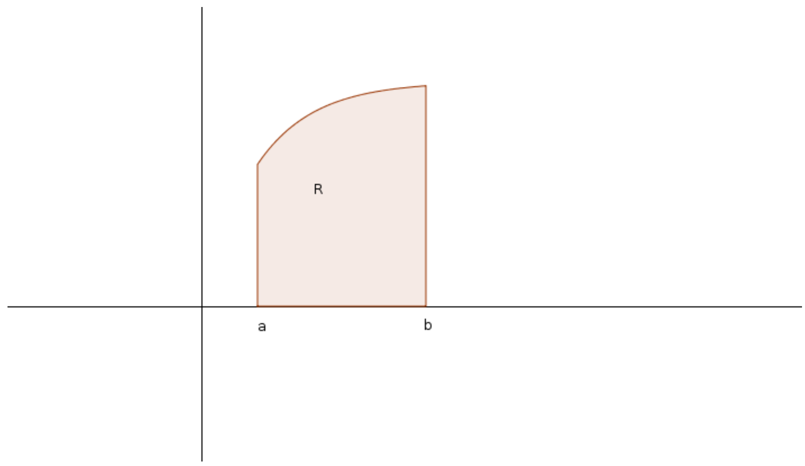
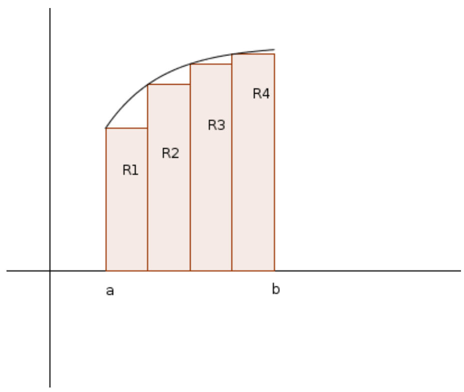
# Integral definida. Definició

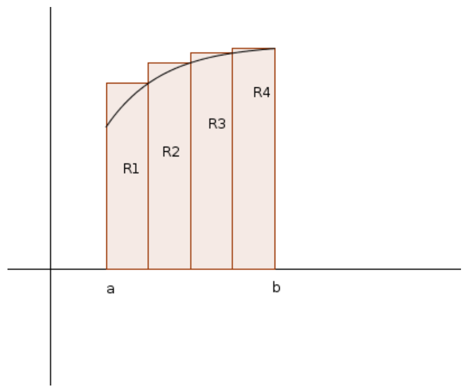
### Àrea d'un trapezi curvilini

Històricament el concepte d'integral sorgeix per la motivació de buscar mètodes per calcular àrees planes.
Suposem volem calcular l'àrea que hi ha sota una corba limitada per l'eix ox




Per fer-ho podem fer la següent aproximació, fraccionem el segment a-b en varis segments, a-$x_1$, $x_1$-$x_2$,...$x_{n-1}$-b i que cadascun d'aquests sigui la base d'un rectangle d'alçada o bé $f(x_{i-1})$ o bé $f(x_i)$




En el primer cas estem fent una aproximació per defecte i en el segon per excés, però en els dos podem dir que

$$R \approx R1 + R2 + R3 + R4$$

l'àrea que realment hem calculat és, respectivament pel cas per defecte i pel cas per excés,:

$L=\sum_{i=1}^{n} m_1 (x_i - x_{i-1})$ on $m_i$ és l'alçada dels rectangles per defecte

$U=\sum_{i=1}^{n} M_1 (x_i - x_{i-1})$ on $M_i$ és l'alçada dels rectangles per excés intuïtivament veiem que aquestes aproximacions seran més acurades com més petits siguin els intervals $x_i$-$x_{i-1}$, d'aquí obtenim la definició d'integral definida.

**Definició d'integral definida**

Considerem una funció f(x) acotada en [a,b], no cal que sigui contínua ni positiva.
Direm que f(x) és *integrable-Riemann* en [a,b] si existeix un nombre I per qualsevol partició del segment a-b que verifica

$$L \leq I \leq U$$

En el límit de particions infinitament petites tindrem L = I = U

El nombre I és *la integral de f(x) entre a i b* i s'escriu:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Aquesta definició fa que la integral definida en un interval coincideixi amb l'àrea que hi ha entre la corba i l'eix ox si f(x) és positiva, ja que estem fent uns rectangles infinitament petits, de base dx, d'alçada f(x), on x representa el punt on es troba la base del rectangle, i els sumem per tot l'interval [a,b]

**Condició de Riemann d'integrabilitat**

Una funció f(x) acotada en [a,b] és integrable si i només si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, una\ partició\ on \quad U - L < \varepsilon$$

El que vol dir aquesta condició és que per ser integrable una funció podem fer ε tant petit com volguem, llavors U = L = I, i per tant és integrable

com a corol·lari tenim que una funció contínua en [a,b] serà sempre integrable en aquest interval.

**Propietats de la integral definida**

- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- per tres nombres qualsevol a, b, c

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx$$

si dues de les integrals anteriors existeixen

- Les mateixes propietats de linealitat de la integral indefinida

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx \qquad \int_a^b k\,f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$$