Dept. Matemàtica Aplicada IV

Tècniques elementals de Càlcul i Àlgebra

Exercicis bàsics

Presentació

Aquest document va adreçat als estudiants de nou ingrés de les escoles d'enginyeria en les quals imparteix docència el Departament de Matemàtica Aplicada IV de la UPC, és a dir, l'ETSETB, l'EPSC i l'EPSEVG. Conté un recull de les tècniques bàsiques de Càlcul i Àlgebra que cal dominar per poder seguir les assignatures de Matemàtiques de primer curs. Els temes presents en el document haurien de formar part de la *cultura general matemàtica* de qualsevol estudiant d'enginyeria de les escoles esmentades. L'objectiu és que un estudiant a punt de començar els seus estudis superiors pugui comprovar si les seves habilitats matemàtiques són suficients i, si li cal, completar-les en els aspectes necessaris abans de començar el curs.
Els continguts es presenten en forma de llistes d'exercicis bàsics; les solucions del exercicis s'inclouen en una secció a part al final del document. Els continguts teòrics necessaris per resoldre els exercicis formen part del currículum de Matemàtiques de l'ESO i el Batxillerat, de forma que es poden trobar en els llibres de Matemàtiques d'aquests cursos; qualsevol d'ells serà una bona referència complementària.

AUTORS:
F. Aguiló, M. Claverol, F. Comellas, I. Gracia, J. Guàrdia, S.C. López, J. Martí, S. Martín, X. Muñoz, A. Ras, M. Zaragozá

Barcelona, Castelldefels i Vilanova i la Geltrú,
Juny de 2010

Índex

Tema 1: Manipulacions algebraiques elementals

1.1 Opereu i simplifiqueu les fraccions:

(a) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}=$ (b) $\dfrac{5/7}{2/3}=$ (c) $\dfrac{\frac{1}{1+3}}{1-\frac{1}{1+3}}=$ (d) $\dfrac{1}{1+\frac{1}{5}+5}=$

1.2 Simplifiqueu les expressions següents:

(a) $3^4-3^2=$

(b) $\dfrac{5\cdot 25^2\cdot 9^3}{27\cdot 125}=$

(c) $32^{2/5}-9^{3/2}=$

(d) $\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[6]{8}=$

(e) $\dfrac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{8})^3}=$

(f) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{2^{48}}}}=$

(g) $\sqrt[4]{16}-\sqrt[4]{81}=$

(h) $\sqrt{9+16}=$

(i) $\sqrt{75}-6\sqrt{27}+4\sqrt{12}=$

(j) $(4\sqrt{5}-2)^2=$

(k) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}-\dfrac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}+\dfrac{18}{\sqrt{27}}=$

(l) $|-4|=$

(m) $-|-4|=$

(n) $\left|\sqrt{3}-4\right|=$

(o) $|-x^2|=$

1.3 Simplifiqueu les expressions següents:

(a) $\log_a a^m=$

(b) $\log_2(2^3\cdot 4^2)=$

(c) $\log_{12}(2^2+2^3)=$

(d) $\ln^2 e^x=$

(e) $e^{\ln 3-\ln 10}=$

(f) $\dfrac{\ln e^{x^2}}{\ln(e^x)^2}=$

(g) $e^{-\ln x}=$

(h) $e^{-2+\ln x}=$

(i) $\ln\dfrac{1}{e^x}=$

1.4 Resoleu les equacions i inequacions següents:

(a) $e^{2x+1}=1$

(b) $5^{-\ln e+\ln x}=125$

(c) $x^2-4>0$

(d) $(x-1)x(x+1)\leq 0$

(e) $|x-1|<2$

Tema 2: Conceptes bàsics

2.1 Construïu la taula de les raons trigonomètriques dels angles més usuals i usant les propietats de les funcions trigonomètriques calculeu (sense calculadora):

(a) $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) =$ (c) $\tan\left(-\frac{51\pi}{3}\right) =$ (e) $\sec(-7\pi) =$

(b) $\sin\left(\frac{25\pi}{3}\right) =$ (d) $\operatorname{cosec}\left(\frac{5\pi}{2}\right) =$ (f) $\operatorname{cotan}\left(\frac{5\pi}{3}\right) =$

2.2 Trobeu els angles $\alpha \in [0, 2\pi)$ que compleixen:

(a) $\cos\alpha = 1$ (b) $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2.3 Doneu les solucions reals de les equacions següents:

(a) $\sin(x) = 0$ (b) $\cos(x) = 0$ (c) $\sin(x)\cos(x) = 0$

2.4 Donades les funcions $f(x) = \sin(x+1)$ i $g(x) = x^2-1$, calculeu les funcions compostes $f \circ g$ i $g \circ f$.

2.5 Trobeu l'equació de la recta en el pla que passa pels punts $(2, 3)$ i $(0, -1)$. És la mateixa que la recta que passa pel punt (1,1) i té vector director $(-1, -2)$?

2.6 Trobeu l'equació de la recta que passa pel punt $(1, 2)$ i té pendent 3.

2.7 Dóneu l'equació de la recta vertical v i de la horitzontal h que passen pel punt $(3, 4)$.

2.8 Trobeu el pendent de la recta $r : x - 2y + 3 = 0$. Busqueu una recta s paral·lela a r que passi pel punt $(1, 3)$ i una recta t perpendicular a r que passi pel punt $(2, 5)$.

2.9 Calculeu el producte escalar dels vectors $u = (1, 0, 1)$ i $v = (1, 1, 0)$. Quin angle formen?

2.10 Calculeu la distància entre els punts $(1, 1)$ i $(-3, -2)$.

2.11 Determineu un vector perpendicular al pla $2x + 3y + 5z = 3$. Determineu la recta perpendicular al pla que passa pel punt $(1, 2, 3)$.

Tema 3: Polinomis

3.1 Trobeu les arrels dels polinomis següents i, en cada cas, doneu la descomposició en factors irreductibles.

(a) $x^2 - 9x + 20$.

(b) $x^3 - 3x^2 - x + 3$.

(c) $6x^3 - 17x^2 + 6x + 8$.

(d) $x^3 - 4x^2 + 4x$.

(e) $x^4 - 5x^2 + 4$.

(f) $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9$.

3.2 Comproveu que -1 és una arrel del polinomi $x^3 + x^2 + x + 1$, i que $\sqrt{2}$ és una arrel del polinomi $x^3 - (\sqrt{2} + 2)x^2 + (2\sqrt{2} - 2)x + 2\sqrt{2}$. Quines altres arrels tenen aquests polinomis?

3.3 Determineu un polinomi $p(x)$ de grau tres que tingui 1 com arrel doble, -1 com arrel simple i tal que $p(0) = 2$.

3.4 Per a quins valors de a el polinomi $3x^2 + ax + 3$ no té arrels reals? Per a quins valors de a té una arrel doble?

3.5 Trobeu el quocient q i el residu r de la divisió del polinomi $x^5 - x^4 + 2x^3 - x + 1$ pel polinomi $x^3 - 1$. Comproveu la igualtat $\dfrac{x^5 - x^4 + 2x^3 - x + 1}{x^3 - 1} = q + \dfrac{r}{x^3 - 1}$.

3.6 Expresseu la suma $\dfrac{(x+4)^2}{x^2 - x - 2} + \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x + 1}$ com un quocient de polinomis $\dfrac{p}{q}$. Simplifiqueu l'expressió que heu trobat.

Tema 4: Funcions elementals

4.1 Determineu el domini de les funcions següents:

(a) $f(x) = \ln(x+1)$ (b) $g(x) = \sqrt{(1-x)x}$

(c) $h(x) = \dfrac{4-x}{x^2-4}$ (d) $m(x) = \dfrac{\sqrt{4-x}}{x^2-4}$

4.2 Quines de les funcions següents són parelles, senars o no tenen cap d'aquestes dues simetries?

(a) $\tan x$ (b) $\dfrac{\sin x}{3+\cos x}$ (c) x^3 (d) $x^4 - 3x^2 + 1$

4.3 Quin és el període de les funcions següents?

(a) $\tan x$ (b) $\cos(2x)$ (c) $\sin(\pi x)$ (d) $\cos(x/\pi)$

4.4 Sigui f una funció amb domini $[-2, 2]$, que té la gràfica de la Figura 1. Dibuixeu, aproximadament, les gràfiques de les funcions $-f(x)$, $f(-x)$, $2f(x)$, $f(2x)$ i $f(x/2)$ i doneu-ne el domini.

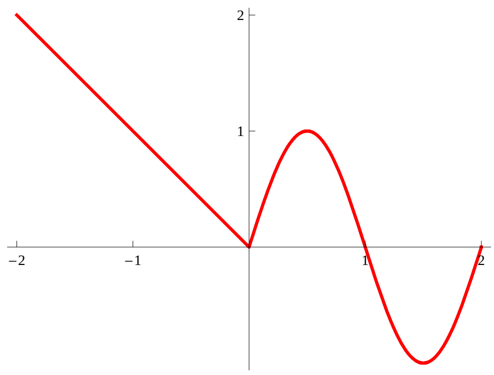
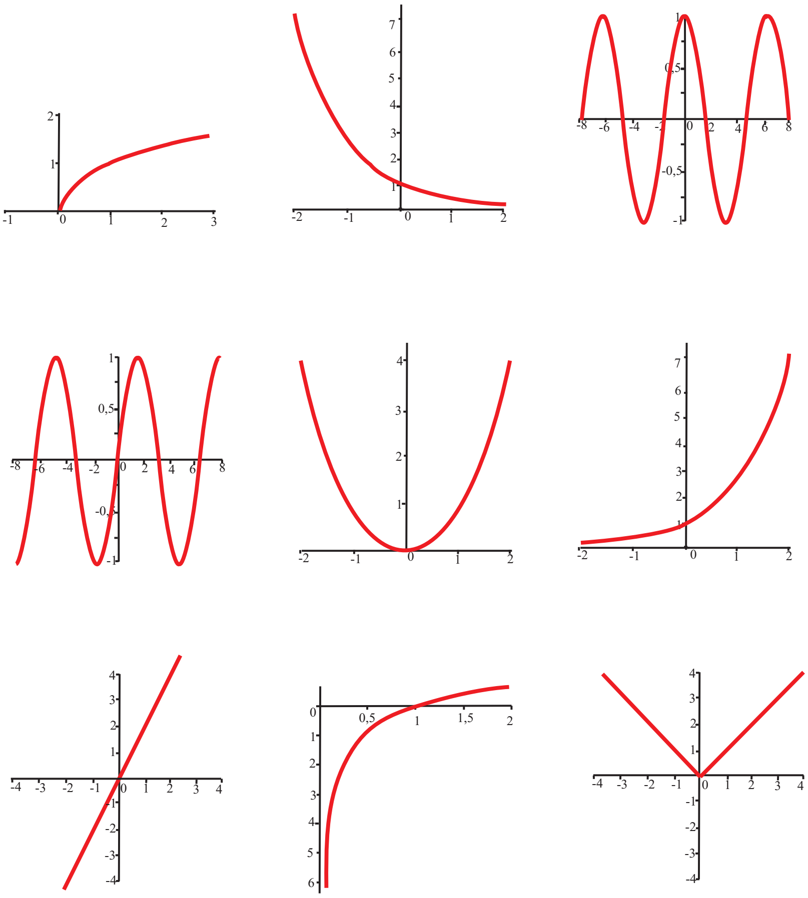


Figura 1: Gràfica de f

4.5 Feu l'esquema d'una gràfica que compleixi: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-2} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
Doneu les equacions de les asímptotes verticals i horitzontals, si en té.

4.6 Les gràfiques següents corresponen a les funcions $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = \sqrt{x}$, $f_4(x) = e^x$, $f_5(x) = e^{-x}$, $f_6(x) = \sin x$, $f_7(x) = \cos x$, $f_8(x) = \ln x$ i $f_9(x) = |x|$. Relacioneu cadascuna de les funcions amb la seva gràfica.



2

Tema 5: Límits de funcions

5.1 Calculeu els límits següents:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x\ln(x)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(3x)}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$

5.2 Calculeu els límits següents de quocients de polinomis:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3+1}{x^3-1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^3-1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3+1}{x^3-1}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^3+x-1}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3-4x}{x^2-2x}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{(x+1)^2}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^3-1}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^3-1}$

5.3 Calculeu els límits següents de quocients de polinomis:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x+1}{x^3+x^2+x+1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^5+4x^4+3x^3+2x^2+x}{x^5+2x^4+3x^3+4x^2+5x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+2x^2+x}{x^4-20x^2-25x-1}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^4-3x^2+5x+1}{5x^3-3x^2+5x+1}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^4-3x^2+5x+1}{5x^3-3x^2+5x+1}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^7-x^6}{7x^7+1}$

Tema 6: Derivades

6.1 Calculeu la derivada de les funcions següents.

(a) $f(x) = \sin(3x) + \cos(2x)$

(b) $f(x) = e^{-x}\cos x$

(c) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^4}{(3x-4)^2}$

(e) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

(f) $f(x) = 3^{-x^2}$

(g) $f(x) = \tan(x^2)$

(h) $f(x) = \tan^2 x$

(i) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{3}{x}\right)$

(j) $f(x) = \ln\sqrt{3-x^2}$

(k) $f(x) = x^2 \arccos\left(\dfrac{2}{x}\right)$

6.2 Sense desenvolupar les expressions entre parèntesis, calculeu la derivada de les funcions següents:

(a) $f(x) = (1-5x)^6$

(b) $g(x) = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^5$

(c) $h(x) = (x^2+3)^4(2x^3-5)^3$

6.3 En cadascun dels apartats següents, calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f, en el punt d'abscissa $x = a$:

(a) $f(x) = x^5 + 5x^4 - 10x^2 + 6,\ a = -1$

(b) $f(x) = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x^2+5},\ a = 2$

(c) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}},\ a = 1.$

(d) $f(x) = (3+4x-x^2)^{1/2},\ a = 0.$

(e) $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x+3},\ a = -2.$

6.4 En quins punts de la corba $y = x^3 + 5$ la seva recta tangent és paral·lela a la recta d'equació $12x - y = 17$?

6.5 Estudieu els màxims i mínims de les funcions següents:

(a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

(b) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

(c) $f(x) = (2 - x)^3$

(d) $f(x) = (x^2 - 4)^2$

(e) $f(x) = (x - 4)^4(x + 3)^3$

Tema 7: El mètode de Gauss

7.1 Calculeu el rang de les matrius següents, utilitzant el mètode de Gauss:

(a) $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 11 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 12 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \\ 7 & 2 & 13 & 4 \\ 7 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 5 & 6 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 8 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

7.2 Aplicant operacions elementals per files, fem la transformació següent de la matriu A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Determineu quina operació hem fet en cada pas.

7.3 Calculeu el rang de les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 11 \end{pmatrix}$. Podem obtenir la matriu B a partir de la matriu A aplicant operacions elementals per files?

Tema 8: Operacions amb matrius

8.1 Calculeu, en el cas en què sigui possible, la matriu suma $A+B$ i la matriu producte AB de les parelles de matrius següents:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

8.2 Sigui $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ i sigui $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Comproveu que $AB \neq BA$.

(b) Comproveu que $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

(c) Comproveu que $(A-B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$.

(d) Comproveu que $A^2 - B^2 \neq (A+B)(A-B)$.

8.3 Calculeu A^2 on $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Per a quins valors de a es té que $A^2 = \mathrm{Id}$? Per a quins valors de a es té que $A^2 = 0$?

8.4 Calculeu, quan sigui possible, la inversa de la matriu A, de la matriu B, de la matriu suma $A+B$ i de la matriu producte AB, on:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

8.5 Sigui $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i sigui $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Comproveu que $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$.

(b) Comproveu que $A^{-1}B^{-1} \neq (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

8.6 Comproveu que les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ són inverses l'una de l'altra.

Tema 9: Determinants

9.1 Calculeu el determinant de les matrius que s'indiquen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -2 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

9.2 Relacioneu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ amb les matrius $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ i $E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 15 \\ 1 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -9 \end{pmatrix}$. Calculeu el determinant d'aquestes matrius i relacioneu el determinant de A amb el determinant de les altres quatre matrius.

9.3 Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Comproveu que:

(a) $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

(b) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(c) $\det(A^2) = (\det(A))^2$

(d) $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

(e) $\det(2A) \neq 2\det(A)$.

(f) $\det(17A) = 17^3 \det(A)$.

9.4 Per a quins valors d'a la matriu $\begin{pmatrix} a-3 & 5 & -4 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 2 & 5 & a+3 \end{pmatrix}$ té determinant nul?

Tema 10: Sistemes d'equacions lineals

10.1 Resoleu els sistemes següents:

(a) $\left\{\begin{array}{rrl} 2x & +4y & = -2 \\ 3x & +2y & = 1 \end{array}\right.$ (b) $\left\{\begin{array}{rrrl} x & -y & +z & = 1 \\ 2x & +y & -z & = 2 \\ x & +2y & +z & = 7 \end{array}\right.$

(c) $\left\{\begin{array}{rrrl} 2x & -y & +7z & = 4 \\ x & +y & -z & = -1 \\ 3x & +y & +3z & = 1 \end{array}\right.$ (d) $\left\{\begin{array}{rrrl} 2x & +y & +z & = 1 \\ & -y & +z & = 1 \\ & x & +y & = 1 \end{array}\right.$

10.2 Considerem els sistemes d'equacions:

$$\left\{\begin{array}{rrl} x & +2y & = 3 \\ 4x & +5y & = 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrl} x & +2y & +3z & = 0 \\ 4x & +5y & +z & = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrl} x & +4y & = 0 \\ 2x & +5y & = 0 \\ 3x & +y & = 0 \end{array}\right.$$

Escriviu matricialment aquests sistemes. Quina relació tenen les matrius associades a aquests sistemes? Quins d'aquests sistemes són compatibles determinats?

10.3 Expresseu cada una de les equacions vectorials següents com un sistema d'equacions lineals i calculeu-ne la solució:

(a) $x(1,-1)+y(2,3)=(4,16)$.

(b) $x(1,-1)+y(2,3)+z(4,16)=(0,0)$.

(c) $x(1,2,4)+y(-1,3,16)=(0,0,0)$.

10.4 Discutiu els sistemes següents en funció del paràmetre a:

(a) $\left\{\begin{array}{rrl} 2x & -y & = a \\ ax & +3y & = 4 \end{array}\right.$ (b) $\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & -2z & = 5 \\ x & -y & +az & = 1 \\ ax & -y & +z & = -2 \end{array}\right.$

10.5 Determineu els valors de a per als quals $x=y=z=1$ és una solució del sistema d'equacions lineals $\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = 3 \\ x & +2y & +z & = 4 \\ x & +3y & +a^2z & = a+4 \end{array}\right.$. Quan $x=y=z=1$ és l'única solució del sistema?

10.6 Existeixen tres nombres reals que sumats dos a dos donen 3, 5 i 7? En cas afirmatiu, determineu-los.

Tema 11: Solucions

Tema 1: Manipulacions algebraiques elementals

1.1

(a) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{31}{30}$ (b) $\dfrac{5/7}{2/3}=\dfrac{15}{14}$ (c) $\dfrac{\frac{1}{1+3}}{1-\frac{1}{1+3}}=\dfrac{1}{3}$ (d) $\dfrac{1}{1+\frac{1}{5}+5}=\dfrac{5}{31}$

1.2

(a) $3^4-3^2=72$

(b) $\dfrac{5\cdot 25^2\cdot 9^3}{27\cdot 125}=675$

(c) $32^{2/5}-9^{3/2}=-23$

(d) $\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[6]{8}=4\sqrt[4]{2}$

(e) $\dfrac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{8})^3}=\dfrac{1}{8}$

(f) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{2^{48}}}}=4$

(g) $\sqrt[4]{16}-\sqrt[4]{81}=-1$

(h) $\sqrt{9+16}=5$

(i) $\sqrt{75}-6\sqrt{27}+4\sqrt{12}=-5\sqrt{3}$

(j) $(4\sqrt{5}-2)^2=4(21-4\sqrt{5})$

(k) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}-\dfrac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}+\dfrac{18}{\sqrt{27}}=0$

(l) $|-4|=4$

(m) $-|-4|=-4$

(n) $\left|\sqrt{3}-4\right|=4-\sqrt{3}$

(o) $|-x^2|=x^2$.

1.3

(a) $\log_a a^m=m$

(b) $\log_2(2^3\cdot 4^2)=7$

(c) $\log_{12}(2^2+2^3)=1$

(d) $\ln^2 e^x=x^2$

(e) $e^{\ln 3-\ln 10}=3/10$

(f) $\dfrac{\ln e^{x^2}}{\ln(e^x)^2}=x/2$

(g) $e^{-\ln x}=1/x$

(h) $e^{-2+\ln x}=x/e^2$

(i) $\ln\dfrac{1}{e^x}=-x$.

1.4

(a) $x=-1/2$

(b) $x=e^4$

(c) $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

(d) $x\in(-\infty,-1]\cup[0,1]$

(e) $x\in(-1,3)$

Tema 2: Conceptes bàsics

2.1

(a) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$

(b) $\sin\left(\dfrac{25\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\tan\left(-\dfrac{51\pi}{3}\right)=0$

(d) $\operatorname{cosec}\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)=1$

(e) $\sec(-7\pi)=-1$

(f) $\operatorname{cotan}\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2.2

(a) $\alpha = 0$ (b) $\alpha = \frac{\pi}{6}, \quad \alpha = \frac{7\pi}{6}$ (c) $\alpha = \frac{5\pi}{4}, \quad \alpha = \frac{7\pi}{4}$

2.3

(a) $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (b) $x = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$ (c) $x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

2.4 $f \circ g(x) = \sin(x^2), \qquad g \circ f(x) = \sin^2(x+1) - 1 = -\cos^2(x+1).$

2.5 $y = 2x - 1$. Sí.

2.6 $y = 3x - 1$.

2.7 $v : x = 3, \quad h : y = 4$.

2.8 El pendent és $1/2$. Les rectes demanades són $s : y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ i $t : y = -2x + 9$.

2.9 El producte escalar és $u \cdot v = 1$; el cosinus de l'angle α que formen és $\cos\alpha = 1/2$, i per tant $\alpha = \pm\pi/3$.

2.10 5.

2.11 Un vector normal al pla és $v = (2, 3, 5)$; la recta és $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{5}$.

Tema 3: Polinomis

3.1

(a) Les arrels són 4 i 5, i la factorització és $x^2 - 9x + 20 = (x-4)(x-5)$.

(b) Les arrels són $-1, 1$ i 3, i la factorització és $x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x-3)(x-1)(x+1)$.

(c) Arrels: $-1/2, 4/3, 2$; factorització $6x^3 - 17x^2 + 6x + 8 = 6(x-2)(x-4/3)(x+1/2) = (x-2)(2x+1)(3x-4)$.

(d) Arrels: 0 i 2 (doble); factorització: $x^3 - 4x^2 + 4x = x(x-2)^2$.

(e) Arrels: $\pm 1, \pm 2$; factorització: $x^4 - 5x^2 + 4 = (x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$.

(f) Arrels dobles 1 i 3; factorització: $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9 = (x-3)^2(x-1)^2$.

3.2 El polinomi $x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1)$ només té la real real -1.
El polinomi $x^3 - (\sqrt{2}+2)x^2 + (2\sqrt{2}-2)x + 2\sqrt{2} = \left(x - \sqrt{2}\right)(x^2 - 2x - 2)$ té com arrels $\sqrt{2}$, $1 + \sqrt{3}$, $1 - \sqrt{3}$.

3.3 $p(x) = 2(x-1)^2(x+1)$.

3.4 El discriminant del polinomi és $a^2 - 36 = (a-6)(a+6)$; si $-6 < a < 6$ el polinomi no té arrels reals; si $a = \pm 6$ el polinomi té una sola arrel doble.

3.5 $q = x^2 - x + 2$, $r = x^2 - 2x + 3$.

3.6 $\dfrac{(x+4)^2}{x^2 - x - 2} + \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x+1} = \dfrac{x^2 - 5x + 18}{x - 2}$.

Tema 4: Funcions elementals

4.1

$\mathrm{Dom}(f) = (-1, +\infty)$, $\mathrm{Dom}(g) = [0, 1]$,

$\mathrm{Dom}(h) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, $\mathrm{Dom}(m) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 4]$.

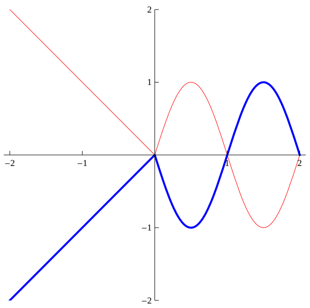
4.2 Les tres primeres funcions són senars i la darrera és parella.

4.3

(a) El període és π. (b) El període és π.

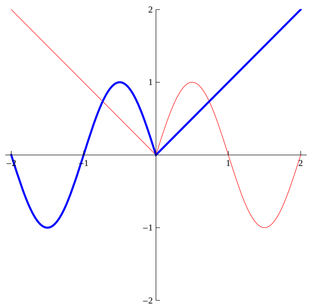
(c) El període és 2. (d) El període és $2\pi^2$.

4.4 La funció original està representada en color vermell i la transformada en color blau.



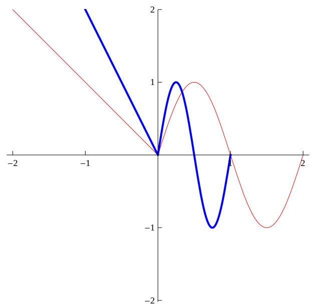
$-f(x)$

$\mathrm{Dom}(-f(x)) = [-2, 2]$



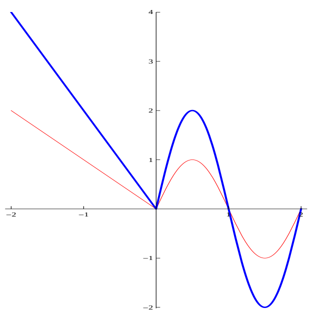
$f(-x)$

$\mathrm{Dom}(f(-x)) = [-2, 2]$



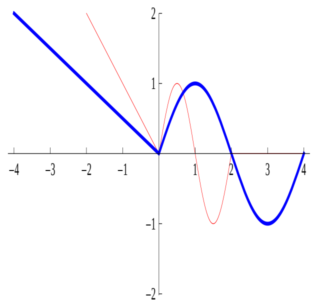
$f(2x)$

$\mathrm{Dom}(f(2x)) = [-1, 1]$



$2f(x)$

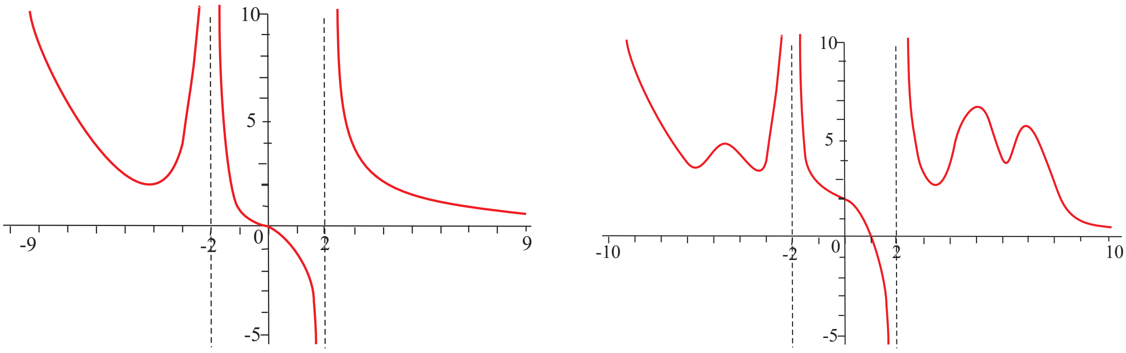
$\mathrm{Dom}(2f(x)) = [-2, 2]$



$f(x/2)$

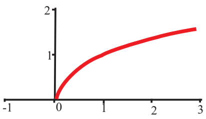
$\mathrm{Dom}(f(x/2)) = [-4, 4]$

4.5 Dues solucions possibles:

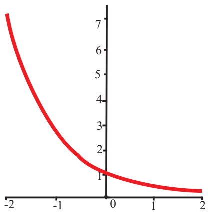


Totes les funcions que compleixin les condicions demanades tindran les assimptotes verticals $x = -2$ i en $x = 2$, i l'assímptota horitzontal $y = 0$ quan $x \to +\infty$.

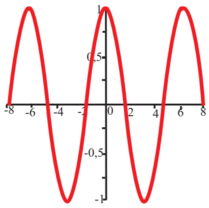
4.6



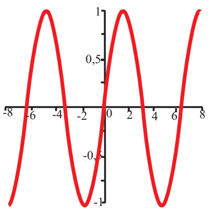
$y = \sqrt{x}$



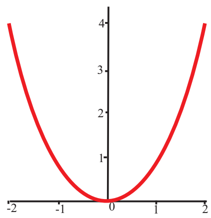
$y = e^{-x}$



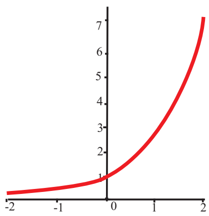
$y = cos\ x$



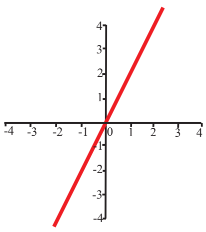
$y = sin\ x$



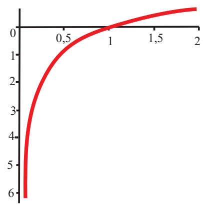
$y = x^2$



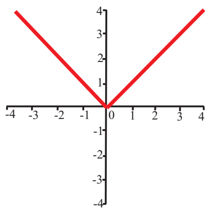
$y = e^x$



$y = 2x$



$y = ln\ x$



$y = |x|$

Tema 5: Límits de funcions

5.1

(a) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$

(b) $\lim_{x\to 1} x\ln(x) = 0$

(c) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln(3x)} = 0$

(d) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = +\infty$

5.2

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3+1}{x^3-1} = -1$

(b) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^3-1} = 0$

(c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+1}{x^3-1} = \infty$

(d) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^3+x-1} = 0$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-4x}{x^2-2x} = 2$

(f) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{(x+1)^2} = \infty$

(g) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^3-1} = 2/3$

(h) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^3-1} = 2.$

5.3

(a) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+x+1}{x^3+x^2+x+1} = 1$

(b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{5x^5+4x^4+3x^3+2x^2+x}{x^5+2x^4+3x^3+4x^2+5x} = 5$

(c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^3+2x^2+x}{x^4-20x^2-25x-1} = 0$

(d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{5x^4-3x^2+5x+1}{5x^3-3x^2+5x+1} = +\infty$

(e) $\lim_{x\to -\infty} \frac{5x^4-3x^2+5x+1}{5x^3-3x^2+5x+1} = -\infty$

(f) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^7-x^6}{7x^7+1} = 1/7.$

Tema 6: Derivades

6.1

(a) $f'(x) = 3\cos(3x) - 2\sin(2x)$

(b) $f'(x) = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x$

(c) $f'(x) = -\frac{x\sin x + \cos x}{x^2}$

(d) $f'(x) = \frac{2x^3(3x-8)}{(3x-4)^3}$

(e) $f'(x) = \frac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$

(f) $f'(x) = -2(\ln 3)x \cdot 3^{-x^2}$

(g) $f'(x) = \frac{2x}{\cos(x^2)}$

(h) $f'(x) = \frac{2\tan x}{\cos^2(x)} = 2(1+\tan^2 x)\tan x$

(i) $f'(x) = -\frac{3}{x^2+9}$

(j) $f'(x) = \frac{x}{x^2-3}$

(k) $f'(x) = \frac{2|x|}{\sqrt{x^2-4}} + 2x\arccos\left(\frac{2}{x}\right)$

6.2

(a) $f'(x) = -30(1-5x)^5$

(b) $g'(x) = 5\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{5x^4}{(1+x)^6}$

(c) $h'(x) = 8x(x^2+3)^3(2x^3-5)^3 + 18x^2(x^2+3)^4(2x^3-5)^2 =$
$2x(x^2+3)^3(2x^3-5)^2(17x^3+27x-20)$

6.3

(a) $y = 5x + 5$

(b) $y = \dfrac{11}{6}x + \dfrac{13}{3}$

(c) $y = -3x + 11$

(d) $y = \sqrt{3}\left(\dfrac{2x}{3} + 1\right)$

(e) $y = 5x + 14$

6.4 En els punts d'abscissa $x = \pm 2$.

6.5

(a) Mínim absolut en $x = -1$.

(b) Màxim relatiu en $x = -2$, mínim relatiu en $x = 2/3$.

(c) La funció no té extrems relatius ni absoluts.

(d) Mínims absoluts en $x = \pm 2$, màxim relatiu en $x = 0$.

(e) Màxim relatiu en $x = 0$, mínim relatiu en $x = 4$.

Tema 7: El mètode de Gauss

7.1

(a) $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$

(b) $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 11 \end{pmatrix} = 2$

(c) $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 12 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

(d) $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

(e) $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \\ 7 & 2 & 13 & 4 \\ 7 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} = 2$

(f) $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 5 & 6 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 8 & 3 & 10 \end{pmatrix} = 2$

(g) $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$

(h) $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 2$

7.2 Primer pas: Hem intercanviat la primera i la tercera files.
Segon pas: Hem restat a la tercera fila la suma de les dues anteriors.
Tercer pas: Hem dividit la tercera fila per 3.
Quart pas: Hem restat la primera fila a la segona.
Cinquè pas: Hem multiplicat la segona fila per -1.

7.3 El rang d'A és 3 i el rang de B és 2; com el rang és diferent, no podem obtenir una de l'altra mitjançant operacions elementals per files.

Tema 8: Operacions amb matrius

8.1

(a) $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. El producte AB no es pot fer.

(b) La suma $A + B$ no es pot fer. $AB = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

8.2

(a) $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(c) $(A-B)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$, $A^2 - 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$.

(d) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8.3 $A^2 = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix}$. La igualtat $A^2 = \mathrm{Id}$ es té només per a $a = 0$, mentre que $A^2 = 0$ si, i només si, $a = -1$.

8.4

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, $A + B$ no és invertible.
$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, B no és invertible, $(A+B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, AB no és invertible.

(c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, B, $A + B$ i AB no són invertibles.

(d) A, B i AB no són invertibles, $(A+B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8.5

(a) $(A+B)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} + B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) $A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}A^{-1}$.

8.6 Només cal comprovar que $AB = \mathrm{Id}$, o bé que $BA = \mathrm{Id}$.

Tema 9: Determinants

9.1

$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = 29$, $\det \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} = -4$, $\det \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} = 1$,

$\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -2 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 3$, $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -90$, $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 0$,

$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix} = -5$.

9.2 La matriu B és la matriu A amb les dues darreres columnes intercanviades. La matriu C és la matriu A posant la tercera columna com a primera. La matriu D és la transposada d'A. La matriu E és la matriu A amb la tercera columna multiplicada per -3. És $\det A = -4$, $\det B = -\det A = 4$, $\det C = \det D = \det A$, $\det E = -3\det A = 12$.

9.3 És $\det(A) = -2, \det(B) = 2$.

(a) $\det(A+B) = -4 \neq \det(A) + \det(B)$.

(b) $\det(AB) = -4 \det(A)\det(B)$.

(c) $\det(A^2) = 4 = (\det(A))^2$

(d) $\det(A^{-1}) = -1/2 = 1/\det(A)$.

(e) $\det(2A) = -16 \neq -4 = 2\det(A)$.

(f) $\det(17A) = -9826 = 17^3 \det(A)$.

9.4 $a = \pm 1$.

Tema 10: Sistemes d'equacions lineals

10.1

(a) $x = 1, y = -1$.
(b) $x = 1, y = 2, z = 2$.
(c) Sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat, i solució $x = 1 - 2\lambda, y = 3\lambda - 2,\ z = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$.
(d) Sistema incompatible.

10.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriu del segon sistema és la matriu ampliada del primer sistema. La matriu del tercer sistema és la transposada de la matriu del segon. Només el primer i el tercer sistemes són compatibles determinats.

10.3

(a) $\left\{\begin{array}{lll} x & +2y & = 4 \\ -x & +3y & = 16 \end{array}\right.$, sistema compatible determinat amb solució: $x = -4, y = 4$.

(b) $\left\{\begin{array}{llll} x & +2y & +4z & = 0 \\ -x & +3y & +16z & = 0 \end{array}\right.$; sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat, i solució: $x = 4\lambda, y = 4\lambda, z = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $\left\{\begin{array}{lll} x & -y & = 0 \\ 2x & +3y & = 0 \\ 4x & +16y & = 0 \end{array}\right.$, sistema ćompatible determinat amb solució: $x = 0, y = 0$.

10.4

(a) Si $a \neq -6$, el sistema és compatible determinat. Si $a = -6$ el sistema és incompatible.

(b) Si $a \neq 0, 1$ el sistema és compatible determinat Si $a = 0$ el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

10.5 El sistema admet la solució $x = y = z = 1$ quan $a = 0$ o $a = 1$, i aquesta és l'única solució només quan $a = 0$.

10.6 Els tres nombres són $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}$.