Mètodes elementals d'integració. Integració per descomposició, canvi de variable i per parts.

Linealitat de la integral

Si F i G són primitives de f i g llavors $k_1 F + k_2 G$ és la primitiva de $k_1 f(x) + k_2 g(x)$, és a dir

$$\int (k_1 f(x)+k_2 g(x))\,dx = k_1 \int f(x)\,dx + k_2 \int g(x)\,dx$$

Integració per descomposició

Realitzant les operacions i/o fent servir les fórmules adequades podem transformar la funció adequadament per tal que la integral sigui calculable.

Exemple

Calcula la integral $\int \frac{x+1}{x}dx$

tenim $\int \frac{x+1}{x}dx = \int \frac{x}{x}dx + \int \frac{1}{x}dx = \int dx + \int \frac{1}{x}dx = x + \ln(x) + C$

Exemple

Calcula $\int \sin(3x)\cos(2x)\,dx$

tenim $\sin A \cos B = \frac{1}{2}(\sin(A+B)+\sin(A-B))$, llavors

$$\int \sin(3x)\cos(2x)\,dx = \int \frac{1}{2}(\sin(5x)+\sin(x))\,dx = \frac{1}{2}[\int \sin(5x)\,dx + \int \sin(x)\,dx] =$$

$$\frac{1}{2}(\frac{-\cos(5x)}{5} - \cos(x)) + C$$

Exercicis

- Calcula :
  - $\int x^e + e^x\,dx$. *Resp* $\frac{x^{e+1}}{e+1} + e^x + C$
  - $\int \cos^2(\frac{x}{2})\,dx$. *Resp* $\frac{1}{2}(x + \sin x) + C$
  - $\int \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$. *Resp* $\frac{1}{6}[(x+2)^{\frac{3}{2}} - (x-2)^{\frac{3}{2}}] + C$

Integració per canvi de variable

És un dels mètodes més usats, consisteix en substituir una part del que volem integrar per una nova variable, o per una funció d'una nova variable amb la finalitat que al fer la substitució i aplicar la regla de la cadena al diferencial dx obtinguem una integral més fàcil de calcular.

Exemple

Calcula $\int \sin(x)\cos(x)dx$

Realitzem el canvi de variable sin(x) = t, si derivem a tots dos costats tenim

cos(x) dx = dt, per tant $\int t\cos(x)\frac{dt}{\cos(x)}=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+C=\frac{\sin^2(x)}{2}+C$

Exemple

Calcula $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Sempre que tinguem ($1-x^2$) un possible canvi serà x= sin(t), on dx = cos(t) dt així

$\int \sqrt{(1-x^2)}\,dx=\int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt$, aplicant la identitat trigonomètrica $1-\sin^2(t)=\cos^2(t)$, tenim $\int \cos^2(t)dt=\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+C$

on $\frac{t}{2}+2\frac{\sin t\cos t}{4}+C=\frac{t}{2}+\sin t\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{2}+C$, i per tant desfent el canvi tenim:

$\frac{arc\sin x}{2}+x\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}+C$

Exercicis

- Calcula $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx$. *Resp* $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C$
- Calcula $\int x\sqrt{1-x^2}dx$. *Resp* $\frac{-1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$

Integració per parts

Es tracta de descomposar la funció a integrar en dues parts de manera que

$$\int u v'\,dx=uv-\int u' v\,dx$$

La demostració d'aquesta fórmula és trivial a partir de la derivació del producte(fer-ho com exercici)

Exemple

Calcula $\int \ln(x)\,dx$
agafarem u = ln(x) i v' = 1, on u' = 1/x i v = x

així

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int \frac{1}{x} x\,dx = x\ln(x) - x + C$$

Execicis

- Calcula $\int x\ln^2 x\,dx$. *Resp* $\frac{1}{2}x^2(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}) + C$
- Calcula $\int x\,2^x\,dx$. *Resp* $\frac{1}{\ln 2}x\,2^x - \frac{2^x}{(ln2)^2}$