MATEMÀTIQUES I
Escola Universitària d'Enginyeria Tècnica Industrial de Barcelona

Francesc Pozo, Núria Parés, Yolanda Vidal
http://bibliotecnica.upc.es/gimel

Integració

Objectius:

- **Usar el Maple com a eina de càlcul de primitives i integrals**
- **Entendre la interpretació geomètrica de les integrals**

Primitiva d'una funció. Comanda *int*

Donada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ s'anomena primitiva de f qualsevol funció φ tal que

$$\varphi'(x) = f(x), \quad \forall\, x \in [a, b]$$

Observeu que si φ és primitiva de f, llavors $\varphi + C$ també, ja que $(\varphi + C)' = \varphi' = f$

La integral indefinida de f és el conjunt de totes les seves primitives.

El càlcul d'integrals es pot fer tant directament des de la paletta Expression amb la comanda adecuada com mitjançant les comandes següents:

- Integral indefinida: $\int f\, dx$ o bé **int(funció, variable_integració)**

Exemple: Arregleu les expressions anteriors per calcular la integral indefinida de la funció $f(x) = a\ x^3 + b\ x^2 - c^2 + d$ utilitzant la comanda int.
Feu el mateix exercici utilitzant la comanda oportuna de la paletta.

```
> f := x-> a*x^3+b*x^2+c^2+d;
> F := int(f1(x), x);
>
```

Maplet Integration Methods

La Maplet **Integration** serveix per calcular integrals pas a pas. Dóna la possibilitat de que l'usuari apliqui les regles d'integració (permet demanar ajudes en cada pas), que sigui el Maple qui ho vagi solucionant pas a pas (**Next Step**) o bé que ho solucioni tot de cop, tot i que ens mostrarà totes les passes realitzades (**All Steps**). El propi Maple ja avisa quan és possible aplicar la regla d'integració seleccionada.

La manera més ràpida d'accedir a aquesta Maplet és la següent:

Tools →Tutors→Calculus - Single Variable→Integration Methods

Exemple: Calcular la integral de la següent funció mitjançant la Maplet i mitjançant la comanda de la paleta

$$f(x) = \frac{x^2\left(1-2\cdot x^5\right)^3}{4} + \frac{x^2}{5}$$

Càlcul de les integrals pas a pas utilitzant l'ajuda Hint

Tot i que la Maplet **Integration Methods** ens permet calcular integrals pas a pas, no indica exactament quina propietat s'ha utilitzat.
Per exemple, quan es vol calcular la integral $\int x e^x \, dx$, el tutorial ens diu que cal aplicar la regla d'integració per parts, però no ens diu quina és la part de la funció que derivarem (u) i quina part integrarem (v).

Per això quan s'estudia com calcular les integrals, és molt útil saber utilitzar la comanda **Hint**.

Exemple: Busqueu a l'ajuda de la comanda Hint per veure quins paquets cal carregar per poder-la utilitzar.

Per utilitzar la comanda Hint, cal per tant executar les dues línies següents:

```
> with(Student[Calculus1]):
> infolevel[Student[Calculus1]] := 1:
>
```

Un cop definides aquestes dues línies, ja es pot procedir a calcular les integrals pas per pas.

Sota teniu un exemple de com es pot resoldre la integral anterior.

Exemple: Calcular la integral $\int x e^x \, dx$ utilitzant les comandes Hint i Rule.

PAS 1: definim la integral mitjançant la comanda **Int**. Ull amb la diferència entre la comanda **int** i la comanda **Int**.

```
> A:=Int(x*exp(x),x);
```

PAS 2: demanem al Maple mitjançant la comanda **Hint** que ens indiqui què cal fer per calcular la integral.

```
> Hint(A);
>
```

PAS 3: en el cas anterior, se'ns diu que cal utilitzar la regla d'integració per parts, on u=x i v=e^x. Amb aquesta informació ja podeu calcular la integral a mà.

PAS 4: per comprovar el resultat que haurieu d'obtenir després d'utilitzar la regla que us ha suggerit Maple, s'utilitza la comanda **Rule**, on diem que calculi la integral utilitzant l'ajuda anterior.

```
> Rule[parts, x, exp(x)](A);
>
```

PAS 5: en el cas de que encara es necessitin més passos per resoldre la integral es tornarien a repetir els passos anteriors.

PAS 6: per calcular el resultat final es pot utilitzar la comanda **value**.

```
> value(A);
>
```

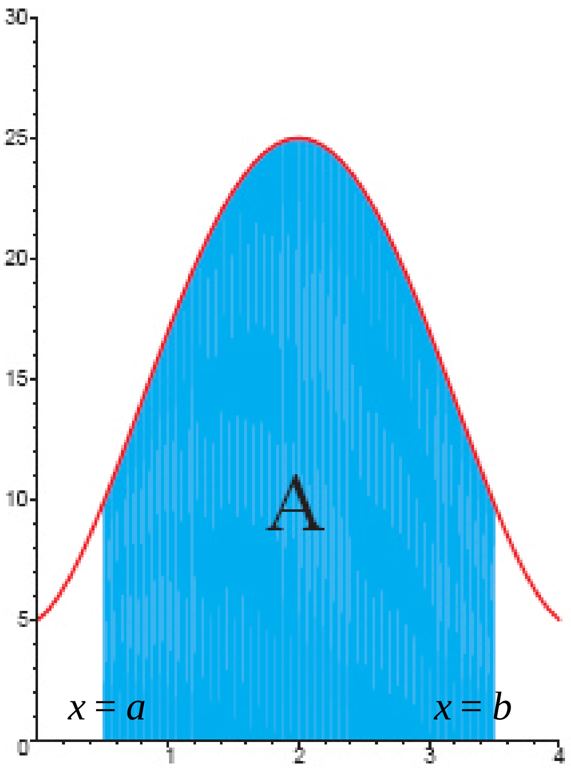
Exemple: Calculeu les següents integrals a mà, ajudant-vos mitjançant la comanda Hint i Rule per resoldre-les. En alguns casos veureu que es donen diverses opcions per resoldre les integrals. Calculeu la integral amb l'opció que us sigui més fàcil.

$$I_1 := \int x\, e^{x^2}\, dx \quad , \quad I_2 = \int \cos(x)\, e^{x}\, dx \quad , \quad I_3 = \int \sqrt{1 - x^2}\, dx \quad , \quad I_4 = \int \sin(x)^2\, dx$$

La integral d'una funció en un interval

La principal aplicació de les integrals és el càlcul d'àrees.

Donada una funció $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada i positiva, l'àrea limitada per la gràfica de f, l'eix d'abcisses les rectes dequacions $x = a$ i $x = b$ l'àrea A ve determinada per la integral definida $\int_a^b f\, dx$



Maple permet calcular les integrals definides utilitzant la comanda **int**.

```
> g1 := x->-(1/3)*x^2+3;
> int(g1(x), x=-1..2);
```

```
>
```

Aproximació de l'àrea d'una funció (aproximació de l'integral definida)

Una primera idea per aproximar l'àrea consisteix en fer una partició $p \in \mathcal{P}([a,b])$ de l'interval [a,b] en n subintervals

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

de manera que cada subinterval, $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ s'aproxima sota l'àrea de la corva mitjançant l'àrea del rectangle d'alçada $f(\xi_j)$ per algun $\xi_j \in [x_{i-1}, x_i]$.

Atenció: Per poder aproximar integrals amb Maple cal incloure el paquet **Student[Calculus1]**.

```
> with(Student[Calculus1]):
>
```

Depenent del rectangle escollit tindrem diferents aproximacions:

Aproximació de l'àrea superiorment

Dins de cada interval $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ calculem

$$M_i = \max\{f(x), x \in I_i\}$$

Fem la suma de l'àrea dels rectangles que determinen i obtenim una cota superior de la integral

$$S_p = M_0(x_1 - x_0) + M_1(x_2 - x_1) + \ldots + M_{n-1}(x_n - x_{n-1})$$

```
> n_part:=10;
> ApproximateInt(g1(x), x=-1..2, method=upper, partition = n_part);
> ApproximateInt(g1(x), x=-1..2, method=upper, partition = n_part,
  output=plot);
> ApproximateInt(g1(x), x=-1..2, method=upper, partition = n_part,
  output=animation);
>
```

Aproximació de l'àrea inferiorment

Dins de cada interval $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ calculem

$$m_i = \min\{f(x), x \in I_i\}$$

Fem la suma de l'àrea dels rectangles que determinen i obtenim una cota inferior de la integral

$$S_p = m_0(x_1 - x_0) + m_1(x_2 - x_1) + ... + m_{n-1}(x_n - x_{n-1})$$

```
> n_part:=10;
> ApproximateInt(g1(x), x=-1..2, method=lower, partition = n_part);
> ApproximateInt(g1(x), x=-1..2, method=lower, partition = n_part, output=plot);
> ApproximateInt(g1(x), x=-1..2, method=lower, partition = n_part, output=animation);
>
```

Aproximació de l'àrea per un punt qualsevol de l'interval

Dins de cada interval $I_i = [x_i, x_{i-1}]$ calculem

$$d_i = \left\{ f\left(\frac{(x_{i+1} + x_i)}{2} \right), x \in I_i \right\}$$

Fem la suma de l'àrea dels rectangles que determinen:

$$S_p = d_0(x_1 - x_0) + d_1(x_2 - x_1) + ... + d_{n-1}(x_n - x_{n-1})$$

```
> n_part:=10;
> ApproximateInt(g1(x), x=-1..2, method=midpoint, partition = n_part);
> ApproximateInt(g1(x), x=-1..2, method=midpoint, partition = n_part, output=plot);
> ApproximateInt(g1(x), x=-1..2, method=midpoint, partition = n_part, output=animation);
>
```

Altres opcions

Hi ha altres maneres d'aproximar la integral definida. Els diversos mètodes els podeu obtenir buscant a l'ajuda de la comanda **ApproximateInt**.

En particular, ja heu vist què fan les opcions method = upper , lower , midpoint

Exemple: Vegeu què fan les opcions method = left , random , right , trapezoid

Maplet ApproximateIntTutor

Els conceptes que hem anat veient en aquesta secció es poden veure de manera molt senzilla utilitzant la maplet **ApproximateIntTutor**.

Exemple: Utilitzeu la maplet anterior per aproximar mitjançant diversos mètodes la integral

$$\int_0^1 \sin(x)\,dx$$

Integral definida: integrable en el sentit de Riemann

Si $f : \lfloor a, b \rfloor \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció acotada en el seu domini, f és integrable si el màxim de les aproximacions superiors i el mínim de les aproximacions inferiors coincidixen. En aquest cas el valor obtingut és la integral de f en [a,b] i coincideix amb l'àrea limitada per la gràfica de f, l'eix d'abcises i les rectes d'equacions $x = a$ i $x = b$.

$$A = \int_a^b f\,dx$$

Càlcul amb Maple

- Integral definida: $\int_a^b f\,dx$ o bé **int(funció, x=variable d'integració,x=a..b)**

Càlcul de l'àrea delimitada per dues funcions

Siguin f i g dues funcions acotades i integrables en el sentit de Riemann en l'interval [a,b]. Recordem com calculem l'àrea que delimiten les dues corbes entre $x = a$ i $x = b$.

- Calculem els punts on interseccionen les dues funcions en l'interval [a,b]
- Determinem els subintervals on $f(x) > g(x)$ i el subintervals on $f(x) < g(x)$.
- L'àrea és la suma de les integrals de $f - g$ on f és més gran que g i les integrals de $g - f$ on g és més gran que f

Exemple: Siguin les funcions:

$$g(x) = x^2 - 2 \quad \text{i} \quad f(x) = 2\ x + 5$$

- Representar les dues funcions en uns mateixos eixos
- Trobar l'àrea de la regió definida per les dues corbes entre x=0 i x=6

PAS 1: representem les dues funcions

```
> with(plots):
> g:= x -> x^2 + 2:
  f:= x -> 2*x + 5:
> a:= plot(g(x), x = -1..7, thickness=2, color = red):
  b:= plot(f(x), x = -1..7, thickness=2, color = brown):
> display({a,b});
>
```

PAS 2: calculem els punts d'intersecció d'aquestes dues corbes utilitzant la comanda **solve.**

```
> solve(x^2 + 2 - 2*x - 5, x);
```

```
>
```

PAS 3: calculem l'àrea definida per les dues corbes entre $x = 0$ i $x = 6$

$$\int_0^3 \left(2\ x + 5 - x^2 - 2\right) \mathrm{d}x + \int_3^6 \left(x^2 + 2 - 2\ x - 5\right) \mathrm{d}x$$

```
> A1:=int(2*x + 5 - x^2 - 2, x = 0..3);
  A2:=int(x^2 + 2 - 2*x - 5, x = 3..6);
> A1+A2;
>
```

Càlcul de l'àrea delimitada per una regió

Exemple: Dibuixeu la regió definida per les tres corbes donades i trobeu l'àrea de la regió

$$x = 3\,y \quad , \ x + y = 0 \quad , \ 7\,x - 3\,y = 24$$

seguint els següents passos completant les següents línies.

```
> with(plots):
```

Entreu les funcions que defineixen les corbes:

```
> f:=
> g:=
> h:=
> a:= plot(f(x), x = -.5..7, thickness=2, color = brown):
> b:= plot(g(x), x = -.5..7, thickness=2, color = blue):
> c:= plot(h(x), x = -.5..7, thickness=2, color = magenta):
> display({a,b,c});
```

Necessitem trobar els punts d'intersecció:

```
> solve(f(x) = g(x), x);
> solve(h(x) = g(x), x);
> solve(h(x) = f(x), x);
```

Per tant l'àrea que volem calcular ve donada per:

$$\int_0^3 \left(\frac{x}{3} + x\right) \mathrm{d}x + \int_3^6 \left(8 - \frac{7\ x}{3} + x\right) \mathrm{d}x$$

Calculeu aquestes integrals:

```
>
>
```

Així quina és l'àrea total?

```
>
```

Exercicis autoavaluació

<u>Exercici proposat 1:</u>

- Calcular les següents integrals utilitzant la Maplet i la comanda de la paleta
- Calculeu-les ara a ma utilitzant la comanda Hint i Rule especificant la regal d'integració que heu fet servir.

a) $\displaystyle\int \frac{3\cdot x^2 - 2\cdot x}{x^3 - x^2 + 3}\, dx$

b) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x} + x^2\cdot e^x - 3\cdot\cos(x) \right) dx$

c) $\displaystyle\int x^5\cdot\ln(x)\, dx$

d) $\displaystyle\int e^{2\cdot x}\cdot\cos(x)\, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

f) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{1+\sin(x)}\, dx$

COMANDES: int, Hint, Rule

<u>Exercici proposat 2:</u>

• Aproximeu l'àrea de les següents funcions superior i inferiorment.
• Representeu-les
• Són integrables en sentit Riemann?

a) $\frac{1}{2}\cdot x^2 - 3\cdot x + 1$ en [-5,-3]

b) $tg(x)$ en $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

COMANDES: Student[Calculus1], ApproximateInt, method=lower, method=upper, output=plot, evalf

<u>Exercici proposat 3:</u> Area entre dues corbes

Donades les funcions $f(x) = x^2 - 1$ i $g(x) = 4\cdot x - 4$ calculeu l'àrea de la regió limitada per les dues corbes i les rectes $x = \frac{3}{2}$, $x = 3$ i representeu-la gràficament.

COMANDES: int, solve

<u>Exercici proposat 4:</u>

Sigui A la suma de les xifres del vostre DNI.

Trobeu el valor d per tal que l'àrea tancada per les paràboles $y = x^2 - d^2$ i $y = d^2 - x^2$ sigui A.
AJUDA: Feu un dibuix exemple de les paràboles. Determineu per d qualsevol on es tallaran les corbes. Calculeu l'àrea de la regió entre les dues corbes per a una d qualsevol. Després determineu d per tal que l'àrea sigui A.
COMANDES: int, solve, plot