Aplicacions del càlcul integral

Aplicacions del càlcul integral

Càlcul de l'àrea d'una funció
Per calcular l'àrea tancada per una funció en un interval [*a, b*] amb l'eix X, s'ha de fer servir la integral definida.
Casos:

1. Si *f*(*x*) és una funció positiva en l'interval [*a*, *b*], llavors l'àrea que tanca aquesta funció i l'eix X, dintre de l'interval [*a, b*] és igual a:

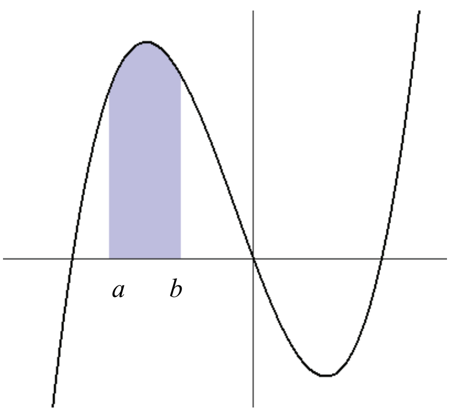
$$A = \int_a^b f(x)dx$$

2. Si *f*(*x*) és una funció negativa en l'interval [*a, b*], llavors l'àrea que tanca aquesta funció i l'eix X, dins l'interval [*a*, *b*] és igual a:

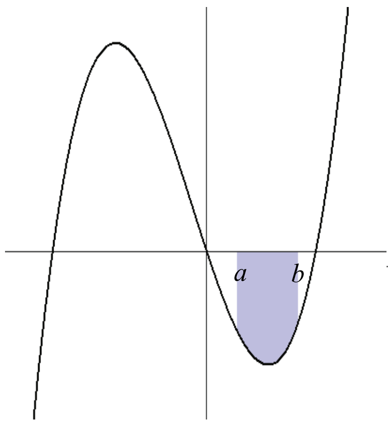
$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

3. Si *f*(*x*) és una funció qualsevol, la seva àrea entre els límits *a* i *b* s'ha de calcular a partir de la integral definida del valor absolut de la funció:

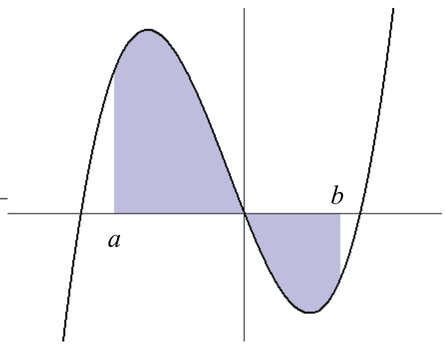
$$A = \int_a^b |f(x)|dx$$



cas 1



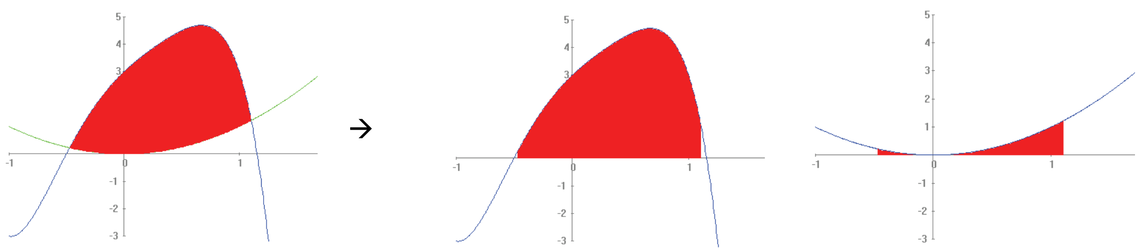
cas 2



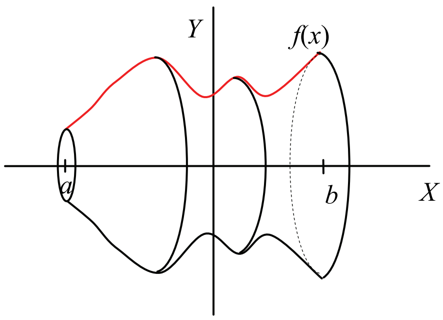
cas 3

4. Per calcular l'àrea que es tanca entre dues funcions *f*(*x*) i *g*(*x*) qualssevol en un interval [*a, b*], s'ha de calcular la integral definida del valor absolut de la diferència de les funcions en aquest interval:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$



Volum d'una figura de revolució
La integral definida permet trobar el volum d'una figura de revolució la generatriu de la qual és una funció positiva.

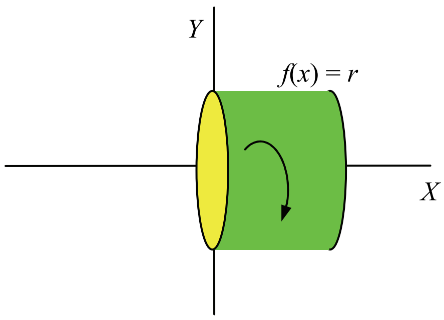


Si f és una funció positiva en un interval [a, b], el volum de la figura que s'obté en girar sobre l'eix d'abscisses aquesta funció, és a dir, la figura de revolució que té per generatriu la funció f, és igual a:

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x) \right)^2 dx$$

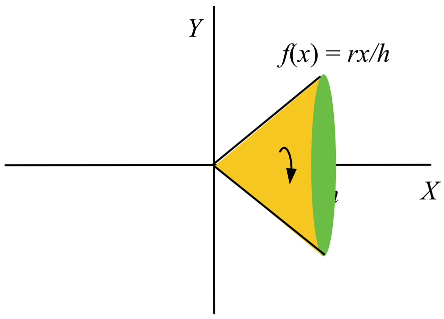
En el cas de les figures de revolució conegudes:

- Volum d'un cilindre:



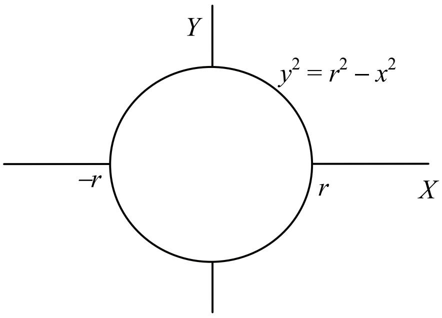
$$V = \pi \int_0^h \left(f(x) \right)^2 dx = \pi \int_0^h r^2 dx = \pi r^2 \left. x \right|_0^h = \pi r^2 h$$

- Volum d'un con:



$$V = \pi \int_0^h \left(f(x) \right)^2 dx = \pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h} \right)^2 dx = \left. \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \right|_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

- Volum d'una esfera:



$$V = \pi\int_{-r}^{r} y^2 dx = \pi\int_{-r}^{r}\left(r^2 - x^2\right)dx = \pi\cdot\left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} =$$

$$= \pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3} - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right)\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Volum d'una figura de revolució generada per l'àrea tancada per dues funcions

Per calcular el volum d'una figura de revolució generada per l'àrea tancada per dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$, en l'interval $[a, b]$ de manera que en aquest interval $f(x) \geq g(x) \geq 0$, només cal calcular el volum de la figura de revolució generada per $f(x)$ i restar-li el volum de la figura de revolució generada per $g(x)$.

$$V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx - \pi\int_a^b \left(g(x)\right)^2 dx = \pi\int_a^b \left[\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right] dx$$

En general, per calcular el volum d'una figura de revolució generada per l'àrea tancada per dues funcions qualssevol positives, $f(x)$ i $g(x)$, en l'interval $[a, b]$, s'ha de calcular la integral:

$$V = \pi\int_a^b \left|\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right| dx$$

Com es calcula l'àrea que tanca una funció positiva amb l'eix X?

> Per calcular l'àrea que tanca una funció $f(x)$ positiva en un interval $[a, b]$ amb l'eix X, només cal calcular la integral definida d'aquesta funció en aquest interval: A = $\int_a^b f(x)dx$

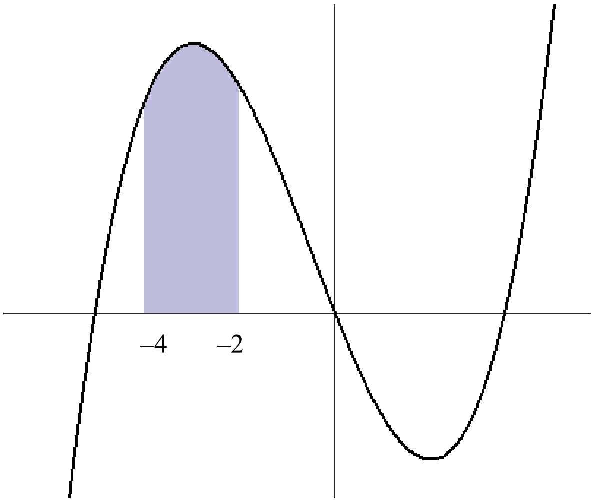
Si $f(x)$ és una funció positiva en l'interval $[a, b]$, llavors l'àrea que tanca aquesta funció i l'eix X, dintre de l'interval $[a, b]$, és igual a:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

com es desprèn de manera immediata de la definició d'integral. Per exemple, l'àrea de la funció $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ en l'interval $[-4, -2]$ és igual a:

$$A = \int_{-4}^{-2} f(x)dx = 2\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 36\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-4}^{-2} = 152$$

ja que la funció $f(x)$, en l'interval $[-4, -2]$ és positiva, tal com es pot apreciar en aquest gràfic:



Com es calcula l’àrea que tanca una funció negativa amb l’eix X?

> Per calcular l’àrea que tanca una funció negativa $f(x)$ en un interval $[a, b]$ amb l’eix X, només cal calcular la integral definida d’aquesta funció en aquest interval i canviar el signe al resultat:
> $A = -\int_a^b f(x)dx$

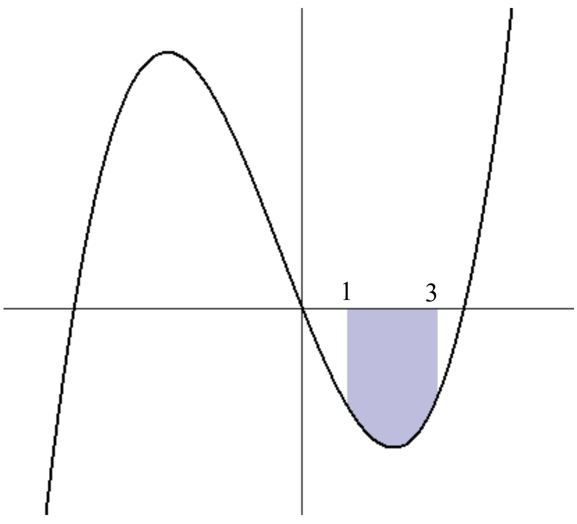
Si $f(x)$ és una funció negativa en l’interval $[a, b]$, llavors l’àrea que tanca aquesta funció i l’eix X, dintre de l’interval $[a, b]$, és igual a:

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

com es desprèn de manera immediata de la definició d’*integral*. Per exemple, l’àrea de la funció $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ en l’interval [1,3] és igual a:

$$A = -\int_1^3 f(x)dx = -\left(2\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 36\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 = 78$$

ja que la funció $f(x)$, en l’interval [1,3] és negativa, tal com es pot apreciar en aquest gràfic:



Com es calcula l'àrea que tanca una funció qualsevol amb l'eix X?

> Per calcular l'àrea que tanca una funció $f(x)$ qualsevol en un interval $[a, b]$ amb l'eix X, només cal calcular la integral definida del valor absolut d'aquesta funció en aquest interval: A = $\int_a^b |f(x)|dx$, és a dir, la funció, quan sigui negativa, s'ha de convertir en positiva.

Fins al moment s'ha calculat l'àrea d'una funció positiva o una funció negativa, en un interval $[a, b]$; per trobar l'àrea que es forma amb l'eix, de qualsevol funció $f(x)$, tingui aquesta valors positius o negatius, entre els límits a i b, s'ha de calcular la integral definida del valor absolut de la funció perquè tots els valors siguin positius.

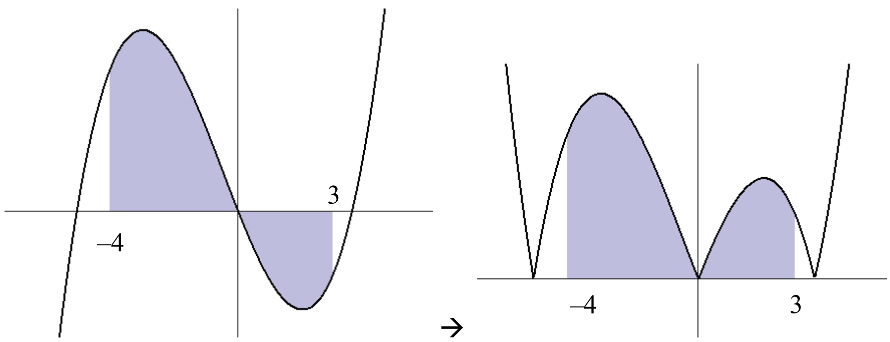
$$A = \int_a^b |f(x)|dx$$

L'àrea de les parts de la funció que quedessin sota l'eix X serien negatives. Per evitar-ho, es converteixen aquestes parts negatives en positives.

Per exemple, l'àrea de la funció $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ en l'interval $[-4,3]$ és igual a:

$$\begin{aligned} A = \int_1^3 |f(x)|dx &= \int_{-4}^0 f(x)dx + \int_0^3 -f(x)dx = \\ &= 2\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 36\frac{x^2}{2}\Big|_{-4}^0 + \left(-2\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 36\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^3 = \\ &= 224 + 94,5 = 318,5 \end{aligned}$$

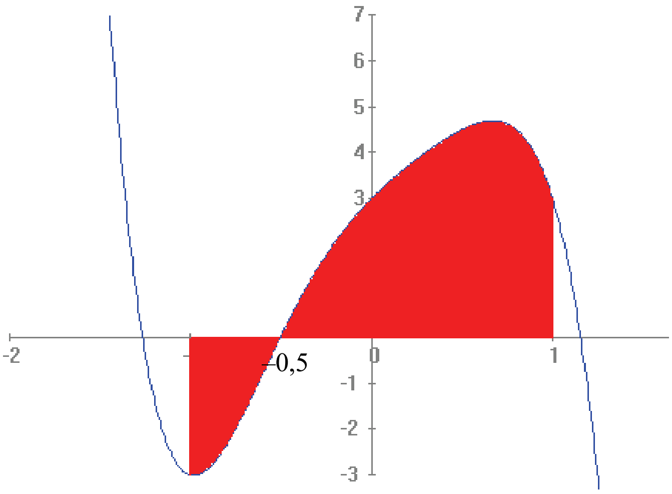
ja que la funció $f(x)$, en l'interval $[-4,0]$ és positiva, i en l'interval $[0,3]$ és negativa i, per tant, s'ha de convertir en positiva, tal com es pot apreciar en aquests gràfics:



Vegem un altre exemple: càlcul de l'àrea de la funció

$$f(x) = -4x^5 + 3x^3 - 3x^2 + 4x + 3.$$

en l'interval $[-1,1]$. La gràfica d'aquesta funció i l'àrea tancada és la següent:

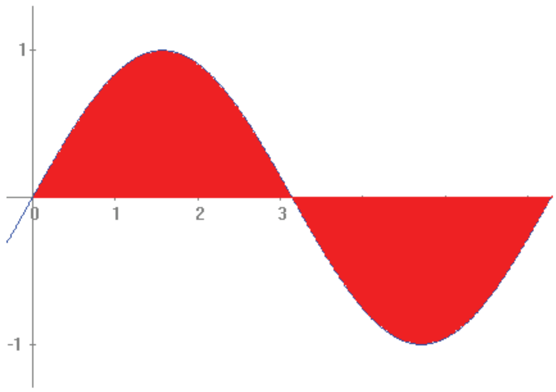


s'ha de partir la integral en dues parts: una fins a –0,5 i la resta, fins a 1. La primera s'ha de canviar de signe (perquè la funció en l'interval [–1, –0,5] és negativa); en canvi, en la segona part, com que tots els valors de la funció són positius, no s'ha de canviar de signe; és a dir:

$$\text{A} = -\int_{-1}^{-0,5} f(x)dx + \int_{-0,5}^{1} f(x)dx \simeq -(-0,9218) + 4,9218 = 5,8436$$

Com veiem, en molts casos, l'àrea és un nombre irracional i només es pot calcular de manera aproximada.

En el cas de la funció $g(x) = \sin x$, ja sabem que és positiva entre 0 i π, i negativa entre π i 2π; així, doncs, l'àrea entre $[0, 2\pi]$, tal com podem observar en aquesta il·lustració,



s'ha de calcular d'aquesta manera:

$$\text{A} = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} - \left(-\cos x\right)\Big|_{\pi}^{2\pi} = 2 - (-2) = 4$$

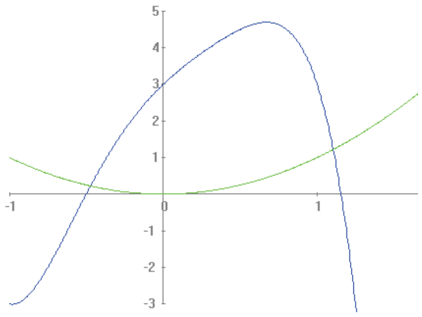
Com es calcula l'àrea que es tanca entre dues funcions en un interval determinat?

> Per calcular l'àrea que es tanca entre dues funcions $f(x)$ i $g(x)$ qualssevol en un interval determinat $[a, b]$, només cal calcular la integral definida del valor absolut de la diferència de les funcions en aquest interval:
>
> $$\text{A} = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx$$

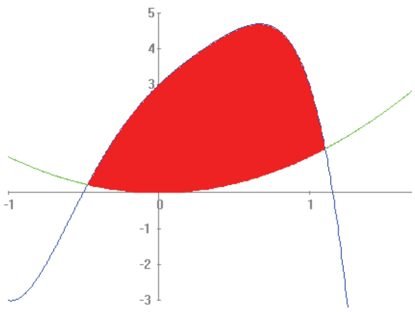
També es pot utilitzar la integració definida per calcular l'àrea compresa entre dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$ en un interval $[a, b]$. Aquesta àrea és igual a la integral definida del valor absolut de la diferència d'ambdues funcions:

$$\text{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

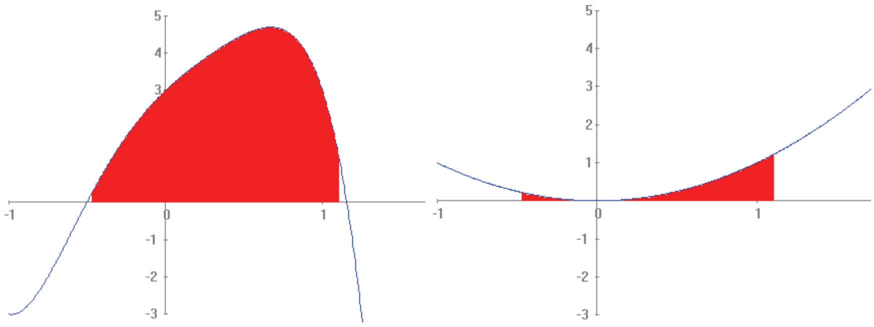
Per exemple, aquestes són les gràfiques de les funcions $g(x) = x^2$ i $f(x) = -4x^5 + 3x^3 - 3x^2 + 4x + 3$ representades conjuntament:



Per tant, l'àrea que tanquen entre els punts d'intersecció d'ambdues funcions:



Els punts d'intersecció són (–0,4725, 0,217951) i (1,1025, 1,267898). Per calcular l'àrea tancada entre aquestes dues gràfiques n'hi ha prou de calcular l'àrea de la qual es troba damunt, i restar-hi la que es troba a sota, tal com mostra aquesta doble il·lustració:



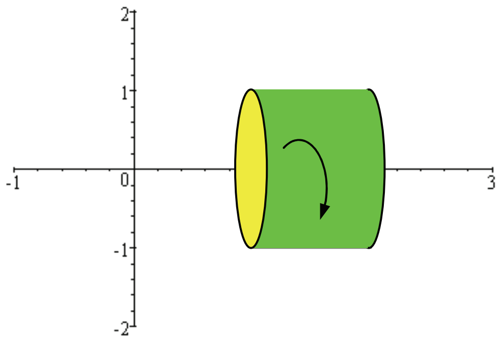
És a dir, per trobar l'àrea entre ambdues funcions, s'ha de restar l'àrea de la dreta a la de l'esquerra:

$$\mathrm{A} \simeq \int_{-0,4725}^{1,1025} f(x)dx - \int_{-0,4725}^{1,1025} g(x)dx \simeq 5,14839 - 0,48435 = 4,66404$$

Com es calcula el volum d'una figura de revolució generada per una funció positiva?

> Per trobar el volum d'una figura de revolució generada a partir del gir d'una funció positiva al voltant de l'eix X, en l'interval [*a, b*], s'ha de fer aquesta integral: $V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$. Per arribar a aquesta fórmula s'ha de comparar el volum de la figura amb el volum d'un con.

Si *f* és una funció positiva en un interval [*a, b*], el càlcul del volum de la figura que s'obté en girar sobre l'eix d'abscisses aquesta funció, és a dir, la figura de revolució que té per generatriu la funció *f*, requereix el càlcul integral. Vegem-ne un exemple senzill: si $f(x) = 1$, una funció constant, en l'interval [1,2], aquesta és la figura resultant:



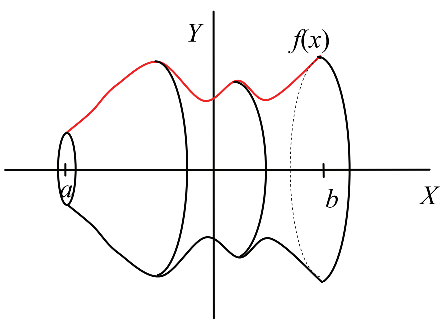
Evidentment, la figura resultant és igual a un cilindre de radi 1 i d'altura 1; per tant, el seu volum serà:

$$V = \pi r^2 h = \pi$$

Vegem que aquest resultat pot obtenir-se amb aquesta fórmula:

$$V = \pi\int_0^1 \left(f(x)\right)^2 dx = \pi\int_0^1 1^2 dx = \pi \cdot x\Big|_0^1 = \pi$$

Vegem que això es compleix per qualsevol funció positiva, $f(x)$, en un interval [*a, b*]. Es tracta de calcular el volum del cos de revolució que es genera en girar aquesta funció sobre l'eix X, tal com mostra aquesta gràfica:



Sigui $V(t)$ el volum de la figura engendrada en girar el tros de funció entre a y t; per tant, $V(t + h) – V(t)$ representa el volum engendrat pel tros de funció entre $f(t + h)$ i $f(t)$. Suposem que $f(t + h) > f(t)$. Així, doncs, el volum $V(t + h) – V(t)$ és més gran que el volum del cilindre la radi del qual de la base és $f(t)$ i altura h, i és més petit que el volum del cilindre el radi de la base del qual és $f(t + h)$ i l'altura, h:

$$\pi(f(t))^2 h \leq V(t + h) - V(t) \leq \pi(f(t + h))^2 h$$

Si ho dividim tot entre h, s'obté:

$$\lim_{h\to 0} \pi\left(f(t)\right)^2 \leq \lim_{h\to 0} \frac{V(t+h)-V(t)}{h} \leq \lim_{h\to 0} \pi\left(f(t+h)\right)^2$$

els límits d'ambdós extrems són iguals i, per tant, el límit que es troba en el centre també ha de ser igual:

$$\lim_{h\to 0} \frac{V(t+h)-V(t)}{h} = \pi\left(f(t)\right)^2$$

Per tant, la funció V és una primitiva de la funció $\pi(f(t))^2$, ja que la derivada d'aquella és igual a aquesta. En altres paraules:

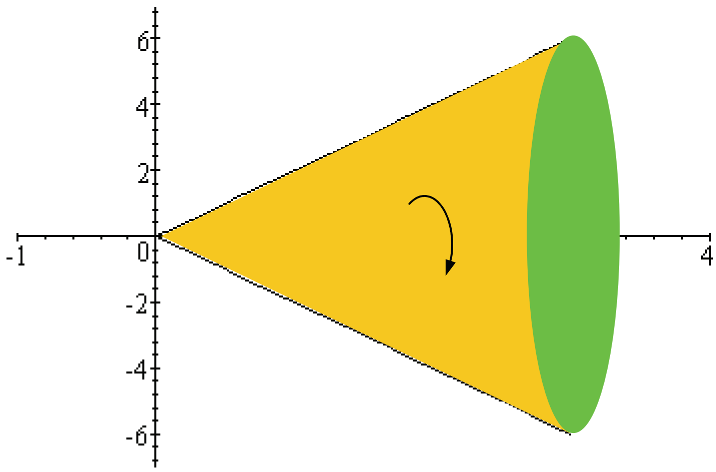
$$V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

Tal com s'havia afirmat al principi.

Com es calcula la fórmula del volum de les figures de revolució bàsiques?

> Les fórmules de les figures de revolució bàsiques es poden explicar a partir del càlcul del volum amb l'ajuda de la integral indefinida. En el cas del cilindre, la funció generatriu és una recta que passa per l'origen; en el cas de l'esfera, la funció generatriu és l'equació d'una circumferència.

Si la generatriu és la recta $f(x) = 2x$, estant la x entre [0,3], la figura resultant és el con següent:



si s'aplica la fórmula general del volum:

$$V = \pi\int_0^3 \left(f(x)\right)^2 dx = \pi\int_0^3 \left(2x\right)^2 dx = 4\pi \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = 4\pi\frac{3^3}{3} = 36\pi$$

el resultat és, doncs, el mateix si s'aplica la fórmula del volum del con: $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 3 = 36\pi$.

En el cas més general, si es vol buscar el volum d'un con d'altura h, i radi de la base r, la generatriu, $f(x)$, ha de complir que:

$$f(0) = 0 \qquad\qquad f(h) = r$$

per tant, la funció lineal generatriu és $f(x) = rx/h$. Per trobar el seu volum, s'ha d'integrar de 0 a h:

$$V = \pi\int_0^h \left(f(x)\right)^2 dx = \pi\int_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

com es pot veure, la fórmula coincideix amb la ja coneguda.

El mateix pot fer-se amb el volum d'una esfera. Per exemple, si una esfera està generada per una circumferència de radi 2, sabem que el seu volum és:

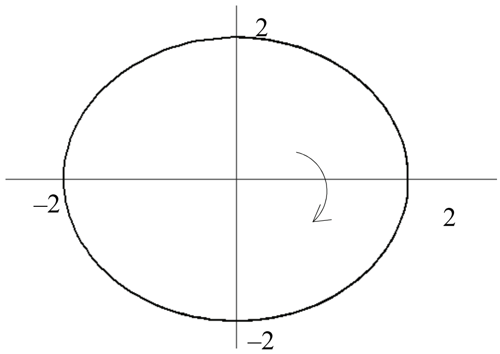
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 2^3 = \frac{32\pi}{3}$$

Utilitzem la fórmula del volum per comprovar-ho: l'equació de la generatriu d'una esfera de radi 2, és la circumferència següent:

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

per tant,

$$y^2 = 4 - x^2$$



En conseqüència, el seu volum és:

$$V = \pi\int_{-2}^{2} \left(f(x)\right)^2 dx = \pi\int_{-2}^{2}\left(4 - x^2\right)dx = \pi\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_{-2}^{2} =$$

$$= \pi\left(4\cdot 2 - \frac{2^3}{3} - \left(4\cdot(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right)\right) = \frac{32\pi}{3}$$

el mateix resultat que amb la fórmula.

Trobem ara el volum d'una esfera de radi r, sabent que una equació de la circumferència d'aquest radi és

$$x^2 + y^2 = r^2$$

si buidem la y

$$y^2 = r^2 - x^2$$

per tant,

$$V=\pi\int_{-r}^{r}y^2dx=\pi\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx=\pi\cdot\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}=$$
$$=\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}-\left(-r^3+\frac{r^3}{3}\right)\right)=\frac{4}{3}\pi r^3$$

tal com ja sabíem.

Finalment, per trobar el volum d'un figura de revolució generada a partir del gir d'una funció qualsevol al voltant de l'eix X, es pot utilitzar la mateixa integral que en el cas d'una funció positiva: $V=\pi\int_0^1\left(f(x)\right)^2dx$. Això és així perquè una vegada elevat al quadrat el valor de la funció, el signe negatiu desapareix.

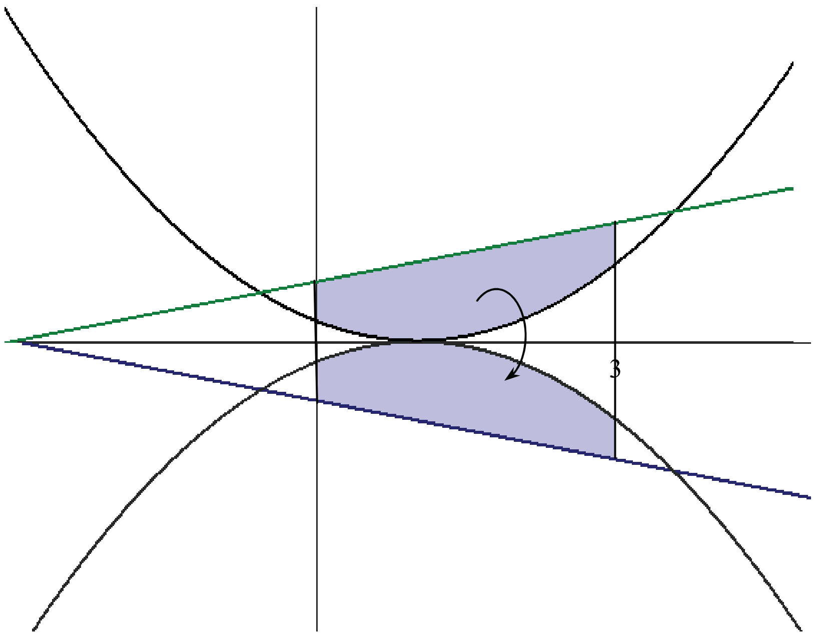
Com es calcula el volum d'una figura de revolució generada per l'àrea tancada per dues funcions?

> Per calcular el volum d'una figura de revolució generada per l'àrea tancada per dues funcions qualssevol, $f(x)$ i $g(x)$, positives en l'interval $[a, b]$, n'hi ha prou de calcular la integral $V=\pi\int_a^b\left|\left(f(x)\right)^2-\left(g(x)\right)^2\right|dx$

Per calcular el volum d'una figura de revolució generada per l'àrea tancada per dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$, en l'interval $[a, b]$ de manera que $f(x) \geq g(x) \geq 0$, n'hi ha prou de calcular el volum de la figura de revolució generada per $f(x)$ i restar-li el volum de la figura de revolució generada per $g(x)$.

$$V=\pi\int_a^b\left(f(x)\right)^2dx-\pi\int_a^b\left(g(x)\right)^2dx=\pi\int_a^b\left[\left(f(x)\right)^2-\left(g(x)\right)^2\right]dx$$

Per exemple, si es vol calcular el volum d'una figura de revolució generada per l'àrea limitada entre la recta $y = x + 3$ i la paràbola $y = x^2 - 2x + 1$, tal com s'observa en aquest gràfic:



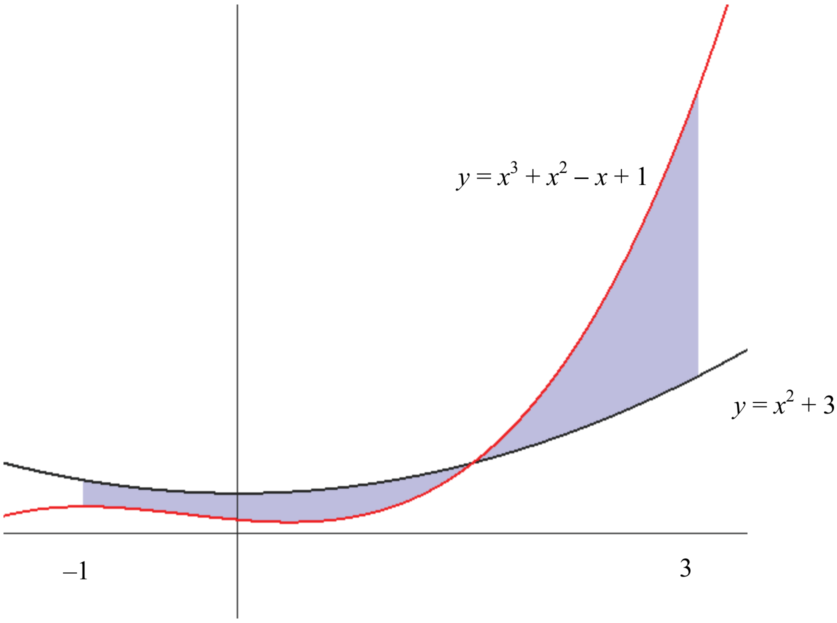
Evidentment, s'han de restar els volums generats per la rotació de cadascuna de les funcions en l'interval [0,3], tenint en compte que la funció més gran és la recta:

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_a^b\left[\left(f(x)\right)^2-\left(g(x)\right)^2\right]dx = \pi\int_0^3\left[\left(x+3\right)^2-\left(x^2-2x+1\right)^2\right]dx = \\ &= \pi\int_0^3\left[-x^4+4x^3-5x^2+10x+8\right]dx = \frac{282\pi}{5} \end{aligned}$$

De manera general, per calcular el volum d'una figura de revolució generada per l'àrea tancada per dues funcions positives qualssevol, $f(x)$ i $g(x)$, en l'interval $[a, b]$, només cal calcular la integral següent:

$$V = \pi\int_a^b\left|\left(f(x)\right)^2-\left(g(x)\right)^2\right|dx$$

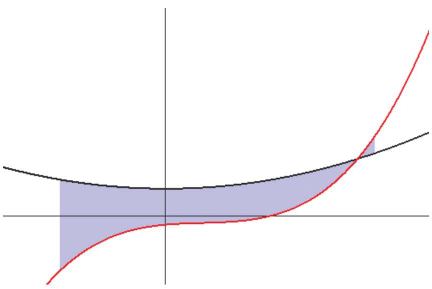
ja que amb això ens assegurem que sempre es resta el valor més gran del valor més petit de les funcions. Així, per exemple, per calcular el volum d'una figura de revolució generada per l'àrea limitada entre la paràbola $y = x^2 + 3$ i la funció $y = x^3 + x^2 - x + 1$, en l'interval [–1,3], àrea representada en aquest gràfic:



s'ha de fer el càlcul següent:

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-1}^3\left|\left(f(x)\right)^2-\left(g(x)\right)^2\right|dx = \\ &= \pi\int_{-1}^3\left|\left(x^2+3\right)^2-\left(x^3+x^2-x+1\right)^2\right|dx = \frac{42716\pi}{105} \simeq 1278 \end{aligned}$$

ja que es tracta de girar sobre l'eix X l'àrea tancada per aquestes dues funcions.

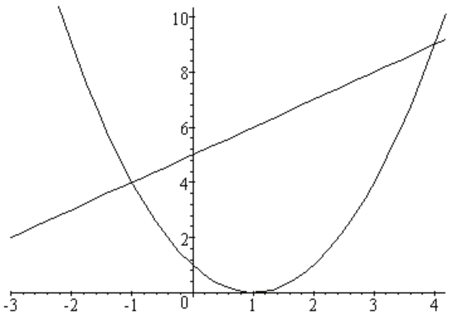


En general, les funcions han de ser positives, ja que, en cas contrari, si una és positiva i altra negativa, l'àrea tancada entre ambdues funcions, en girar, generaria solament el volum de la funció més gran en valor absolut, tal com es pot observar en el gràfic. Es tracta de les funcions $y = x^2 + 3$, i $y = 2x^3 - 2x^2 + x - 1$. Es pot deduir fàcilment que en girar aquesta àrea al voltant de l'eix X, en la part en què ambdues funcions tenen signe diferent, es produiria una superposició de volums, amb la qual cosa l'aplicació de la fórmula del volum donaria un resultat incorrecte.

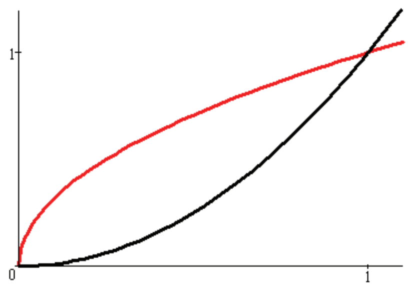
Exercicis

1. Donada la funció $f(x) = x^2 – 4$, calcula l’àrea que es tanca entre aquesta funció i l’eix X per a cadascun d’aquests intervals de la x:

2. Calcula l’àrea tancada entre les gràfiques de $y = x^2 - 2x + 1$, i la recta $y = x + 5$, sabent que aquestes són les seves gràfiques:



3. Calcula l’àrea que es forma entre les gràfiques de les funcions $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = x^2$ entre $x = 0$ i $x = 1$. Aquesta és la representació d’ambdues gràfiques (en vermell, f(x)):



Solucions

1. Com es tracta de calcular l'àrea entre aquests intervals, cal comprovar quan és negativa i quan és positiva, per a no restar-la. La funció $f(x)$ és negativa només entre (-2 i 2), per tant, per a calcular l'àrea en un interval donat, s'ha de restar la part de l'interval que inclogui part de (-2, 2). Així:

   a. $A = \int_{-5}^{-3} (x^2 - 4)dx$, càlcul que podeu fer vosaltres mateixos.

   b. $A = \int_{-4}^{-2} (x^2 - 4)dx - \int_{-2}^{2} (x^2 - 4)dx + \int_{2}^{4} (x^2 - 4)dx$, integrals que podeu calcular vosaltres fàcilment, sabent que la integral definida és $\int (x^2 - 4)dx = \frac{x^3}{3} - 4x + C$.

2. En primer lloc, hem de calcular els punts en què es tallen ambdues funcions:

   $x^2 - 2x + 1 = x + 5$

   $x^2 - 3x - 4 = 0$

   per tant, x = 4 y x = -1.

   Els punts en què es tallen ambdues funcions són:

   (-1,4), (4,9)

   A més, la recta sempre és major que la paràbola en aquest interval. Per tant, l'àrea serà igual a la integral definida de la recta entre ambdós punts, menys la integral de la paràbola entre ambdós punts:

$$\int_{-1}^{4} x + 5 - \left(x^2 - 2x + 1\right)dx = \int_{-1}^{4} -x^2 + 3x + 4dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x\Bigg|_{-1}^{4} = \frac{125}{6}$$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = x^2$

   entre x = 0 i x = 1.

   La funció g(x) és menor que la funció f(x) a l'interval [0,1] ja que:
   $\sqrt{x} = x^2$ si elevem al quadrat
   $x = x^4$
   $x - x^4 = 0$
   $x(1 - x^3) = 0$

   És a dir, f(x) = g(x) quan x = 1, x = 0.
   Quan x < 1 f(x) > g(x)
   Quan x > 1 f(x) < g(x)

   per tant, l'àrea a l'interval [0,1] és igual a:

$$A = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$