MATEMÀTIQUES I
Escola Universitària d'Enginyeria Tècnica Industrial de Barcelona

Francesc Pozo, Núria Parés, Yolanda Vidal
http://bibliotecnica.upc.es/gimel

Matrius, determinants i sistemes d'equacions lineals

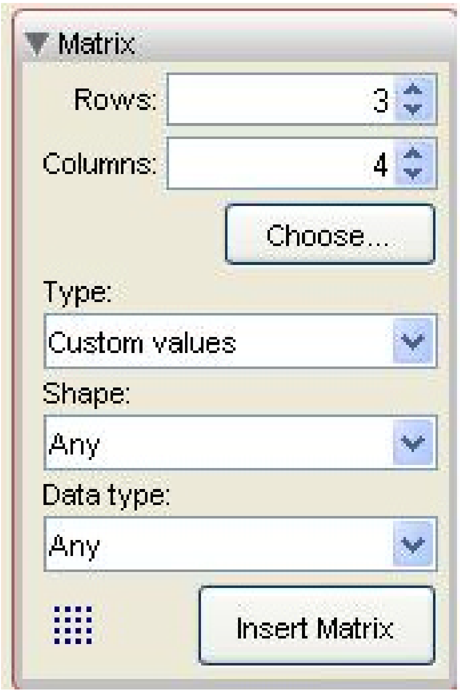
Objectius:

- **Usar el Maple per realitzar càlculs amb matrius i resoldre sistemes lineals.**
- **Aprendre a usar les maplets que ajuden a resoldre pas a pas problemes de matrius i sistemes.**

Definició de matrius

Definició de matrius utilitzant la paleta Matrix

Una manera d'introduir una matriu en maple és utilitzant la paleta Matrix. Per introduir-la cal indicar el nombre de files (**Rows**) i de columnes (**Columns**):



Per defecte tindrem seleccionat el tipus **Custom values**, que ens permetrà introduir els valors que volguem un cop haguem premut **Insert Matrix**. Per introduir els diferents elements es fa utilitzant el tabulador.

$$\begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \end{bmatrix}$$

Comandes usuals per definir una matriu

Com s'ha pogut observar en l'exemple anterior, a l'intentar convertir la matriu a la notacio estàndard Math 1D el resultat que s'obté és: **Matrix(1..2,1..4,[])** i per tant només tenim control sobre el tamany de la matriu pero no sobre els valors de la matriu. Malgrat això ens diu que la comanda que s'ha d'utilitzar per definir una matriu és **Matrix**.

Finalment, hi ha una manera d'introduir matrius de manera ràpida usant els símbols $<$ i $>$.

Exemple: Definiu la següent matriu utilitzant la paleta. Feu-ho tant en notació Math 2D com en notació Math 1d.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Exemple: Definiu la matriu de l'exemple anterior directament en Math 1D mirant l'ajuda de **Matrix**.

Exemple: Busqueu a l'ajuda la comanda **MVshortcut** (referida a Matrix, Vector short cut) i definiu la matriu de l'exemple anterior usant la versió abreujada.

Quan definim una matriu amb el nombre de files o columnes superior a 10, el Maple ens mostra un quadre de dades de la matriu. Si la volem visualitzar, només cal que fem doble click sobre el quadre de dades i ens apareixerà en forma de taula. També podem veure el dibuix de la matriu canviant a la pestanya d'imatge (**image**).

Exemple: Definir usant les opcions de la paleta Matrix la matriu idenditat 50x50 i una matriu triangular superior 50x50 amb tots els valors 1.

Operacions algebraiques amb matrius

Operacions específiques de matrius i paquet (package) LinearAlgebra

Exemple: Considerem la matriu $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$. Amb el menú desplegable fent click al botó dret del mouse, calcular el seu determinant, traça i matriu inversa (anar a Standard Operations) i convertir-ho a Math 1D.

Les comandes que ens permeten calcular el determinant, la matriu inversa, la transposada i la traça són:
LinearAlgebra :- Determinant
LinearAlgebra :- MatrixInverse
LinearAlgebra :- Transpose
LinearAlgebra :- Trace
a les que podem accedir clicant sobre la matriu amb el botó dret. En les diverses opcions que ens apareixen cal seleccionar **Standard Operations**, que ens permet efectuar, entre d'altres, aquestes mateixes operacions.

La crida a aquestes comandes es fa primer cridant el paquet LinearAlgebra seguit de :- i la comanda. Això és degut a que les comandes no estan directament accessibles des de Maple. Per fer servir les comandes associades a l'àlgebra lineal sense haver de posar LinearAlgebra:- davant, cal carregar el paquet LinearAlgebra:
with(LinearAlgebra)

Si introduïm la comanda de càrrega del paquet sense cap indicació a la part final, o bé col·loquem el punt i coma de la forma clàssica, ens apareixerà en blau la llista de comandes que es poden fer servir Si no volem que ens aparegui el llistat cal col·locar dos punts al final de la línia: **with(LinearAlgebra)**

Un cop carregat el paquet és molt més senzill accedir a les comandes, per exemple:
Determinant(A) → Calcula el determinant de la matriu A
MatrixInverse(A) → Calcula la inversa de la matriu A
Transpose(A) → Calcula la transposada de la matriu A
Trace(A) → Calcula la traça de la matriu A

Maplets

Una Maplet és una finestra gràfica interactiva que, de forma visual i senzilla, permet a l'usuari accedir al Maple i realitzar càlculs, representar funcions, etc, sense haver d'utilitzar les comandes pròpies del format full de càlcul. En tot moment detalla les accions a realitzar, donant l'opció que l'usuari decideixi els passos a seguir o bé que utilitzi els suggerits pel programa (pas per pas o de cop), mostrant al mateix temps les respostes del sistema.

La manera més ràpida d'accedir als Tutorials d'Àlgebra Lineal és anar al menú:
Tools → Tutors → Linear Algebra

Per poder treballar amb les Maplets de l'àlgebra lineal també es pot fer des de línies de comandes carregant el paquet Student[LinearAlgebra]: **with(Student[LinearAlgebra])** o bé posant Student [LinearAlgebra]:-

Un cop carregat, hem d'introduir la comanda corresponent a la Maplet desitjada:

MatrixBuilder() → Proporciona una finestra interactiva per crear matrius d'un màxim de 5 x 5.
InverseTutor(M) → Maplet que permet, de forma interactiva, trobar la inversa d'una matriu quadrada M, en cas de tenir-la. Les dimensions de la matriu no poden ser superiors a 5 x 5.
LinearSolveTutor(M,b) → Maplet que permet trobar les solucions d'un sistema de forma interactiva. Cal introduir una matriu (M) d'un màxim de 5 x 5 i un vector (b) de termes

independents. A la primera finestra es demana triar el mètode de resolució: Gauss o Gauss-Jordan. A aquestes Maplets també s'hi pot accedir directament.
GaussianEliminationTutor(M,b) → Maplet que permet reduir la matriu d'un sistema (màxim de 5 x 5) mitjançant el mètode de Gauss i trobar les solucions del sistema. Es pot utilitzar introduint únicament la matriu per obtenir la matriu reduïda.
GaussJordanEliminationTutor(M,b) → Realitza les mateixes funcions que l'anterior però mitjançan el mètode de Gauss-Jordan.
LinearSystemPlotTutor(Am) → Mostra gràficament el sistema lineal corresponent. Cal introduir la matriu ampliada (Am) d'un màxim de 4 x 4. Si no s'introdueix, s'empra una per defecte que es pot modificar des de la pròpia Maplet.

Exemple: Donada la matriu i el terme independent d'un sistema d'equacions, observar el que fa la maplet GaussianEliminationTutor.

```
> M := <<1, 2, 1>|<2, 3, -4>|<4, 3, 2>>;
> b:=<1,2,3>;
> Am:=<M|<1,2,3>>;
> GaussianEliminationTutor(M,b);
```

Exemple: Useu la maplet de càlcul de matrius inverses per calcular la matriu inversa de:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sistemes d'equacions lineals

Resolució d'un sistema d'equacions lineals

La comanda **LinearSolve** és la que ens permet de manera immediata resoldre un sistema d'equacions.

Exemple: Resoleu el següent sistema d'equacions

$$2x - y = 1$$
$$x + y = 2$$

introduint la matriu del sistema (A) i el terme independent (b)

Resolució de sistemes pel mètode de Gauss i Gauss-Jordan

Com ja hem comentat en la secció anterior, a l'hora de fer exercicis a mà és molt útil fer servir les maplets que ens ajuden a realitzar pas a pas els càlculs. En particular, a l'hora de resoldre sistemes d'equacions són molt útils les maplets següents:
GaussianElimination → Realitza l'eliminació de Gauss en una matriu. S'obté un sistema amb matriu triangular superior.
ReducedRowEchelonForm → Realitza l'eliminació de Gauss-Jordan en una matriu. S'obté un sistema amb matriu diagonal.

Teorema de Rouché-Frobenius

Per poder saber quin tipus de sistema tenim, és necessari conèixer el rang de la matriu, el de l'ampliada i el nombre d'incògnites. El rang d'una matriu s'obté mitjançant la comanda: **Rank(A)**

Exemple: Comproveu que el sistema anterior és un sistema compatible determinat.

Exercicis autoavaluació

__NOTA:__ feu tots els exercicis tant en Math 2D com en Math 1D

__Exercici proposat 1:__ **Elements d'una matriu i operacions elementals**
Selecció d'elements d'una matriu:
A partir d'una matriu definida podem seleccionar un element d'aquesta matriu, files i columnes o una submatriu usant les comandes: **[,], Row, Column, SubMatrix** respectivament.
Suma de matrius, producte de matriu per escalar i producte de matrius:
Seguint els criteris de simplicitat, el Maple 10 ens permet efectuar diverses operacions emprant directament els operadors necessaris. De totes formes, per tal d'obtenir la màxima eficiència computacional quan ens trobem amb operacions més llargues, existeixen unes comandes específiques, tal com es mostra a continuació:
Suma de matrius: **A+B** // **Add(A,B)** // **MatrixAdd(A,B)**
Producte de matriu per escalar: **λ*A** // **Multiply(? ,A)** // **ScalarMultiply(A,?)**
Producte de matrius: **A.B** // **Multiply(A,B)** // **MatrixMatrixMultiply(A,B)**
Potències: **A^n** // **MatrixPower(A,2)**

- Definir una matriu aleatòria 3x3 usant la paleta i accedir a l'element 2,3 i a la seva tercera columna.
- Definir les dues matrius A i B següents i realitzar la següent operació:

$$9 \cdot A + (-18) \cdot B + A \cdot B - B^2$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} \quad , \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

COMANDES: [ ], Column, *, + , .

__Exercici proposat 2:__ **Tipus de matrius**

- Definir una matriu diagonal d'ordre 6 amb coeficients 2, 4, 6, 8, 10 i 12 amb la paleta i la seva versió en Math 1D usant la comanda **DiagonalMatrix**.
- Definir una matriu aleatòria 2x3 amb la paleta i usant la comanda **RandomMatrix**.
- Definir una matriu identitat 100x100 amb la paleta i usant la comanda **IdentityMatrix**. Visualitzar la matriu i verificar els valors de la diagonal.

COMANDES: DiagonalMatrix, RandomMatrix, IdentityMatrix

__Exercici proposat 3:__

- Introduir les matrius $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

• Mirar si és possible realitzar el producte de la matriu A per la transposada de B i, en cas de poder, calcular-lo.

COMANDES: Matrix, Transpose, . , Multiply

<u>Exercici proposat 4:</u> Canvi de notació d'un sistema

Per canviar un sistema de notació matricial a forma d'equacions i viceversa s'utilitzen dues comandes: **GenerateEquations** i **GenerateMatrix**.

• Donades la matriu A i el terme independent b escriviu el sistema en forma d'equacions

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

• Donat el sistema d'equacions següent, determinar la matriu, el terme independent, l'ampliada i la solució

$$2\,x + 3\,y = 1, z = 5, x - z = 3$$

COMANDES: Matrix, GenerateEquations, GenerateMatrix, augmented, LinearSolve.

<u>Exercici proposat 5:</u> Transformacions de fila (RowOperation) i de columna (ColumnOperation)

RowOperation(M,[i,j]) → Permuta la fila i amb la j

RowOperation(M,i,k) → Multiplica la fila i de la matriu M per k

RowOperation(M,[i,j],k) → Multiplica la fila j per k i ho suma a la fila i (substituim f_i per $f_i - k \cdot f_j$

Si al final de la comanda incloem l'opció **inplace=true**, la matriu M quedarà modificada.

• Definir una matriu 2x2. Modifiqueu-la afegint a la primera fila el doble de la segona.
• Definir una matriu 2x2. Modifiqueu-la afegint a la segona columna el doble de la primera.

<u>Exercici proposat 6:</u>

• Introduir la següent matriu: $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

• Reduir la matriu A a una matriu triangular superior
  a) De forma directa
  b) Utilitzant les transformacions elementals de matrius

COMANDES: Matrix, GaussianElimination, GaussianEliminationTutor, RowOperation

<u>Exercici proposat 7:</u>

Considerant el seguent sistema d'equacions:

$$\begin{gathered} x + 2 \cdot y + 4 \cdot z = -1 \\ -x - 3 \cdot y + 2 \cdot z = 3 \\ 5 \cdot x + y + 7 \cdot z = 6 \end{gathered}$$

• Canviar a notació matricial
• Resoldre el sistema

• Comprovar que els rangs de la matriu i l'ampliada són iguals al nombre d'incògnites

COMANDES: GenerateMatrix, LinearSolve, Rank

Exercici proposat 8:

Donades la següent matriu i terme independent:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

• Resoldre el sistema mitjançant el tutorial Gauss

• Resoldre el sistema mitjançant el tutorial Gauss-Jordan

COMANDES: GaussianElimination, ReducedRowEchelonForm