Francesc Pozo, Núria Parés, Yolanda Vidal
http://bibliotecnica.upc.es/gimel

Nombres Complexos i Operacions

Objectius:
- **Comprendre el concepte de nombre complex.**
- **Aprendre les quatre operacions bàsiques.**

Directrius: Cal executar la secció Codi. És imprescindible executar aquestes línies perquè s'utilitzaran més endavant en aquest tutorial.

0. Codi

```
read(`complex_numbers.mpl`);
with(plots):
```

1. Forma Binòmica

La forma binòmica d'un nombre complex és z=a+bi, on a és la part real i b és la part imaginària.

El símbol i representa la unitat imaginària. En maple es representa per I i verifica que:

```
I^2;
sqrt(-1);
```

Tot nombre complex z=a+bi es pot representar com un punt en el pla XY on la coordenada x és la part real i la coordenada y és la part imaginària.
La comanda ComplexPlot ens ajudarà a dibuixar els nombres complexos al llarg del tutorial. Aquesta comanda no funciona sense haver executat la comanda read(`complex_numbers.mpl`);

```
> z :=  4 + 6*I;
> ComplexPlot(z);
```

2. Forma Polar i Exponencial

Concepte de Forma Polar

Considerem un nombre complex en forma binòmica, és a dir: z=a+bi. Ja hem dit que tot nombre complex es pot representar com un punt en el pla.

```
> z :=  1 + I;
> ComplexPlot(z);
```

Aquest punt en el pla també es pot determinar donant la distància a l'origen del punt, que s'anomena mòdul, i l'angle que forma la hipotenusa del triangle que determina amb l'origen, que s'anomena argument.

```
> abs(z);
> argument(z);
```

En maple un nombre en forma polar s'introdueix amb la comanda polar. En el cas anterior tindriem:

```
> zpol:=polar(sqrt(2),Pi/4);
```

Un cop coneguts el mòdul i l'argument d'un nombre, també es pot representar en forma exponencial: $z = r\,e^{q I}$

```
> zpol:=sqrt(2)*exp(Pi/4*I);
```

Conversió de Forma Binòmica a Forma Polar

Donat un nombre en forma binòmica z=a+bi, per passar a forma binòmica cal determinar el seu mòdul i el seu argument.

El mòdul es determina segons: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
I l'argument és tal que verifica: $r\sin(\theta) = b$ i $r\cos(\theta) = a$

Amb maple donat un nombre en forma binòmica, per passar-lo a forma polar es pot fer pas a pas mitjançant les comandes abs i argument o directament amb la comanda convert.

```
> z:=sqrt(3)+I;
> r:=abs(z);
> theta:=argument(z);
> zpol:=polar(r,theta);
> zpol:=convert(z,polar);
> ComplexPlot(z);
```

Conversió de Forma Polar a Forma Binòmica

Donat un nombre en forma polar (mòdul=r, argument=θ), la seva forma binòmica és:

$$z = r\left(\cos(\theta) + \sin(\theta)\, I\right)$$

és a dir, la part real és $x = r\cos(\theta)$ i la part imaginària és $y = r\sin(\theta)$.

Amb maple donat un nombre en forma polar, per passar-lo a forma binòmica es pot fer introduint a ma la forma binòmica o directament amb la comanda evalc.

```
> z:=polar(2,Pi/6);
> zbin:=2*(cos(Pi/6)+sin(Pi/6)*I);
> zbin:=evalc(z);
```

Exercici proposat:

Escriu els següents nombres complexos:

(a) en forma polar: $1 - I,\ I + \sqrt{3}$

(b) en forma binòmica: $\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi I}{4}},\ 5\, e^{\frac{3\pi I}{5}}$

3. Operacions amb Nombres Complexos: suma i producte

La suma

Donats dos nombre complexos, per sumar-los es fa en forma binòmica i la suma té com a part real la suma de les dues parts reals i com a part imaginària la suma de les dues parts imaginàries:

```
z1:=2+3*I;
z2:=3+5*I;
suma:=(2+3)+(3+5)*I;
z1+z2;
```

El producte

Donats dos nombres complexos, la manera més senzilla de calcular el seu producte és en forma polar o exponencial i s'obté segons:

a) El mòdul és el producte dels mòduls.
b) L'argument d'aquest producte és la suma dels arguments dels factors.

```
z1:=polar(2,Pi/2);
z2:=polar(3,Pi/4);
producte:=polar(2*3,Pi/2+Pi/4);
simplify(z1*z2);
ComplexPlot(evalc(z1),evalc(z2),evalc(producte));
```

4. Operacions amb Nombres Complexos: potències (Fórmula de De Moivre)

Les potències

Igual que el producte de nombres complexos, la potenciació es fa en forma polar o exponencial.

Per elevar un nombre complex a una potència n, s'usa la fòrmula de Moivre: donat un nombre complex $z = r\,e^{\theta I}$, la seva potència n-èssima es calcula segons:

$$z^n = r^n\,e^{n\,\theta I}$$

És a dir, el mòdul s'eleva a n i l'angle es multiplica per n.

```
> z:=polar(2,Pi/5);
> quadratz:=polar(2^2,2*Pi/5);
> simplify(z^2);
> cubz:=polar(2^3,3*Pi/5);
> simplify(z^3);
```

En cas de que el nombre vingui donat en forma binòmica primer cal fer la conversió:

```
> z:=3+3*I;
> zpol:=convert(z,polar);
> quadratz:=polar((3*sqrt(2))^2,2*Pi/4);
> evalc(quadratz);
> z^2;
```

La potenciació d'un nombre complex z produeix nombres amb mòdul creixent si el mòdul inicial era mes gran que 1 o decreixent si era més petit que 1, que van rotant cap a l'esquerra o cap a la dreta.

```
> z:=polar(1.05,Pi/10);
> zbin:=evalc(z);
> display(polarplot( 1, color = gray),ComplexPlot(seq(zbin^n,n=
  1..4)));
> display(polarplot( 1, color = gray),ComplexPlot(seq(zbin^n,n=
  1..20)));
```

<u>Exercici proposat</u>:

Donat el nombre $z = 1 + I$ calculeu $z^2 + z^4 + z^8$.

5. Les arrells d'un nombre complex

Tot nombre complex té n arrels n-èssimes. Si denotem per z el nombre complex i per z_k, $k = 1..n$ les diferents arrels tenim que:

a) El mòdul de z_k és l'arrel n-èssima del mòdul de z

b) L'argument de z_k és l'argument de z entre n més $\frac{2\pi k}{n}$, $k = 1..n$

D'aquesta manera, les arrels estan situades en els vèrtexs d'un polígon regular d'n costats centrat en l'origen.

Anem a calcular les arrels terceres del nombre complex: $z = 4\sqrt{3} + 4I$. El primer que cal fer és passar el nombre a forma polar:

```
> z:=4*sqrt(3)+4*I;
> convert(z,polar);
> z1:=polar(root[3](8), Pi/6/3);
  z2:=polar(root[3](8), Pi/6/3+2*Pi/3);
  z3:=polar(root[3](8), Pi/6/3+2*2*Pi/3);
```

Si les representem podrem observar que les tres arrels són els vèrtexs d'un triangle equilàter.

```
> ComplexPlot(evalc(z1),evalc(z2),evalc(z3));
```

La comprovació de que les arrels són correctes és molt senzilla, només cal comprobar que al elevar el cub les tres arrels es recupera el nombre inicial.

```
> [evalc(simplify(z1^3)),evalc(simplify(z2^3)),evalc(simplify
  (z3^3))];
```

Exercici proposat:

Calculeu: $\left(1 - I\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{5}}$, $\left(1 - I\right)^{\frac{5}{4}}$

EXERCICIS DE CONSOLIDACIÓ

Exercici:

Escriviu els següents nombres complexos:

(a) en forma polar: $1 - I$, $I + \sqrt{3}$, -2.45, $-\frac{1\,I}{3}$, $\frac{1}{2} + \frac{I\sqrt{3}}{2}$

(b) en forma binòmica: $3\,\pi$, $8\,e^{\frac{\pi I}{3}}$, $\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi I}{4}}$, $5\,e^{\frac{3\pi I}{5}}$

Exercici:

Expressa en forma binòmica les arrels quartes de z=4.

Exercici:

Calcula $\dfrac{4 + 7\,I + (1 - I)\,(2 - I)}{(5 + I)^2}$, $\dfrac{10 - (1 - 4\,I - (2 - 3\,I))}{3\,I + \left(2 + \sqrt{3\,I}\right)\left(2 - \sqrt{3\,I}\right)}$, $\left(\dfrac{1 - I}{1 + I}\right)^6$.