

1. Demostrar que per a tot $n \in \mathbb{N}$, es compleix:

$$(1 + 2 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3.$$

2. Demostrar que per a tot $n \in \mathbb{N}$, es compleix:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n + 1)} = \frac{n}{n + 1}$$

3. Demostrar que per a tot $n \in \mathbb{N}$, es compleix:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

4. A partir de les igualtats:

$$1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 2 - \frac{1}{8}$$

deduïu si existeix una “lei general” al respecte, per qualsevol $n \geq 1$. En cas afirmatiu, enuncieu-la i demostreu-la per inducció.

5. Demostrar que $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ és múltiple de 9, per tot $n \geq 1$.

6. Demostrar que per a tot $n \geq 1$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} < 1$.

7. Proveu que $2^n \leq n!$ si $n \geq 4$.

8. Proveu que $n^2 \leq 2^n$ si $n \geq 4$.

9. Proveu que $2n + 1 \leq n^2$ si $n \geq 3$.

10. Proveu que $n^3 + 14n + 3$ és divisible per 3 $\forall n \in \mathbb{N}$.

11. Considerem la seqüència de nombres definida per la fórmula recursiva $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-1}^2$. Demostreu que $a_n = 1 - (1 - a_0)^{2^n}$.

12. Els nombres de Fibonacci es defineixen de manera recursiva segons:

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad \forall n \geq 2,$$

de manera que els primers nombres de Fibonacci són:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \dots$$

Demostreu les següents propietats d'aquests nombres:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_{3n} és parell.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_{4n} és divisible per tres.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}$ i $\forall m \in \mathbb{N}$, $f_{m+n} = f_{m+1}f_n + f_m f_{n+1} - f_m f_n$.

(d) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$.

(e) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n-1}f_{n+1} = f_n^2 + (-1)^n$.

13. Calculeu el valor de l'expressió $\frac{2 + 4 + \dots + 2n}{1 + 3 + \dots + (2n - 1)}$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ i demostreu-ho per inducció.

Ajuda 1: Demostreu primer que $2 + 4 + \dots + 2n = n(n + 1)$.

Ajuda 2: Trobeu una expressió similar a l'anterior pel denominador donant diferents valors a la n i demostreu-la.

14. Calculeu el valor de l'expressió $\frac{1 + 3 + \dots + (2n - 1)}{2 + 4 + \dots + 2n}$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ i demostreu-ho per inducció.

Ajuda 1: Demostreu primer que $2 + 4 + \dots + 2n = n(n + 1)$.

Ajuda 2: Trobeu una expressió similar a l'anterior pel numerador donant diferents valors a la n i demostreu-la.

- 23.** Calcula i representa en el pla complex les arrels segones, terceres, quartes i cinquenes de $z = 1$. Comproba que la suma de les arrels quartes de la unitat dóna 0.
- 24.** Expressa en forma binòmica les arrels quartes de $z = 4$.
- 25.** Una de les arrels cúbiques d'un nombre complex és $1 \frac{\pi}{3}$. Calcula aquest nombre complex i les altres dues arrels.
- 26.** Resol les equacions: $x^4 + 16 = 0$, $x^6 = i$ i $x^3 = -8i$.
- 27.** (a) Determineu dos complexos z_1 i z_2 , sabent que el seu quocient és 3, que la suma dels seus arguments és $\pi/3$ i que la suma dels seus mòduls és 8.
- (b) Una de les arrels cúbiques d'un cert nombre complex z és $3i$; calculeu aquest nombre complex z i la resta de les seves arrels cúbiques.
- 28.** Calculeu $z \in \mathbb{C}$ de manera que z , z^{-1} i $1 - z$ tinguin el mateix mòdul.
- 29.** Si z_1 , z_2 i z_3 són les arrels cúbiques de $z = 1 + i$, calculeu $z_1^6 + z_2^{12} + z_3^{24}$.
- 30.** Calculeu: $\sqrt[5]{1 - i\sqrt{3}}$, $\frac{(3 - 2i)(2 + 3i)}{3 - 4i}$, i^{29} , $(1 + i)^4$.
- 31.** Efectueu les operacions que s'indiquen:

$$\frac{2 - 3i}{(2 + 3i)(1 + i)} - \frac{3 + i}{4(2 - i)}, (1 - 2i)^{52}, \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{12}$$
- 32.** Calculeu: $\sqrt[5]{1 - \sqrt{3}i}$, $(1 - i)^{\frac{5}{4}}$, $\frac{\sqrt[3]{-1 + i}}{\sqrt{1 + \sqrt{3}i}}$.
- 33.** Tres nombres complexos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ són tals que: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ i $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Proveu que aquests complexos són vèrtexs d'un triangle equilàter inscrit en la circumferència de radi unitat centrada a l'origen.

34. Resoleu en \mathbb{C} les següents equacions:

(a) $x^2 + ix + 1 = 0$;

(b) $x^4 + x^2 + 1 = 0$;

(c) $z^3 - iz + (-1 + i) = 0$;

(d) $z^3 + (1 + i)z^2 + (-2 + i)z - 2i = 0$.

35. Determineu els nombres complexos z tals que:

(a) $|z| = \frac{1}{|z|} = |1 - z|$;

(b) $\bar{z} = z^{-1}$;

(c) $|1 - z|^2 \leq 1 - |z|^2$;

(d) $|z - \alpha| = |z - \beta|$, ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).