Els vectors

Els vectors

Distància entre dos punts del pla

Donats dos punts coordenats del pla, $P_1 = (x_1, y_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2)$, la distància entre aquests dos punts, $d(P_1,P_2)$, es calcula de la manera següent:

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Els vectors fixos del pla

Donats dos punts qualssevol P i Q, el vector fix d'origen P i extrem Q es designa com a $\overrightarrow{PQ}$; la seva representació gràfica és una fletxa la punta de la qual es troba sobre Q. Si $\overrightarrow{PQ}$ és un vector fix, essent $P = (x_1, y_1)$ i $Q = (x_2, y_2)$, llavors, si s'anomena

$$a = x_2 - x_1 \qquad b = y_2 - y_1.$$

a rep el nom de *primer component* del vector fix, i *b* rep el nom de *segon component* del vector.

Els vectors lliures del pla

Un vector lliure recull totes les característiques d'un vector fix, excepte l'origen i l'extrem:

- Té una direcció determinada.
- Té un sentit, indicat gràficament per la punta de la fletxa.
- Té una longitud.

Els vectors lliures es designen, generalment, amb una lletra minúscula coronada amb una petita fletxa al capdamunt. Per exemple, un vector lliure es pot denominar $\vec{v}$. Per a determinar un vector lliure només cal conèixer-ne els components. Per això, un vector lliure s'expressa com un parell ordenat format per aquestes components.

Operacions entre vectors

- La suma de vectors
  Dos vectors es poden sumar sumant els seus components corresponents. La representació gràfica de la suma de vectors es basa en la llei del paral·lelogram.
- El producte d'un nombre per un vector
  Per a multiplicar un nombre per un vector s'ha de multiplicar cada component del vector per aquest nombre. És fàcil comprovar que aquesta operació multiplica la longitud del vector pel nombre. Si el signe del nombre és negatiu, s'obté un vector de la mateixa longitud però en sentit contrari.
- El producte escalar de dos vectors, $\vec{u}$ i $\vec{v}$, es denota $\vec{u} \cdot \vec{v}$, i el seu resultat és igual a la suma dels productes de les coordenades corresponents. Si $\vec{u} = (u_1, u_2)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2)$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$.

La norma d'un vector

La norma d'un vector és igual a la seva longitud. El seu càlcul es fa a partir del producte escalar; així, si $\vec{u}$ és un vector, la seva norma és $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$. Les propietats bàsiques de la norma d'un vector són:

- $\|\vec{u}\| \geq 0$ per a qualsevol vector.
- $\|\vec{u}\| = 0$ només quan $\vec{u} = \vec{0}$.
- si α és un nombre qualsevol: $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \|\vec{u}\|$.
- si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són dos vectors qualssevol: $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$, i aquesta desigualtat s'anomena desigualtat triangular de Cauchy–Schwarz.

Angle entre vectors

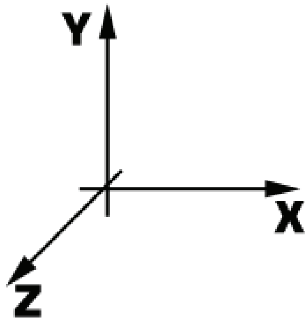
Es defineix l'angle α entre els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, com l'angle el cosinus del qual és:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

Els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són perpendiculars (formen 90º) quan el seu producte escalar és 0, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. Els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són paral·lels (formen 0º o 180º) quan $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.

Representació gràfica en l'espai

El procediment per a representar punts en l'espai és molt semblant al que se segueix en el pla; a l'espai només cal afegir-hi una coordenada per a tenir les tres dimensions cobertes: altura, amplària, profunditat.



Eixos de la representació en l'espai

Un punt en l'espai es representa per tres coordenades P = (x,y,z); cadascuna d'elles assenyala la posició en l'eix corresponent.

- Distància entre dos punts, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$:

  $$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

Els vectors lliures de l'espai s'expressen amb una terna de nombres, compleixen les mateixes propietats que els vectors del pla i les operacions són les mateixes.

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

- El producte escalar entre dos vectors del pla:

  $$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 + u_3\cdot v_3$$

- La norma d'un vector de l'espai es defineix:

  $$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

- L'angle entre vectors es troba calculant el cosinus d'aquest angle:

  $$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

  Evidentment, dos vectors de l'espai són perpendiculars si el seu producte escalar és 0, i dos vectors de l'espai són paral·lels si el valor absolut del seu producte escalar és igual al producte de les seves normes.

La història dels vectors

La llei del paral·lelogram per a l'addició de vectors és tan intuïtiva que el seu origen és desconegut. Podria haver aparegut en un treball ara perdut d'Aristòtil (384-322 aC), i es troba en la *Mecànica* de Hieró d'Alexandria (segle I dC). Va ser, també, un dels primers resultats del *Principia Mathematica* (1687) d'Isaac Newton (1642-1727). En els *Principia*, Newton va tractar de manera extensa el que ara es consideren les entitats vectorials (per exemple, velocitat, força), però mai el concepte de *vector*. L'estudi i l'ús de vectors no es va sistematitzar fins als segles XIX i XX.

Els vectors van sorgir a les primeres dues dècades del segle XIX amb les representacions geomètriques de nombres complexos. Caspar Wessel (1745-1810), Jean Robert Argand (1768-1822) i Carl Friedrich Gauss (1777-1855) van concebre nombres complexos com a punts en el pla de dues dimensions, és a dir, com a vectors de dues dimensions. En 1837, William Rowan Hamilton (1805-1865) va demostrar que els nombres complexos es podrien considerar parells de nombres (*a, b*). Aquesta idea era una part de la campanya de molts matemàtics, incloent-hi el mateix Hamilton, per a buscar una manera d'ampliar els "nombres de dues dimensions" a tres dimensions.

En 1827, August Ferdinand Möbius va publicar un llibre curt, *Càlcul baricèntric*, en el qual va introduir el segment dirigit que va denotar amb les lletres de l'alfabet; ja eren vectors, encara que no tenien aquest nom. En el seu estudi de centre de gravetat i la geometria descriptiva, Möbius va desenvolupar el càlcul amb aquests segments dirigits; els va sumar i va demostrar com es multiplicaven per un nombre.


William Rowan Hamilton (1805-1865)

Finalment, el mateix Hamilton va introduir en 1843 en concepte de *vector*, precisament com un segment orientat de l'espai.

El desenvolupament de l'àlgebra de vectors i de l'anàlisi de vectors tal com el coneixem avui va ser fet per primera vegada per J. Willard Gibbs (1839-1903) en les classes per als seus estudiants en la Universitat de Yale. Gibbs va intuir que els vectors proporcionarien una eina més eficient per al seu treball en la física. Així, doncs, començant el 1881, Gibbs va imprimir en privat notes sobre anàlisi dels vectors per als seus estudiants, que van ser distribuïts extensament entre els erudits dels Estats Units i d'Europa.

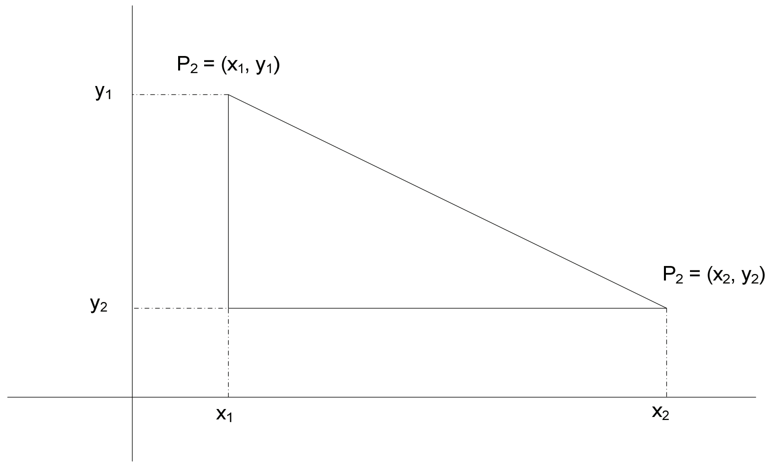
Com es calcula la distància entre dos punts?

> Per a calcular la distància entre dos punts coordenats qualssevol del pla, s'ha d'extreure l'arrel quadrada de la suma de les diferències al quadrat de cadascuna de les coordenades d'ambdós punts.

Donats dos punts coordenats del pla, $P_1 = (x_1, y_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2)$, la distància entre aquests dos punts, $d(P_1,P_2)$, es calcula de la manera següent:

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Això es pot verificar de manera senzilla observant aquesta representació:



La distància entre P_1 i P_2 és precisament la hipotenusa d'aquest triangle rectangle. Es pot observar que els catets d'aquest triangle rectangle mesuren $(x_2 - x_1)$ i $(y_1 - y_2)$, respectivament. Per tant, la hipotenusa del triangle rectangle o, el que és el mateix, la distància entre P_1 i P_2, ha de complir el teorema de Pitàgores:

$$d(P_1,P_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

És evident que $(y_1 - y_2)^2 = (y_2 - y_1)^2$. Per tant,

$$d(P_1,P_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

així, doncs,

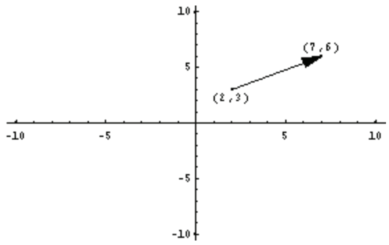
$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

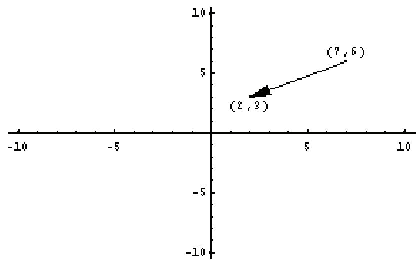
tal com ja s'havia anunciat.

Què és un vector fix del pla?

> Un vector fix d'origen en ell punt P i extrem en el punt Q es designa com $\overline{PQ}$; la seva representació gràfica és una fletxa la punta de la qual es troba sobre Q. El primer component del vector és la diferència de la coordenada *x* de Q menys la coordenada *x* de P; el segon component del vector és la diferència de la coordenada *y* de Q menys la coordenada *y* de P.

Donats dos punts qualssevol P i Q, el vector fix d'origen P i extrem Q, es designa com a $\overrightarrow{PQ}$; la seva representació gràfica és una fletxa la punta de la qual es troba sobre Q. Per exemple, el gràfic mostra el vector fix d'origen (2,3) i extrem (7,6). Com es pot comprovar, la representació és una fletxa que té l'origen en P i la punta en Q. S'ha de subratllar, a més, que no és el mateix el vector $\overrightarrow{PQ}$ que el vector $\overrightarrow{QP}$. Per exemple, el vector d'origen (7,6) i extrem (2,3) es troba en el gràfic de la dreta:





Si $\overrightarrow{PQ}$ és un vector fix, essent P = (x_1, y_1) i Q = (x_2, y_2), llavors, si s'anomena

$$a = x_2 - x_1 \qquad b = y_2 - y_1.$$

a rep el nom de primer component del vector fix, i *b* rep el nombre de segon component del vector.

En el cas de l'exemple anterior, en el qual P = (2, 3) i Q = (7, 6), el vector $\overrightarrow{PQ}$ té els components següents:

primer component igual a 7 – 2 = 5

segon component igual a 6 – 3 = 3

En canvi, el vector $\overrightarrow{QP}$ té aquests components:

primer component igual a 2 – 7 = –5

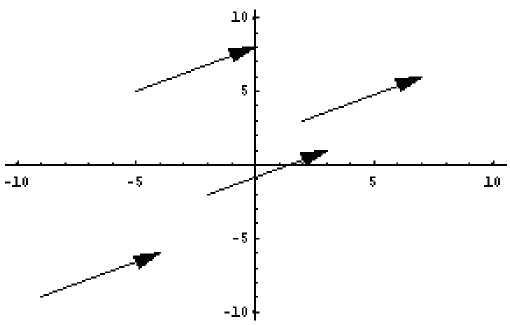
segon component igual a 3 – 6 = –3

S'ha de distingir, doncs, entre els components d'un vector de les coordenades d'un punt, encara que ambdues s'expressin en forma de parell ordenat.

Què és un vector lliure del pla?

> Un vector lliure recull totes les característiques d'un vector fix, excepte que l'origen i l'extrem té una direcció (determinada per la recta que determina), un sentit (representat per la punta de la fletxa), i una longitud concretes. En general, i per a simplificar, sempre que es faci servir el terme *vector*, s'entendrà un vector lliure.

És fàcil comprovar que els vectors amb els mateixos components són vectors paral·lels, amb el mateix sentit (de la punta de la fletxa) i que mesuren el mateix. Els vectors amb els mateixos components tenen moltes característiques comunes: totes excepte l'origen i l'extrem. Aquest fet permet definir un vector lliure; un vector lliure recull totes les característiques d'un vector fix, excepte el punt origen i l'extrem:



- Té una direcció determinada.
- Té un sentit, indicat gràficament per la punta de la fletxa.
- Té una longitud.

Per això, tots aquests vectors fixos considerats com a vectors lliures són iguals: tenen la mateixa direcció, sentit i longitud.

D'alguna manera es pot dir que tots aquests vectors són "còpies" idèntiques del mateix vector lliure. Cadascuna d'aquestes "còpies" s'anomena *representant* del mateix vector lliure.

Els vectors lliures es designen, generalment, amb una lletra minúscula coronada amb una petita fletxa al capdamunt, per a evitar confusions amb els vectors fixos. Per exemple, un vector lliure es pot denominar $\vec{v}$.

Per a determinar un vector lliure només cal conèixer-ne els components. Normalment, es posen en forma de parell ordenat. En el primer exemple, en el qual P = (2, 3) i Q = (7,6), el vector lliure que tenia per representant el vector fix $\overrightarrow{PQ}$, té per components a = 5 i b = 3. És a dir, si anomenem aquest vector $\vec{u}$, llavors $\vec{u}$ = (5,3). S'ha de tenir en compte que és diferent el vector lliure (5,3) que el punt (5,3): un punt només assenyala una posició al pla, mentre que un vector indica una direcció, un sentit i una longitud.

Usualment, i per a abreujar, els vectors lliures es denominen, simplement, vectors (els vectors fixos només s'estudien per a introduir els vectors lliures).

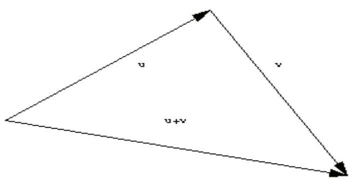
Quines són les operacions bàsiques entre vectors?

> Les operacions bàsiques entre vectors el resultat de les quals és altre vector són la suma i producte per un nombre. En canvi, el producte escalar entre vectors és una operació el resultat de la qual és un nombre. Aquest nombre és de gran ajuda per a establir la posició relativa de dos vectors.

Hi ha dues operacions bàsiques en les quals intervenen vectors, el resultat de les quals és un altre vector:

- La suma de vectors
  Dos vectors es poden sumar sumant els seus components corresponents. Per exemple, el vector $\vec{u} = (3,4)$ i el vector $\vec{v} = (2–, 6)$ se sumen així:

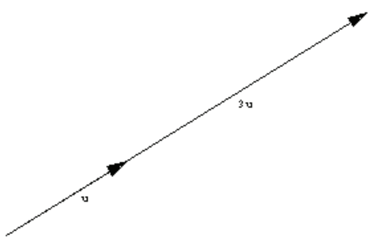
  $\vec{u}$ + $\vec{v}$ = (3 + 2, 4 – 6) = (5–, 2)

  La suma és molt fàcil d'entendre a partir de la seva representació gràfica: es tracta de situar en l'extrem del primer l'origen del segon; el resultat és el vector l'origen del qual és l'origen del primer i l'extrem del qual és l'extrem del segon. Aquest fet també es coneix com a *llei del paral·lelogram.*

- El producte d'un nombre per un vector
  Per a multiplicar un nombre per un vector s'ha de multiplicar cada component del vector per aquest nombre. Per exemple, si es multiplica el vector $\vec{u}$ anterior per 3 s'obté:

  3 · $\vec{u}$ = (9, 12)

  És fàcil comprovar que aquesta operació multiplica la longitud del vector pel nombre. En la representació del marge es pot comprovar. Si el signe del nombre és negatiu, s'obté un vector de la mateixa longitud, però en sentit contrari.
  Si $\vec{u}$ és un vector qualsevol, el vector $-\vec{u}$ s'anomena vector oposat de $\vec{u}$. A més, el vector $\vec{0} = (0,0)$ és l'element neutre de la suma de vectors perquè el resultat de la suma de qualsevol vector amb aquest vector $\vec{0}$ és el primer vector.

Hi ha una altra operació, que involucra dos vectors, però el resultat de la qual és un nombre real; es tracta del producte escalar de vectors.

- El producte escalar de dos vectors, $\vec{u}$ i $\vec{v}$, es denota $\vec{u}\cdot\vec{v}$, i el seu resultat és igual a la suma dels productes de les coordenades corresponents. Així, doncs, si $\vec{u}$ = (u_1,u_2) i $\vec{v}$ = (v_1,v_2), llavors, $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = $u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$. Per exemple, si $\vec{u}$ = (2, 4) i $\vec{v}$ = (–1,3), llavors, $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = 2 · (–1) + 4 · 3 = 10.
  El producte escalar de dos vectors és una operació molt important perquè té aplicacions molt variades, des del càlcul de l'angle entre vectors, fins a la posició de dues rectes en el pla.

Què és la norma d'un vector, i com es calcula?

> La norma d'un vector és igual a la seva longitud. El seu càlcul es fa a partir del producte escalar; així, si $\vec{u}$ és un vector, la seva norma és $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$. La norma d'un vector té diverses propietats: la norma de qualsevol vector sempre és positiva, i quan és 0 és perquè es tracta del vector nul; si es multiplica un vector per un nombre, la norma d'aquest nou vector és igual al mòdul del nombre per la norma del primer vector; finalment, la norma de la suma de dos vectors sempre és menor o igual a la suma de normes.

La norma d'un vector, $\vec{u}$, és la mesura de la seva longitud. La norma es denota per $\|\vec{u}\|$ i es calcula utilitzant el producte escalar:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$

és a dir, la norma és l'arrel quadrada del producte escalar. Vegem que coincideix amb la idea de longitud del vector: si un vector $\vec{u}$ = (u_1,u_2), la seva longitud ha de ser la mateixa que la distància entre el punt de coordenades (u_1,u_2) i l'origen de coordenades. És a dir, la longitud d'$\vec{u}$ hauria de ser:

$$\sqrt{(u_1-0)^2+(u_2-0)^2} = \sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}}$$

Vegem que la definició de la norma s'ajusta a aquest valor:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{(u_1,u_2)\cdot(u_1,u_2)} = \sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}}$$

El resultat és, doncs, el mateix.

Les propietats bàsiques de la norma d'un vector són:

- $\|\vec{u}\| \geq 0$ per a qualsevol vector.
- $\|\vec{u}\| = 0$ només si $\vec{u} = \vec{0}$.
- si α és un nombre qualsevol: $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha|\|\vec{u}\|$. Això és fàcil de comprovar:
  $$\|\alpha\vec{u}\| = \|\alpha(u_1,u_2)\| = \|(\alpha u_1,\alpha u_2)\| = \sqrt{\alpha^2 u_1^{\,2}+\alpha^2 u_2^{\,2}} =$$
  $$= |\alpha|\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}} = |\alpha|\|\vec{u}\|$$
- si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són dos vectors qualssevol: $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$, i aquesta desigualtat s'anomena desigualtat triangular de Cauchy–Schwarz. És a dir, la norma de la suma de dos vectors és sempre menor o igual que la suma de les normes de cadascun dels vectors. Vegem-ho: si $\vec{u}$ = (u_1, u_2) i $\vec{v}$ = (u_1, u_2).

$$\begin{aligned}\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\| &= \sqrt{(u_1,u_2)+(v_1,v_2)} = \sqrt{(u_1+v_1,u_2+v_2)} = \\ &= \sqrt{\left(u_1+v_1\right)^2+\left(u_2+v_2\right)^2} = \\ &= \sqrt{u_1{}^2+2u_1v_1+v_1{}^2+u_2{}^2+2u_2v_2+v_2{}^2}\end{aligned}$$

$$\left\|\vec{u}\right\|+\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{u_1{}^2+u_2{}^2}+\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2}$$

Hem de demostrar, doncs, que

$$\sqrt{u_1{}^2+2u_1v_1+v_1{}^2+u_2{}^2+2u_2v_2+v_2{}^2} \le \sqrt{u_1{}^2+u_2{}^2}+\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2}$$

si elevem al quadrat els dos costats de la desigualtat:

$$\left(\sqrt{u_1{}^2+2u_1v_1+v_1{}^2+u_2{}^2+2u_2v_2+v_2{}^2}\right)^2 = u_1{}^2+2u_1v_1+v_1{}^2+u_2{}^2+2u_2v_2+v_2{}^2$$

$$\left(\sqrt{u_1{}^2+u_2{}^2}+\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2}\right)^2 = u_1{}^2+u_2{}^2+v_1{}^2+v_2{}^2+2\sqrt{u_1{}^2+u_2{}^2}\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2}$$

Com que ambdues expressions comparteixen $u_1{}^2+u_2{}^2+v_1{}^2+v_2{}^2$, hauríem de comprovar que la resta compleix:

$$2u_1v_1+2u_2v_2 \le 2\sqrt{u_1{}^2+u_2{}^2}\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2}$$

Si elevem de nou al quadrat:

$$\left(2u_1v_1+2u_2v_2\right)^2 = \left(2u_1v_1\right)^2+\left(2u_2v_2\right)^2+2\cdot 2u_1v_1\cdot 2u_2v_2$$

$$\left(2\sqrt{u_1{}^2+u_2{}^2}\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2}\right)^2 = 4\left(u_1{}^2+u_2{}^2\right)\left(v_1{}^2+v_2{}^2\right)$$

Les dues expressions comparteixen $\left(2u_1v_1\right)^2+\left(2u_2v_2\right)^2$: per tant, s'ha de demostrar que:

$$2\cdot 2u_1v_1\cdot 2u_2v_2 \le 16u_1{}^2v_2{}^2+16u_2{}^2v_1{}^2$$

simplificant:

$$u_1v_1u_2v_2 \le u_1{}^2v_2{}^2+u_2{}^2v_1{}^2$$

posant el primer membre en el segon:

$$0 \le u_1{}^2v_2{}^2+u_2{}^2v_1{}^2-u_1v_1u_2v_2 = (u_1v_2-u_2v_1)^2$$

Però aquesta última expressió és correcta, $0 \le (u_1v_2-u_2v_1)^2$, ja que qualsevol nombre al quadrat és més gran o igual a 0. Per tant, l'expressió inicial també és certa: $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\| \le \left\|\vec{u}\right\|+\left\|\vec{v}\right\|$.

Com es calcula l'angle entre dos vectors?

> Dos vectors formen un angle el cosinus del qual és igual al quocient entre el producte escalar dels vectors, dividit entre el producte de normes d'aquests vectors. En cas que el producte escalar dels vectors sigui 0, aquest cosinus serà 0 i, per tant, l'angle serà de 90º. És a dir, els vectors són perpendiculars si el seu producte escalar és 0. En canvi, si el valor absolut del producte escalar és igual al producte de normes, llavors ambdós vectors són paral·lels.

Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són dos vectors, es pot comprovar que:

$$-1 \leq \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \leq 1$$

ja que $\left|\vec{u} \cdot \vec{v}\right| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

Vegem-ho:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

$$\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

si elevem al quadrat:

$$\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)^2 = \left(u_1 v_1 + u_2 v_2\right)^2 = u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + 2u_1 u_2 v_1 v_2$$

$$\left(\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\right)^2 = \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 = \left(u_1^2 + u_2^2\right)\left(v_1^2 + v_2^2\right) =$$
$$= u_1^2 v_1^2 + u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2$$

En ambdós casos comparteixen $u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2$. Per tant, només hem de comprovar que $2u_1 u_2 v_1 v_2 \leq u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2$ o, el que és el mateix:

$$0 \leq u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 - 2u_1 u_2 v_1 v_2$$

però això és evident, com s'ha vist anteriorment, ja que:

$$u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 - u_1 v_1 u_2 v_2 = (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \geq 0$$

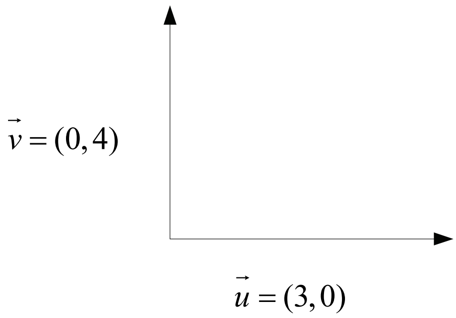
així, doncs:

$$-1 \leq \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \leq 1$$

Sabem que el cosinus d'un angle compleix aquesta condició. Per tant, definirem l'angle α entre els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ com l'angle el cosinus del qual és

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

És evident que quan aquest angle sigui de 90º, llavors el seu cosinus serà 0. En aquest cas, es diu que els vectors són perpendiculars. D'aquesta manera, dos vectors són perpendiculars quan el producte escalar entre aquests vectors és igual a 0. Un exemple senzill pot ser aquest:



Es pot observar que aquests vectors són perpendiculars; si es calcula el producte escalar:

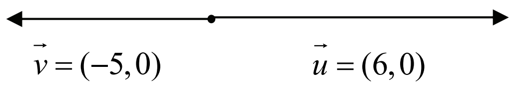
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3,0)\cdot(0,4) = 3\cdot 0 + 0\cdot 4 = 0$$

Efectivament, el seu producte escalar és 0

Un altre cas important es produeix quan el cosinus és 1 o –1 (i el valor de l'angle és 0º o 180º), és a dir, quan els vectors són paral·lels (amb el mateix sentit, o amb sentit oposat). Així, doncs:

$$\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right| = \left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|$$

Vegem un exemple:



El producte d'aquests vectors és igual:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (6,0)\cdot(-5,0) = -30$$

El producte de les seves normes és:

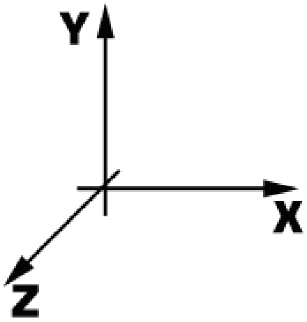
$$\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{36}\sqrt{25} = 6\cdot 5 = 30$$

Així, es compleix que $\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right| = \left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|$.

Com es representen els punts i els vectors en l'espai?

> La representació de punts en l'espai fa servir un sistema de coordenades amb tres eixos. Per això, un punt de l'espai té tres coordenades. La distància entre dos punts de l'espai es calcula de manera semblant a la de dos punts en el pla, tenint en compte la incorporació de la nova coordenada. De la mateixa manera, els vectors en l'espai tenen tres components, i les operacions entre vectors es fan de manera molt semblant a les operacions entre vectors en el pla.

El procediment per a representar punts en l'espai és molt semblant al que se segueix en el pla; a l'espai només s'hi ha d'afegir una coordenada més per a tenir les tres dimensions cobertes: altura, amplària, profunditat. Per això, un sistema de referència en l'espai consta de tres eixos: eix X, eix I i eix Z, tal com es mostra en la imatge,



Un punt en l'espai es representa per tres coordenades P = (x, y, z); cadascuna d'elles assenyala la posició en l'eix corresponent. Per a calcular la distància entre dos punts, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, s'ha de fer el següent:

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Es pot observar la gran semblança d'aquest càlcul amb el càlcul de la distància entre dos punts de l'espai.

Aquesta semblança s'estén també a la definició de vectors fixos i vectors lliures de l'espai. Els vectors lliures de l'espai s'expressen amb una terna de nombres (en lloc del parell ordenat del vector del pla), compleixen les mateixes propietats que els vectors del pla i les operacions són les mateixes, tenint sempre en compte que un vector de l'espai té tres components, i no dos. Per exemple, el producte escalar entre dos vectors del pla, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ és igual a:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

La norma d'un vector de l'espai es defineix de la mateixa manera, tenint en compte, novament, que els vectors de l'espai tenen un component més:

$$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

També l'angle entre vectors es calcula de la mateixa manera, calculant el cosinus d'aquest angle:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\|}$$

Evidentment, dos vectors de l'espai són perpendiculars si el seu producte escalar és 0, i dos vectors de l'espai són paral·lels si el valor absolut del seu producte escalar és igual al producte de les seves normes.

Vegem-ne un exemple: si $\vec{u} = (1,2,3)$ i $\vec{v} = (-1,2,-1)$, l'angle α que formen aquests dos vectors es compleix:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\|} = \frac{(1,2,3) \cdot (-1,2,-1)}{\left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\|} = \frac{-1 + 4 - 3}{\left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\|} = 0$$

Per tant, aquests vectors són perpendiculars, ja que el seu producte escalar és 0.