DERIVADES

1.1 Concavitat. Convexitat. Punts d'inflexió

Definicions

Direm que una funció és *còncava* en un interval si les rectes tangents a la gràfica d'aquesta funció en cada punt d'aquest interval passen per sota de la gràfica al voltant del punt de tangència.

Direm que una funció és *convexa* en un interval si les rectes tangents a la gràfica d'aquesta funció en cada punt d'aquest interval passen per sobre de la gràfica al voltant del punt de tangència.

Definició

Un *punt d'inflexió* és un punt on la funció passa de còncava a convexa o de convexa a còncava.

Per tant, si la funció passa de convexa a còncava, això vol dir que la recta tangent passa d'estar per sobre a estar per sota de la gràfica, la qual cosa ens diu que que en els punts d'inflexió la recta tangent travessa la gràfica.

Si la funció és dues vegades derivable, el pendent de la recta tangent va disminuint ($f'' < 0$) a mesura que la funció convexa s'aproxima al punt d'inflexió i a partir d'aquest punt, el pendent de la recta tangent va creixent ($f'' > 0$). Per aquest motiu, cercarem els punts d'inflexió entre aquells on la segona derivada s'anul·li i després caldrà comprovar si té signes diferents a una banda i l'altra del punt.

Exemples

1) Busquem els punts d'inflexió i els intervals de creixement i decreixement de la funció: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x \Rightarrow f''(x) = 6x - 4$$
$$f''(x) = 0, \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Ara estudiem el signe de f'' al voltant de $x = \dfrac{2}{3}$:

$$f''(0) = -4 < 0$$

i per tant f és convexa a $x = 0$. De la mateixa manera,

$$f''(1) = 2 > 0$$

i per tant f és còncava a $x = 1$.

Deduïm que al punt $x = \dfrac{2}{3}$ hi ha un punt d'inflexió.

Per tant, la funció és convexa en $(-\infty, \frac{2}{3})$ i còncava en $(\frac{2}{3}, +\infty)$.

2) Busquem els punts d'inflexió i els intervals de concavitat i convexitat de la funció: $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$

$Dom(f) = R - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{2x^3-1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2x^3+2}{x^3}$$
$$f''(x) = 0 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = -1$$

És fàcil veure que al punt $x = -1$ hi ha un punt d'inflexió, ja que la funció passa de còncava a convexa.

Així mateix, veiem que a l'esquerra de $x = 0$, la funció és convexa, i a la dreta còncava. Malgrat això, el punt $x = 0$ no és punt d'inflexió, ja que $x = 0$ és una discontinuïtat de la funció $f(x)$.

Per tant, en $(-\infty, -1)$ la funció és còncava, en $(-1, 0)$ és convexa i en $(0, +\infty)$ és còncava.