Propietats dels determinants

1) Si multipliquem una columna (fila) per un escalar k el valor del determinant queda multiplicat per k
$$Det(c_1, \cdots, k \cdot c_i, \cdots, c_n) = k \cdot Det(c_1, \cdots, c_i, \cdots, c_n)$$

2) Si una columna (fila) és la suma de dos vectors el valor del determinant és la suma de dos determinants cadascun dels quals té un dels vectors
$$Det(c_1, \cdots, c_i + c_j, \cdots, c_n) = Det(c_1, \cdots, c_i, \cdots, c_n) + Det(c_1, \cdots, c_j, \cdots, c_n)$$

3) Un determninant amb dues columnes (files) iguals té valor 0
$$Det(c_1, \cdots, c_i, \cdots, c_i, \cdots, c_n) = 0$$

4) el determinant d'una matriu identitat val 1
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

5) Un determinant amb una fila o columna de zeros val 0

6) Si a una columna (fila) li sumem una combinació lineal de les altres columnes (files), el determinant no varia
$$Det(c_1, c_2, \cdots, c_n) = Det(c_1 + k_2 c_2 + \cdots + k_n c_n, c_2, \cdots, c_n)$$

7) si intercanviem dues columnes (files) el determinant canvia de signe
$$Det(c_1, \cdots, c_i, \cdots, c_j, \cdots, c_n) = -Det(c_1, \cdots, c_j, \cdots, c_i, \cdots, c_n)$$

8) Els vectors-columna (fila) d'un determinant són linealment independents si i només si el valor del determinant és diferent de zero

9) El valor del determinant d'una matriu és igual al de la seva trasposta
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Aquesta darrera propietat és la que fa que totes les altres propietats siguin equivalents tant per files com per columnes. Gràcies a aquestes propietats el càlcul de certs determinants es pot arribar a simplificar molt

Exemple

Calcula el següent determinant $\begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}$

Podem aconseguir un factor comú sumant totes les files a la primera

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+3 & k+3 & k+3 & k+3 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}$$

Tot seguit podem restar a cada fila la primera i desenvolupant per adjunts la primera columna

$$(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix} = (k+3)\cdot(k-1)^3$$

Exercicis

1) Calcula $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ *Resp.* 436

2) Calcula $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ *Resp.* -4