MATEMÀTIQUES I
Escola Universitària d'Enginyeria Tècnica Industrial de Barcelona

Francesc Pozo, Núria Parés, Yolanda Vidal
http://bibliotecnica.upc.es/gimel

Funcions, límits i continuïtat

Objectius:
- **Usar el Maple per representar gràficament funcions i estudiar-les. Càlcul de límits.**

Definició de funcions i representació gràfica

Definició: per definir una funció podem utilitzar les paletes adequades (dins del menú expression) o introduir manualment la comanda:

Funcions d'1 variable: $f := x \rightarrow y$ o bé:

```
> f := x -> y;
```

Funcions de diverses variables: $f := (x1, x2) \rightarrow y$ o bé:

```
> f := (x1,x2) -> y;
```

Funció definida per parts: $\begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ o bé:

```
> piecewise(x<0,-x,x>0,x);
```

Representació: per representar gràficament una funció tenim diverses opcions:

- **plot**: es pot cridar de dues maneres

1. **plot(f(x),x=a..b)** Aquesta opció crea una representació en 2D i permet indicar els rangs de representació horitzontal i vertical (**plot(f(x),x=a..b,y=c..d)**), així com diverses opcions de representació (ex: **plot(f(x),x=a..b,title="Funció")**).

2. Un cop hem definit una funció f(x) la cridem mitjançant la comanda **f(x)**. Cliquem amb el botó dret sobre la funció i seleccionem la opció **plots** i a continuació **2D** o **3D**.

• **Plot Builder**: es tracta d'una finestra interactiva que permet definir i representar una funció en 2D i 3D, indicant totes les seves característiques de representació d'una manera molt senzilla i visual. També hi ha diferents maneres d'accedir-hi:

1. Quan hem clicat amb el botó dret sobre la funció i seleccionat **plots**, triar l'opció de **Plot Builder**.

2. Anar al menú **Tools** de la barra d'eines, seleccionar **Assistants** i seguidament **Plot Builder**. En aquest cas caldrà introduir la funció en primer lloc.

Exemple: Definir la següent funció utilitzant les paletes: $g(s) = s^2 + \sqrt{|\ln(s)|}$

Exemple: Avaluar l'anterior funció per x=10, tant directament com usant la comanda **subs**

Exemple: Representar gràficament l'anterior funció en 2D mitjançant el Plot Builder. Les opcions han de ser les següents:

Rang horitzontal: -5..5
Rang vertical: 0..5
Títol: Representació 2D
Línia sòlida de 3 píxels
Color magenta

Maplet Curve Analysis

Recordem que una Maplet és una finestra interactiva que, de forma visual i senzilla, permet a l'usuari accedir al Maple i realitzar diferents accions sense haver d'utilitzar les comandes pròpies del format full de càlcul.

Per analitzar les gràfiques de funcions existeix la Maplet anomenada **Curve Analysis**, la qual també ens permet representar-les a la fulla de càlcul o document. La manera més ràpida d'accedir-hi és anar al menú:

Tools →Tutors→Calculus - Single Variable→Curve Analysis

Exemple: Realitzeu un estudi de màxims i mínims locals de la funció $g(s) = x^4 - 17\ x^3 - 51\ x^2 + 1377\ x - 2430$ entre -10 i 10 usant el Maplet Curve Analysis.

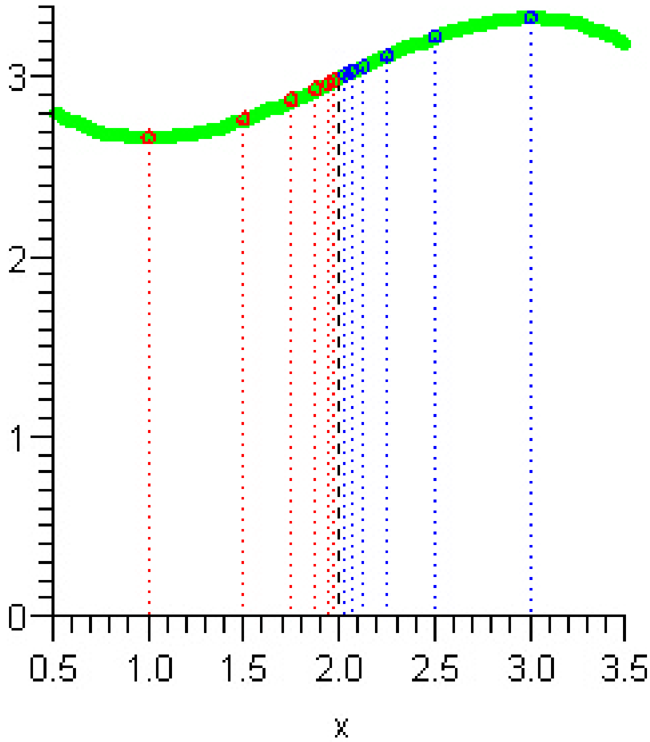
Límit d'una funció en un punt

El límit d'una funció en un punt ens dóna informació sobre el comportament de la funció al voltant d'aquest punt.

Considerem per exemple la funció:

$$f(x) = \frac{(x^2 - x + 4)\ (5 - x)}{6}$$

i el punt x=2. Si prenem punts propers a x=2, les imatges convergeixen a 3 com es pot veure a la figura i a la taula següents:



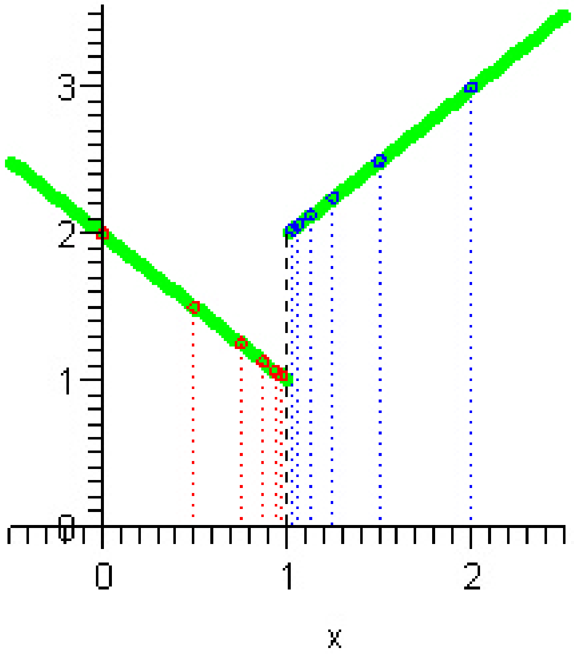
$$\begin{bmatrix} x & f(x) & x & f(x) \\ 1.900000000 & 2.950166667 & 2.100000000 & 3.049833333 \\ 1.990000000 & 2.995000167 & 2.010000000 & 3.004999833 \\ 1.999000000 & 2.999500000 & 2.001000000 & 3.000500000 \\ 1.999900000 & 2.999950000 & 2.000100000 & 3.000050000 \\ 1.999990000 & 2.999995000 & 2.000010000 & 3.000005000 \\ 1.999999000 & 2.999999500 & 2.000001000 & 3.000000500 \\ 1.999999900 & 2.999999950 & 2.000000100 & 3.000000050 \end{bmatrix}$$

Per tant, $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$.

En canvi, si considerem la funció

$$f := x \to \begin{cases} 2 - x & x < 1 \\ x + 1 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

en el punt x=1, els valors que pren la funció en agafar punts que s'apropen a x=1 per l'esquerra és 1, mentre que en agafar punts que s'apropen a x=1 per la dreta la funció tendeix a 2, com es pot veure a la figura i a la taula següents:



x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.9000000000	1.100000000	1.100000000	2.100000000
0.9900000000	1.010000000	1.010000000	2.010000000
0.9990000000	1.001000000	1.001000000	2.001000000
0.9999000000	1.000100000	1.000100000	2.000100000
0.9999900000	1.000010000	1.000010000	2.000010000
0.9999990000	1.000001000	1.000001000	2.000001000
0.9999999000	1.000000100	1.000000100	2.000000100

El càlcul de límits es pot fer tant directament des de la paletta Expression amb la comanda adecuada com mitjançant les comandes següents:

- Bidireccional: $\lim_{x \to a} f$ o bé **limit(funció, x=punt)**
- Unidirecional: $\lim_{x \to a^{+-}} f$ o bé **limit(funció, x=punt, direcció)**, on la direcció pot ser **right** o **left**.

Exemple: Definir mitjançant les paletes la següent funció

$$f := x \to \begin{cases} -1 & x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

i calcular el seu límit en el punt x=1 tant mitjançant les comandes com mitjançant la paletta. Si no

existeix calcular els límits laterals i veure que no coincideixen.
Representar gràficament l'anterior funció.

Maplet Limit Methods

La Maplet **Limit Methods** serveix per solucionar un problema de limits pas a pas. Dóna la possibilitat que l'usuari apliqui les regles que cregui convenients (pot solicitar pistes), que sigui el Maple qui ho vagi solucionant pas a pas (**Next Step**) o bé que ho solucioni tot de cop, tot i que ens mostrarà totes les passes realitzades (**All Steps**). La manera més ràpida d'accedir a aquesta Maplet és la següent:

Tools →Tutors→Calculus - Single Variable→Limit Methods

Exemple: Calcular els següents límits mitjançant la Maplet Limit Methods:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\quad,\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}\quad,\quad \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

Continuïtat

Una funció f(x) és contínua en un punt x=a si es compleix la igualtat

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

és a dir, si existeix el límit de la funció en el punt x=a i a més coincideix amb el valor de la funció en aquest punt.

Les discontinuïtats d'una funció es classifiquen en tres tipus:

- Evitable: $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq f(a)$

- De salt finit: $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$

$$\lim_{x\to a^-} f(x)\ \textit{no existeix}$$

-Essencial o de salt infinit:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)\ \textit{no existeix}$$

Exemple: Estudiar la continuïtat de la següent funció en x=0. De quin tipus de discontinuïtat es tracta?

$$f := x \rightarrow \begin{cases} \sqrt{|x|} & x < 0 \\ \sin(x) + 2 & x \geq 0 \end{cases}$$

Representar gràficament la funció per poder estudiar millor la continuïtat.

Teorema de Bolzano. Mètode de la bisecció

Teorema de Bolzano

El teorema de Bolzano diu que si tenim una funció contínua en un interval [a,b] tancat, i a més, f(a)·f(b)<0, és a dir, si la imatge d'a i de b tenen signes diferents, llavors f té un zero dins de l'interval [a,b] És a dir, existeix un punt c tal que f(c)=0.

Mètode de la bisecció

Es tracta d'un mètode molt senzill per determinar zeros de funcions contínues numèricament.

Suposem que volem trobar un zero de la funció f(x) i sabem a i b són tals que f(a)·f(b) < 0 on a<b .
Pel teorema de Bolzano sabem que existeix un punt entre a i b tal que f(c)=0.
Dividim l'interval en dues parts iguals i busquem en quin dels dos subintervals està el zero mirant quin és el valor de la funció en el punt (a+b)/2.
El zero estarà o bé en [a,(a+b)/2] o bé en [(a+b)/2,b]. Llavors repetim el mateix procés amb l'interval de longitud la meitat de l'inicial.
El procés es repeteix tantes vegades com calgui per arribar a la precisió demanada.

La rutina biseccio_construct mostra gràficament la determinació del zero d'una funció.

```
> read(`F_MAPLE_Funcions.mpl`);
> f:=x->(x-3)*1/(x+10)*10:
> biseccio_construct(f,-3,30,.15);
>
```

Exercicis autoavaluació

<u>**Exercici proposat 1:**</u> **comandes iscont i discont**
Hi han dues comandes que ens permeten trobar els punts de discontinuitat d'una funció i saber si la funció és contínua o no **iscont**, **discont**.
- la comanda **iscont** determina si les següents funcions són continues o no en l'interval que s'especifica. Retorna TRUE (veritat) si la funció és contínua en l'interval o FALSE (fals) si l'expressió no és contínua.
- la comanda **discont** retorna un conjunt de valors on la funció donada pot ser discontínua (però no té perquè necessàriament ser-ho)
• Demostrar que l'equació

$$\ln(x) = x^2 - 4\ x$$

té una solució real a l'interval [1,+8]. Determinar aquesta solució amb dos decimals correctes.

COMANDES: iscont, biseccio_construct

Exercici proposat 2:

• Classificar les discontinuïtats de la següent funció:

$$\begin{cases} -\frac{1}{25}\,(x+9)^2\,(x+3) & x < -4 \\ -\frac{2}{x+4}+2 & x < -2 \\ 0 & x = -2 \\ \frac{2}{x}-2 & x < 0 \\ x & x < 1 \\ -x-3 & 1 < x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

COMANDES: limit, iscont, discont

Exercici proposat 3:

• Calcular el següent límit:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2}}{x}$$

• Representar gràficament la funció mitjançant una línia de punts de color taronja amb una resolució de 2 píxels.

COMANDES: limit, Plot Builder

Exercici proposat 4:

• Calcular el límit de la funció següent en el punt 2 mitjançant la Maplet corresponent

$$\frac{(8 \cdot x^4 + 3 \cdot x - 1)}{(5 \cdot x^4 + 2 \cdot x - 1)}$$

• Representar la funció i determinar-ne els zeros mitjançant la Maplet corresponent

COMANDES: Limit Methods, Curve Analysis

Exercici proposat 5:

• Determinar el valor del paràmetre a per tal que la funció sigui contínua en tot el seu domini

$$f(x) = \frac{(x-a)^2 \sin(x)}{x-1}$$

COMANDES: limit