriques sinus, cosinus, tangent.

Objectius específics:
- Saber què és una aplicació i una funció.
- Saber calcular el domini d'una funció.
- Conèixer l'operació de composició de funcions.
- Conèixer què son les funcions més utilitzades: Polinòmiques, exponencials, logarítmiques i trigonomètriques.
- Conèixer les propietats de les anteriors funcions.
- Aprendre a utilitzar correctament la calculadora científica per avaluar les funcions descrites.

3.- CONTINUÏTAT I DERIVABILITAT

Conceptes clau:
Concepte de límit d'una funció en un punt, funció contínua en un punt, derivada d'una funció, màxim, mínim, creixement, decreixement.

Objectius específics:

- Saber calcular el valor al que tendeix una funció al aproximar-nos a un punt.
- Poder saber si una funció és contínua.
- Conèixer el càlcul de derivades i les seves propietats.
- Conèixer els conceptes de màxim, mínim, funció creixent, decreixent.
- Aplicar les possibilitats que ofereix el càlcul de la derivada d'una funció per esbrinar els màxims, mínims i els intervals de creixement i de decreixement d'una funció real de variable real.
- Aplicar els anteriors objectius a la representació gràfica de funcions.

Continguts de l’assignatura d’introducció a les matemàtiques

Mòdul didàctic 1. MATRIUS I SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

1.1 Concepte de matriu

1.2 Àlgebra de matrius. Tipus de matrius

1.3 Matriu transposada. Propietats

1.4 Determinant d'una matriu quadrada. Propietats

1.5 Matriu inversa

1.6 Rang d'una matriu

1.7 Sistemes d'equacions lineals

Mòdul didàctic 2. FUNCIÓ REAL DE VARIABLE REAL

2.1 Correspondències i aplicacions

2.2 Tipus d'aplicacions

2.3 Funció real de variable real

2.4 Operacions amb funcions. Composició

2.5 Estudi d'algunes funcions

- 2.5.1 Funcions polinòmiques
- 2.5.2 Funcions exponencial i logarítmica
- 2.5.3 Funcions trigonomètriques

Mòdul didàctic 3. CONTINUÏTAT I DERIVABILITAT

3.1 Concepte intuïtiu de límit d'una funció en un punt

3.2 Càlcul efectiu de límits de funcions

3.3 Concepte de derivada

3.4 Càlcul efectiu de derivades

3.5 Estudi i representació gràfica de funcions

Metodologia de treball

L'estudi de qualsevol assignatura propedèutica d'introducció a les matemàtiques universitàries pot fer-se a partir de qualsevol llibre de text de matemàtiques de batxillerat, preferentment científic, en els que podreu trobar, entre d'altres, els tres mòduls didàctics que hem descrit.

No donarem, doncs una bibliografia, ja que els continguts d'aquests llibres que hem esmentat estan regulats per llei i per tant, qualsevol d'ells és vàlid.

A continuació afegim proves d'autoavaluació, dues per cada un dels mòduls didàctics, amb les corresponents solucions, per tal de que pugueu verificar si heu consolidat correctament els conceptes exposats.

MÒDUL DIDÀCTIC 1: MATRIUS I SISTEMES D'EQUACIONS
PROVA D'AUTOAVALUACIÓ 1

1. Calculeu la inversa de la matriu $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ Solució: $A^{-1} =$

2. Quin és el valor del determinant de la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ Solució: $|A| =$

3. Calculeu el valor d'x perquè l'element c_{12} del producte de les matrius $A \cdot B = C$ valgui -1, sabent que $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & x \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

   Solució: $x =$

4. Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, calculeu A^2 Solució: $A^2 =$

5. Quin és el rang de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ a & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ Solució: Rang$(A) =$

6. Per a quins valors d'a, el sistema $\left\{ \begin{array}{ll} -2x + ay + 3z & = 0 \\ 3x + 4y + z & = 0 \\ -3x + ay + 4z & = 0 \end{array} \right.$ és compatible indeterminat

   Solució: $a =$

7. Resoldre el sistema $\left\{ \begin{array}{ll} 2x + 2y + 2z & = 1 \\ x - y - z & = 2 \end{array} \right.$

   Solució: $x =$ $y =$ $z =$

8. El sistema d'equacions $\left\{ \begin{array}{rl} 3x + 4y + 5z & = 2 \\ -2x + 2y - z & = 1 \\ -2x + y - z & = 0 \end{array} \right.$ és compatible determinat. Calculeu el valor d'x

   Solució: $x =$

9. Si $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 6 \\ 7 & 2 & x \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, calculeu x si volem que $A_{33} = A_{31}$ (A_{ij} és l'adjunt de l'element a_{ij})

   Solució: $x =$

10. Si A i B són dues matrius quadrades d'ordre 2, indica quina de les següents afirmacions és falsa i posa un exemple, si és el cas, en el que es vegi la seva falsedat.

    (a) $A \cdot B = B \cdot A$
    (b) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

    L'afirmació falsa és:
    Exemple:

MÒDUL DIDÀCTIC 1: MATRIUS I SISTEMES D'EQUACIONS
SOLUCIÓ PROVA D'AUTOAVALUACIÓ 1

–

1. Calculeu la inversa de la matriu $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

   $|A| = -2; \quad A' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{5}{2} \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

2. Quin és el valor del determinant de la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

   $|A| = -2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{matrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \end{matrix} = 6 - 12 = -6$

3. Calculeu el valor d'x perquè l'element c_{12} del producte de les matrius $A \cdot B = C$ valgui -1, sabent que $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & x \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

   $(1 \quad -5 \quad x) \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 - 20 + x; \qquad -21 + x = -1 \Rightarrow x = 20.$

4. Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, calculeu A^2

   $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -15 \\ 12 & -20 \end{pmatrix}$

5. Quin és el rang de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ a & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

   $Rang\,(A) = 2$ ja que $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$

6. Per a quins valors d'a, el sistema $\begin{cases} -2x + ay + 3z &= 0 \\ 3x + 4y + z &= 0 \\ -3x + ay + 4z &= 0 \end{cases}$ és compatible indeterminat

   $\begin{vmatrix} -2 & a & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ -3 & a & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4 - 4a = 0 \Leftrightarrow a = 1$

7. Resoldre el sistema $\begin{cases} 2x + 2y + 2z &= 1 \\ x - y - z &= 2 \end{cases}$

   Multiplant la segona equació per 2 i sumant-les obtenim $x = \frac{5}{4}$. Substituint a continuació resulta $y = \frac{-3-4z}{4}$ i $z = z$.

8. El sistema d'equacions $\begin{cases} 3x + 4y + 5z &= 2 \\ -2x + 2y - z &= 1 \\ -2x + y - z &= 0 \end{cases}$ és compatible determinat. Calculeu el valor d'x

   $$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{7}{7} = 1.$$

9. Si $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 6 \\ 7 & 2 & x \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, calculeu x si volem que $A_{33} = A_{31}$ (A_{ij} és l'adjunt de l'element a_{ij})

   $A_{33} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 7$ $\qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & x \end{vmatrix} = x - 12;$ $\qquad 2x - 7 = x - 12 \Rightarrow x = -5.$

10. Si A i B són dues matrius quadrades d'ordre 2, indica quina de les següents afirmacions és falsa i posa un exemple, si és el cas, en el que es vegi la seva falsedat.

    (a) $A \cdot B = B \cdot A$

    (b) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

    L'afirmació falsa és a). Per exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 18 & 23 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 18 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

MÒDUL DIDÀCTIC 1: MATRIUS I SISTEMES D'EQUACIONS
PROVA D'AUTOAVALUACIÓ 2

–

1. Calculeu la inversa de la matriu $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ Solució: $A^{-1} =$

2. Quin és el valor del determinant de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Solució: $|A| =$

3. Calculeu el valor d'x si volem que la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ sigui regular (tingui inversa)

   Solució: $x =$

4. Si $A = \begin{pmatrix} x & 7 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, calculeu el valor d'$x$ que fa que l'element c_{12} de la matriu $C = A^2$, valgui 0

   Solució: $x =$

5. Quin és el rang de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & a \\ a & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ Solució: Rang$(A) =$

6. Per a quins valors d'a, el sistema $\left\{ \begin{array}{ll} 2x + y + az & = 1 \\ 2x + 3y + z & = 2 \\ x + 5y + 4z & = 3 \end{array} \right.$ és compatible determinat?

   Solució: $a =$

7. Resoldre el sistema $\left\{ \begin{array}{ll} 3x + 2y + z & = 0 \\ 2x - y - z & = 4 \end{array} \right.$

   Solució: $x =$ $y =$ $z =$

8. El sistema d'equacions $\left\{ \begin{array}{ll} 5x + 4y + 3z & = 2 \\ -x + 2y - 2z & = 1 \\ -x + y - 2z & = 0 \end{array} \right.$ és compatible determinat. Calculeu el valor de z

   Solució: $z =$

9. Si $A = \begin{pmatrix} x & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & x & 1 \end{pmatrix}$, calculeu x si volem que $A_{33} = A_{31}$ (A_{ij} és l'adjunt de l'element a_{ij})

   Solució: $x =$

10. Indica quina de les següents afirmacions és falsa i posa un exemple en el que es vegi la seva falsedat.

    (a) Si A i B són matrius regulars d'ordre n, es compleix $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

    (b) Si una matriu no és simètrica, voldrà dir que és anti-simètrica (anti-simètrica, $A' = -A$)

    L'afirmació falsa és:

    Exemple:

MÒDUL DIDÀCTIC 1: MATRIUS I SISTEMES D'EQUACIONS
SOLUCIÓ PROVA D'AUTOAVALUACIÓ 2

–

1. Calculeu la inversa de la matriu $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

$|A| = 2; \quad A' = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

2. Quin és el valor del determinant de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

3. Calculeu el valor d'x si volem que la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ sigui regular (tingui inversa)

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 65 - 13x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 5$$

4. Si $A = \begin{pmatrix} x & 7 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, calculeu el valor d'$x$ que fa que l'element c_{12} de la matriu $C = A^2$, valgui 0

$$(x \quad 7) \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 7z + 7 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

5. Quin és el rang de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & a \\ a & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0\text{: Rang}(A) = 2$$

6. Per a quins valors d'a, el sistema $\begin{cases} 2x + y + az &= 1 \\ 2x + 3y + z &= 2 \\ x + 5y + 4z &= 3 \end{cases}$ és compatible determinat?

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \text{, determinant: } 7a + 7 \neq 0\text{:} \qquad a \neq -1$$

7. Resoldre el sistema $\begin{cases} 3x + 2y + z &= 0 \\ 2x - y - z &= 4 \end{cases}$

$x = x \qquad y = 4 - 5x \qquad z = 7x - 8$

8. El sistema d'equacions $\begin{cases} 5x + 4y + 3z &= 2 \\ -x + 2y - 2z &= 1 \\ -x + y - 2z &= 0 \end{cases}$ és compatible determinat. Calculeu el valor de z

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-7}{-7} = 1$$

9. Si $A = \begin{pmatrix} x & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & x & 1 \end{pmatrix}$, calculeu x si volem que $A_{33} = A_{31}$ (A_{ij} és l'adjunt de l'element a_{ij})

$$A_{33} = \begin{vmatrix} x & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 7; \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 17 \qquad 2x - 7 = 17 \qquad x = 12$$

10. Indica quina de les següents afirmacions és falsa i posa un exemple en el que es vegi la seva falsedat.

    (a) Si A i B són matrius regulars d'ordre n, es compleix $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

    (b) Si una matriu no és simètrica, voldrà dir que és anti-simètrica (anti-simètrica, $A' = -A$)

    L'afirmació falsa és b) Podem prendre, per exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ no simètrica ni anti-simètrica.

MÒDUL DIDÀCTIC 2: FUNCIÓ REAL DE VARIABLE REAL
PROVA D'AUTOAVALUACIÓ 3

–

1. Calculeu el residu de la divisió del polinomi $p(x) = 6x^3 - 2x^2 + 8$ entre el polinomi $q(x) = 2x^2 - 3$.

   Solució: residu

2. Indica quina de les afirmacions següents és certa i quina és falsa. Posa un exemple, si és el cas, en el que es vegi la seva falsedat.

   (a) $\log(10^x) = 10^{\log(x)}$

   (b) $\log(x + y) = \log(x) \cdot \log(y)$.

   $\left\{ \begin{array}{l} \text{certa:} \\ \text{falsa:} \end{array} \right.$

   Exemple:

3. Quin és el domini de la funció $y = \sqrt{x^3 - 4x}$

   Solució:

4. Determineu la descomposició en factors del polinomi $p(x) = 3x^3 + 9x^2 - 12$.

   Solució:

5. Resoldre l'equació $5^x - \dfrac{500}{5^x} = 5$,

   Solució:

6. Resoldre el sistema $\left\{ \begin{array}{ll} \log_{10}(x) - \log_{10}(y) & = \log_2(4) \\ 5^x & = 5 \cdot 5^y \end{array} \right.$

   Solució: $\left\{ \begin{array}{l} x = \\ \\ y = \end{array} \right.$

7. Calculeu un angle α expressat en graus, tal que $90 \leq \alpha \leq 180$ i del que coneixem $\sin(\alpha) = 0.38$,

   Solució:

8. Si $f(x) = x^2 + \sin(x)$ i $g(x) = x$, calculeu $(f \circ g)(x)$

   Solució:

9. Quin és l'equivalent en graus de l'angle de 1 radian? Quin és l'equivalent en radians de l'angle de 1 grau? Expresseu el resultat amb 2 xifres decimals.

   Solució: $\left\{ \begin{array}{l} \text{1 radian} \\ \text{1 graus} \end{array} \right.$

10. Coneixent $\log_5(10) = 1.43$ i $\log_5(3) = 0.68$, calculeu, amb dos decimals,

    - $\log_5(30)$ Solució:
    - $\log_5(10) - \log_5(3)$ Solució:

MÒDUL DIDÀCTIC 2: FUNCIÓ REAL DE VARIABLE REAL
SOLUCIÓ PROVA D'AUTOAVALUACIÓ 3

–

1. Calculeu el residu de la divisió del polinomi $p(x) = 6x^3 - 2x^2 + 8$ entre el polinomi $q(x) = 2x^2 - 3$.

   Solució: residu= $9x + 5$

2. Indica quina de les afirmacions següents és certa i quina és falsa. Posa un exemple, si és el cas, en el que es vegi la seva falsedat.

   (a) $\log(10^x) = 10^{\log(x)}$

   (b) $\log(x+y) = \log(x) \cdot \log(y)$.

   $\begin{cases} \text{certa:} & \text{a)} \\ \text{falsa:} & \text{b)} \end{cases}$

   Exemple: log(1+1)$\neq$ log (1)*log(1)

3. Quin és el domini de la funció $y = \sqrt{x^3 - 4x}$

   Solució: $[-2, 0] \cup [2, \infty[$

4. Determineu la descomposició en factors del polinomi $p(x) = 3x^3 + 9x^2 - 12$.

   Solució: $p(x) = 3(x-1)(x+2)^2$

5. Resoldre l'equació $5^x - \dfrac{500}{5^x} = 5$,

   Solució: $x = 2$

6. Resoldre el sistema $\begin{cases} \log_{10}(x) - \log_{10}(y) & = \log_2(4) \\ 5^x & = 5 \cdot 5^y \end{cases}$ Solució: $\begin{cases} x = & 100/99 \\ y = & 1/99 \end{cases}$

7. Calculeu un angle α expressat en graus, tal que $90 \leq \alpha \leq 180$ i del que coneixem $\sin(\alpha) = 0.38$,

   Solució: $\alpha = 157.7^o$

8. Si $f(x) = x^2 + \sin(x)$ i $g(x) = x$, calculeu $(f \circ g)(x)$

   Solució: $(f \circ g)(x) = x^2 + \sin(x)$

9. Quin és l'equivalent en graus de l'angle de 1 radian? Quin és l'equivalent en radians de l'angle de 1 grau? Expresseu el resultat amb 2 xifres decimals.

   Solució: $\begin{cases} \text{1 radians} & = \frac{180}{\pi} = 57.29 \\ \text{1 graus} & = \frac{\pi}{180} = 0.02 \quad (0.017) \end{cases}$

10. Coneixent $\log_5(10) = 1.43$ i $\log_5(3) = 0.68$, calculeu, amb dos decimals,

    - $\log_5(30)$ Solució: $\log_5(30) = 2.11$
    - $\log_5(10) - \log_5(3)$ Solució: $\log_5(10) - \log_5(3) = 1.43 - 0.68 = 0.75$

MÒDUL DIDÀCTIC 2: FUNCIÓ REAL DE VARIABLE REAL
PROVA D'AUTOAVALUACIÓ 4

–

1. Calculeu el valor del paràmetre k, si volem que el residu de la divisió del polinomi $p(x) = -x^3 - kx^2 + x + 6$ entre el polinomi $q(x) = x + 2$ valgui zero.

   Solució:

2. Indica quina de les afirmacions següents és certa i quina és falsa. Posa un exemple, si és el cas, en el que es vegi la seva falsedat.

   (a) $\log_a(x) = y$ és equivalent a que $x = a^y$.

   (b) $\log_a(x) = y$ és equivalent a que $y = a^x$.

   $\begin{cases} \text{certa:} \\ \text{falsa:} \end{cases}$

   Exemple:

3. Quin és el domini de la funció $y = \sqrt{x^3 - 4x^2}$

   Solució:

4. Determineu la descomposició en factors del polinomi $-x^3 + 7x + 6$.

   Solució:

5. Resoldre l'equació $7^x - \dfrac{441}{7^x} = 40$,

   Solució:

6. Resoldre el sistema $\begin{cases} \frac{\log(x)}{\log(y)} & = \log(10) \\ 3^x \cdot 3^{y-1} & = 27 \end{cases}$ (Obs: log = logaritme en base 10)Solució: $\begin{cases} x = \\ \\ y = \end{cases}$

7. Calculeu un angle α expressat en graus, tal que $270^o \leq \alpha \leq 360$ i del que coneixem $\cos(\alpha) = 0.12$,

   Solució:

8. Si $f(x) = x$ i $g(x) = \cos(x) - x^3$, calculeu $(f \circ g)(x)$

   Solució: $(f \circ g)(x) =$

9. Quin és l'equivalent en graus de l'angle de 1 radian? Quin és l'equivalent en radians de l'angle de 1 grau? Expresseu el resultat amb 2 xifres decimals.

   Solució: $\begin{cases} \text{1 radians } = \\ \text{1 graus } = \end{cases}$

10. Coneixent $\log_3(13) = 2.33$ i $\log_3(2) = 0.63$, calculeu, amb dos decimals,

    - $\log_3(26)$ — Solució: $\log_3(26)$
    - $\log_3(13) \cdot \log_3(2)$ — Solució:

–

1. Calculeu el valor del paràmetre k, si volem que el residu de la divisió del polinomi $p(x) = -x^3 - kx^2 + x + 6$ entre el polinomi $q(x) = x + 2$ valgui zero.

   Solució: $k = 3$

2. Indica quina de les afirmacions següents és certa i quina és falsa. Posa un exemple, si és el cas, en el que es vegi la seva falsedat.

   (a) $\log_a(x) = y$ és equivalent a que $x = a^y$.

   (b) $\log_a(x) = y$ és equivalent a que $y = a^x$.

   $$\begin{cases} \text{certa:} & \text{a)} \\ \text{falsa:} & \text{b)} \end{cases}$$

   Exemple:$\log_2(8) = 3$; $\cdot \neq 2^8$

3. Quin és el domini de la funció $y = \sqrt{x^3 - 4x^2}$

   Solució: $[4, \infty[\cup \{0\}$

4. Determineu la descomposició en factors del polinomi $-x^3 + 7x + 6$.

   Solució: $p(x) = (-1)(x+1)(x+2)(x-3)$

5. Resoldre l'equació $7^x - \dfrac{441}{7^x} = 40$,

   Solució: $x =$ 2

6. Resoldre el sistema $\begin{cases} \frac{\log(x)}{\log(y)} & = \log(10) \\ 3^x \cdot 3^{y-1} & = 27 \end{cases}$ (Obs: log = logaritme en base 10)Solució: $\begin{cases} x = & 2 \\ y = & 2 \end{cases}$

7. Calculeu un angle α expressat en graus, tal que $270^o \leq \alpha \leq 360$ i del que coneixem $\cos(\alpha) = 0.12$,

   Solució: $\alpha = 276.9^o$

8. Si $f(x) = x$ i $g(x) = \cos(x) - x^3$, calculeu $(f \circ g)(x)$

   Solució: $(f \circ g)(x) = \cos(x) - x^3$

9. Quin és l'equivalent en graus de l'angle de 1 radian? Quin és l'equivalent en radians de l'angle de 1 grau? Expresseu el resultat amb 2 xifres decimals.

   Solució: $\begin{cases} 1 \text{ radians } & = \frac{180}{\pi} = 57.29 \\ 1 \text{ graus } & = \frac{\pi}{180} = 0.02 \quad (0.017) \end{cases}$

10. Coneixent $\log_3(13) = 2.33$ i $\log_3(2) = 0.63$, calculeu, amb dos decimals,

    - $\log_3(26)$ — Solució: $\log_3(26) = 2.96$
    - $\log_3(13) \cdot \log_3(2)$ — Solució: $\log_3(13) \cdot \log_3(2) = 2.33 \cdot 0.63 = 1.468$

–

1. Calculeu les derivades de les funcions següents (4 punts. 0.2 punts cada apartat)

$y = \left(5x^3 + 2x - 1\right)^{15}$ Solució $y' =$

$y = \sqrt{5x^3 - 8x^2}$ Solució $y' =$

$y = e^{x^2-1}$ Solució $y' =$

$y = \sin(2x) \cdot e^x$ Solució $y' =$

$y = \frac{4x^2}{x-1}$ Solució $y' =$

$y = \frac{x}{5}$ Solució $y' =$

$y = 5^{3x}$ Solució $y' =$

$y = \frac{3}{x^2}$ Solució $y' =$

$y = \cos\left(x^2\right)$ Solució $y' =$

$y = \sin^2(x)$ Solució $y' =$

$y = \frac{xe^x}{\sin(x)}$ Solució $y' =$

$y = 5e^x 3^x$ Solució $y' =$

$y = (x-1)^3 \tan(x)$ Solució $y' =$

$y = \ln\left(x^2 - 4\right)$ Solució $y' =$

$y = \ln(\ln(x))$ Solució $y' =$

$y = \sqrt{7}\sin(3x)$ Solució $y' =$

$y = \sin(x + \ln(x))$ Solució $y' =$

$y = \sqrt[3]{12}$ Solució $y' =$

$y = (x+3)(x+3)^{10}$ Solució $y' =$

$y = \frac{3\cos(4x)}{x}$ Solució $y' =$

2. Calcula les derivades de les funcions següents (0.5p cada apartat)

$y = (\cos(x))^x$ Solució $y' =$

$y = (5x)^x$ Solució $y' =$

3. Calcula les derivades segones de les funcions següents (0.25p cada apartat)

   $y = \frac{2x}{x-1}$ Solució $y'' =$

   $y = 5^{3x}$ Solució $y'' =$

   $y = \ln\left(3x^2 - 2\right)$ Solució $y'' =$

   $y = x^2\sqrt[3]{x}$ Solució $y'' =$

4. Donada $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4 & \text{si } x < 1 \\ mx^2 - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, per quins valors de m, f és contínua en $a = 1$. (1p)

   Solució $m =$

5. Calculeu els límits següents (0.25 p cada apartat)

   $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^3 + 2x - 3}{2x^4 + 4}$ Solució

   $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 + \sin(x) - x}{e^x - 1 - x}$ Solució

   $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{\ln(x)}$ Solució

   $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^3 + 2x - 3}{2x^2 + 4}$ Solució

6. Calculeu l'equació de la recta tangent a la funció $f(x) = x^2 + 3x - 1$ en el punt $a = 1$ (1p)

   Solució $y =$

7. Determineu els intervals en els que la funció $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ és decreixent (1p)

   Solució

MÒDUL DIDÀCTIC 3: CONTINUÏTAT I DERIVABILITAT
SOLUCIÓ PROVA D'AUTOAVALUACIÓ 5

–

1. Calculeu les derivades de les funcions següents (4 punts. 0.2 punts cada apartat)

$y = \left(5x^3 + 2x - 1\right)^{15}$ Solució $y' = 15\left(5x^3 + 2x - 1\right)^{14}\left(15x^2 + 2\right)$

$y = \sqrt{5x^3 - 8x^2}$ Solució $y' = \frac{1}{2\sqrt{5x^3 - 8x^2}}\left(15x^2 - 16x\right)$

$y = e^{x^2 - 1}$ Solució $y' = e^{x^2-1} \cdot 2x$

$y = \sin(2x) \cdot e^x$ Solució $y' = \cos(2x) \cdot 2 \cdot e^x + \sin(2x) \cdot e^x$

$y = \frac{4x^2}{x-1}$ Solució $y' = \frac{8x(x-1) - 4x^2}{(x-1)^2}$

$y = \frac{x}{5}$ Solució $y' = \frac{1}{5}$

$y = 5^{3x}$ Solució $y' = 5^{3x} \cdot 3 \cdot \ln(5)$

$y = \frac{3}{x^2}$ Solució $y' = \frac{-6}{x^3}$

$y = \cos\left(x^2\right)$ Solució $y' = -\sin\left(x^2\right) \cdot 2x$

$y = \sin^2(x)$ Solució $y' = 2\sin(x)\cos(x)$

$y = \frac{xe^x}{\sin(x)}$ Solució $y' = \frac{(e^x + xe^x)\sin(x) - xe^x\cos(x)}{\sin^2(x)}$

$y = 5e^x 3^x$ Solució $y' = 5e^x \cdot 3^x + 5e^x \cdot 3^x \cdot \ln(3)$

$y = (x-1)^3\tan(x)$ Solució $y' = 3(x-1)^2\tan(x) + \frac{(x-1)^3}{\cos^2(x)}$

$y = \ln\left(x^2 - 4\right)$ Solució $y' = \frac{2x}{x^2 - 4}$

$y = \ln(\ln(x))$ Solució $y' = \frac{1}{\ln(x)}\frac{1}{x}$

$y = \sqrt{7}\sin(3x)$ Solució $y' = 3\sqrt{7}\cos(3x)$

$y = \sin(x + \ln(x))$ Solució $y' = \cos(x + \ln(x))\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

$y = \sqrt[3]{12}$ Solució $y' = 0$

$y = (x+3)(x+3)^{10}$ Solució $y' = 11(x+3)^{10}$

$y = \frac{3\cos(4x)}{x}$ Solució $y' = \frac{-12x\sin(4x) - 3\cos(4x)}{x^2}$

2. Calcula les derivades de les funcions següents (0.5p cada apartat)

$y = (\cos(x))^x$ Solució $y' = \left(\ln(\cos(x)) - \frac{x\sin(x)}{\cos(x)}\right)(\cos(x))^x$

$y = (5x)^x$ Solució $y' = (\ln(5x) + 1)(5x)^x$

3. Calcula les derivades segones de les funcions següents (0.25p cada apartat)

$y = \frac{2x}{x-1}$ Solució $y'' = \frac{4}{(x-1)^3}$

$y = 5^{3x}$ Solució $y'' = (3\ln(5))^2 \cdot 5^{3x}$

$y = \ln\left(3x^2 - 2\right)$ Solució $y'' = \frac{-18x^2-12}{(3x^2-2)^2}$

$y = x^2\sqrt[3]{x}$ Solució $y'' = \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}}$

4. Donada $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4 & \text{si } x < 1 \\ mx^2 - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, per quins valors de m, f és contínua en $a = 1$. (1p)

Solució $m = 0$

5. Calculeu els límits següents (0.25 p cada apartat)

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^3+2x-3}{2x^4+4}$ Solució: 0 (grau num <grau den)

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+\sin(x)-x}{e^x-1-x}$ Solució: 2

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{\ln(x)}$ Solució: 4

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^3+2x-3}{2x^2+4}$ Solució: $+\infty$

6. Calculeu l'equació de la recta tangent a la funció $f(x) = x^2 + 3x - 1$ en el punt $a = 1$ (1p)

Solució $y = 3 + 5(x-1)$ $(y = 5x - 2)$

7. Determineu els intervals en els que la funció $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ és decreixent (1p)

Solució $]0,1[\,\cup\,]1,2[$

–

1. Calculeu les derivades de les funcions següents (4 punts. 0.2 punts cada apartat)

$y = \left(3x^2 + 2x - 1\right)^{17}$	Solució $y' =$
$y = \sqrt{2x^2 - 8x}$	Solució $y' =$
$y = e^{2x-1}$	Solució $y' =$
$y = \cos(2x) \cdot \ln(x)$	Solució $y' =$
$y = \frac{3x}{x-1}$	Solució $y' =$
$y = \frac{x}{12}$	Solució $y' =$
$y = 3^{2x}$	Solució $y' =$
$y = \frac{3}{x^2}$	Solució $y' =$
$y = \sin\left(x^2\right)$	Solució $y' =$
$y = \cos^2(x)$	Solució $y' =$
$y = \frac{x\sin(x)}{e^x}$	Solució $y' =$
$y = 3e^{2x}2^x$	Solució $y' =$
$y = (x-1)^2\tan(x)$	Solució $y' =$
$y = \ln\left(x^2 - 4x\right)$	Solució $y' =$
$y = \ln(\ln(x))$	Solució $y' =$
$y = \sqrt{5}\sin(2x)$	Solució $y' =$
$y = \cos(x + \ln(x))$	Solució $y' =$
$y = \sqrt{7}$	Solució $y' =$
$y = (x+1)(x+1)^{10}$	Solució $y' =$
$y = \frac{4\sin(3x)}{x}$	Solució $y' =$

2. Calculeu les derivades següents (0.5 p cada apartat)

$y = (\tan(x))^x$	Solució $y' =$
$y = (2x)^x$	Solució $y' =$

3. Calcula les derivades segones de les funcions següents (0.25 p. cada apartat)

   $y = \frac{x}{4x-1}$ Solució $y'' =$

   $y = 7^{2x}$ Solució $y'' =$

   $y = \ln\left(x^2 - 2x\right)$ Solució $y'' =$

   $y = x\sqrt[3]{x}$ Solució $y'' =$

4. Donada $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x+2 & \text{si } x < 2 \\ mx^2 - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{array} \right.$, per quins valors de m, f és contínua en $a = 2$. (1p)

   Solució $m =$

5. Calculeu els límits següents (0.25 p cada apartat)

   $\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x^3 + 2x - 3}{2x^4 + 4}$ Solució

   $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + \sin(x) - x}{e^x - 1 - x}$ Solució

   $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{\ln(x)}$ Solució

   $\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x^3 + 2x - 3}{2x^2 + 4}$ Solució

6. Calculeu l'equació de la recta tangent a la funció $f(x) = 3x^2 - 2x - 3$ en el punt $a = 1$ (1p)

   Solució $y =$

7. Determineu els intervals en els que la funció $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ és creixent (1p)

   Solució

MÒDUL DIDÀCTIC 3: CONTINUÏTAT I DERIVABILITAT
SOLUCIÓ PROVA D'AUTOAVALUACIÓ 6

–

1. Calculeu les derivades de les funcions següents (4 punts. 0.2 punts cada apartat)

$y = \left(3x^2+2x-1\right)^{17}$	Solució $y' = 17\left(3x^2+2x-1\right)^{16}(6x+2)$
$y = \sqrt{2x^2-8x}$	Solució $y' = \frac{1}{2\sqrt{2x^2-8x}}(4x-8)$
$y = e^{2x-1}$	Solució $y' = 2e^{2x-1}$
$y = \cos(2x)\cdot\ln(x)$	Solució $y' = -2\sin(2x)\ln(x) + \frac{\cos(x)}{x}$
$y = \frac{3x}{x-1}$	Solució $y' = \frac{3(x-1)-3x}{(x-1)^2}$
$y = \frac{x}{12}$	Solució $y' = \frac{1}{12}$
$y = 3^{2x}$	Solució $y' = 2\ln(3)\,3^{2x}$
$y = \frac{3}{x^2}$	Solució $y' = -6x^{-3} = \frac{-6}{x^3}$
$y = \sin\left(x^2\right)$	Solució $y' = 2x\cos\left(x^2\right)$
$y = \cos^2(x)$	Solució $y' = -2\cos(x)\sin(x)$
$y = \frac{x\sin(x)}{e^x}$	Solució $y' = \frac{(\sin(x)+x\cos(x))e^x - x\sin(x)e^x}{e^{2x}}$
$y = 3e^{2x}2^x$	Solució $y' = 3\left(2e^{2x}2^x + e^{2x}2^x\ln(2)\right)$
$y = (x-1)^2\tan(x)$	Solució $y' = 2(x-1)\tan(x) + \frac{(x-1)^2}{\cos^2(x)}$
$y = \ln\left(x^2-4x\right)$	Solució $y' = \frac{2x-4}{x^2-4x}$
$y = \ln(\ln(x))$	Solució $y' = \frac{1}{x\ln(x)}$
$y = \sqrt{5}\sin(2x)$	Solució $y' = 2\sqrt{5}\cos(2x)$
$y = \cos(x+\ln(x))$	Solució $y' = -\sin(x+\ln(x))\left(1+\frac{1}{x}\right)$
$y = \sqrt{7}$	Solució $y' = 0$
$y = (x+1)(x+1)^{10}$	Solució $y' = 11(x+1)^{10}$
$y = \frac{4\sin(3x)}{x}$	Solució $y' = \frac{12x\cos(3x)-4\sin(3x)}{x^2}$

2. Calculeu les derivades següents (0.5 p cada apartat)

$y = (\tan(x))^x$	Solució $y' = \left(\ln(\tan(x)) + \frac{x}{\tan(x)\cos^2(x)}\right)(\tan(x))^x$
$y = (2x)^x$	Solució $y' = (1+\ln(2x))(2x)^x$

3. Calcula les derivades segones de les funcions següents (0.25 p. cada apartat)

$y = \frac{x}{4x-1}$ Solució $y'' = \frac{8}{(4x-1)^3}$

$y = 7^{2x}$ Solució $y'' = 7^{2x}\left(2\ln(7)\right)^2$

$y = \ln\left(x^2-2x\right)$ Solució $y'' = \frac{2\left(x^2-2x\right)-(2x-2)^2}{(x^2-2x)^2}$

$y = x\sqrt[3]{x}$ Solució $y'' = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}}$

4. Donada $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x<2 \\ mx^2-4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, per quins valors de m, f és contínua en $a=2$. (1p)

Solució $m = 2$

5. Calculeu els límits següents (0.25 p cada apartat)

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^3+2x-3}{2x^4+4}$ Solució 0 (grau num<grau den)

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+\sin(x)-x}{e^x-1-x}$ Solució 2

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{\ln(x)}$ Solució 4

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^3+2x-3}{2x^2+4}$ Solució $+\infty$

6. Calculeu l'equació de la recta tangent a la funció $f(x) = 3x^2-2x-3$ en el punt $a=1$ (1p)

Solució $y = -2+4(x-1)$ $y = 4x-6$

7. Determineu els intervals en els que la funció $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ és creixent (1p)

Solució Creix: $]-1,1[$