Funcions contínues

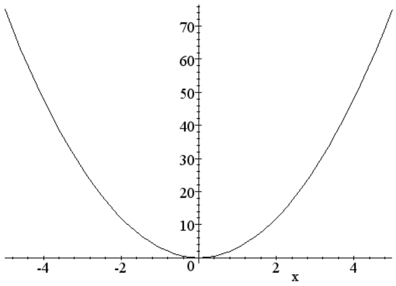
Funcions contínues

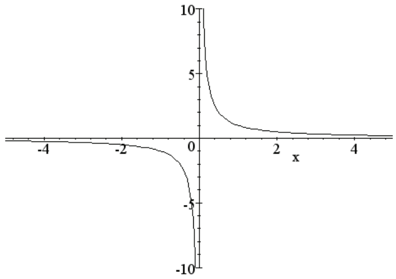
Continuïtat d'una funció

Si x_0 és un nombre, la funció $f(x)$ és contínua en aquest punt si el límit de la funció en aquest punt coincideix amb el valor de la funció en el punt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Gràficament: una funció és contínua en un punt si en aquest punt el seu gràfica no es trenca





Funció contínua en $x = 0$ Funció no contínua en $x = 0$

Una funció es diu que és contínua si ho és en qualsevol punt. Així, doncs, la gràfica d'una funció contínua s'ha de poder dibuixar d'un sol traç.

Discontinuïtats

Si una funció no és contínua en un punt, també es diu que aquesta funció té una discontinuïtat en aquest punt.

Els principals tipus de discontinuïtat són:

- Evitables: la funció f té una discontinuïtat evitable en el punt x_0 si existeix el límit de la funció en el punt x_0 però no coincideix amb el valor de la funció en aquest punt, o bé aquest no existeix, és a dir,

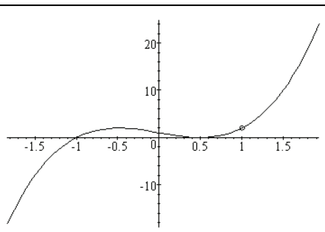
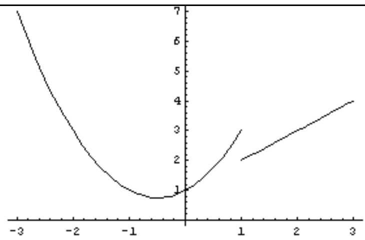
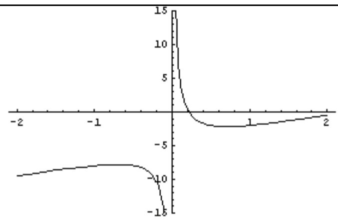
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \neq f(x_0)$$

- Inevitables: discontinuïtats en les quals els límits laterals no coincideixen. És a dir, $f(x)$ té una discontinuïtat inevitable en x_0 si:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Són, bàsicament, de dos tipus:

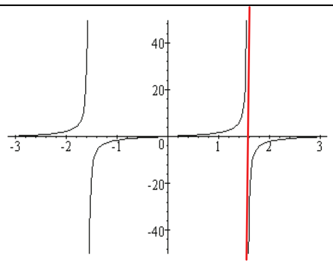
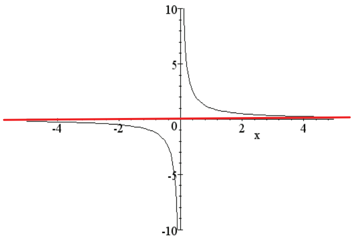
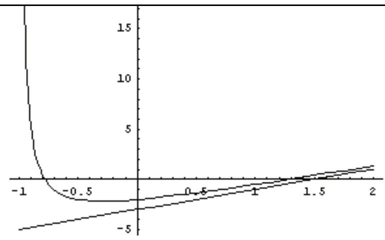
  - de primera espècie o de salt finit, quan ambdós límits laterals són nombres reals.
  - asimptòtica, quan els límits laterals són infinits.

 Discontinuïtat evitable	 Discontinuïtat inevitable de 1a espècie o de salt finit	 Discontinuïtat asimptòtica o de salt infinit

Asímptotes obliqües

La funció té una asímptota obliqua en la recta $y = ax + b$ quan la x tendeix a $+\infty$ o a $-\infty$, i algun dels límits següents són 0:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0 \quad \text{o bé,} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

 asímptota vertical	 asímptota horitzontal	 asímptota obliqua

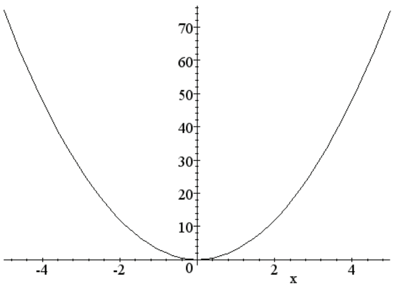
Quan una funció és contínua en un punt?

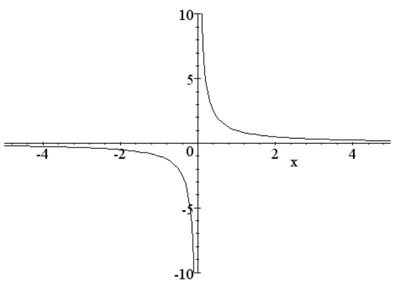
> Una funció és contínua en un punt quan el límit de la funció en aquest punt coincideix amb el valor de la funció en aquest punt. Una funció es diu que és contínua quan és contínua en qualsevol punt. Gràficament es pot observar que una funció és contínua si el seu traçat no presenta talls.

A partir del concepte de límit en un punt es pot definir el concepte de *funció contínua* en un punt: una funció és contínua en un punt quan el límit de la funció en aquest punt és igual al valor de la funció en el punt. És a dir, si x_0 és un nombre, la funció f és contínua en aquest punt si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

A més, una funció es diu que és contínua si ho és en qualsevol punt. Això es pot observar a la gràfica de la funció: una funció és contínua quan el seu traçat no conté talls. En l'exemple següent es pot observar una funció contínua i una altra que no ho és (dreta).





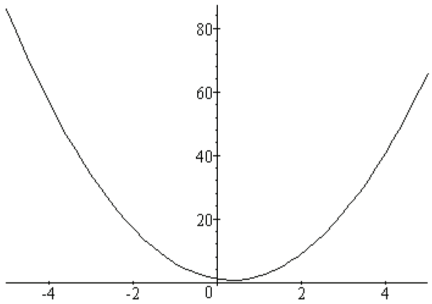
Vegem, per exemple, que la funció $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ és una funció contínua; és fàcil comprovar que el límit de la funció en el punt $x_0 = -2$ és 17. Falta, doncs, calcular el valor de la funció en aquest punt, $f(-2) = 17$. Per tant, en aquest cas es compleix que:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$$

Per tant, la funció $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ és contínua en el punt $x_0 = -2$. Per demostrar que tota la funció f és contínua s'hauria de comprovar aquesta condició per a tot punt

x_0; normalment, això no cal fer-ho, perquè la idea de continuïtat en un punt podem associar-la, com s'ha dit, al fet de que el traç de la gràfica al voltant d'aquest punt s'ha de fer sense separar el llapis del paper (perquè quan ens acostem al valor, el traç del llapis s'acosta al valor de la funció en aquest punt). Així, doncs, contemplar la gràfica de la funció és la forma més útil (tot i que poc rigorosa) de saber si la funció és contínua: sempre que es pugui dibuixar amb un sol traç, sense separar el llapis del paper, la funció serà contínua.

En el cas de l'exemple, $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, en podem obtenir fàcilment la representació, una paràbola:

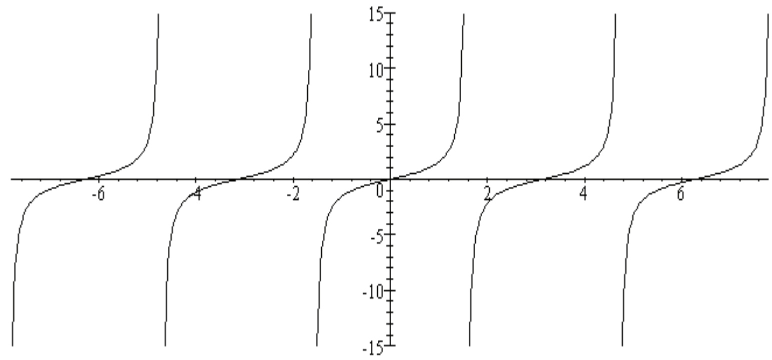


Aquesta funció és contínua perquè es pot dibuixar amb un sol traç sense aixecar el llapis del paper. De fet, totes la funcions polinòmiques són contínues pel mateix motiu. També les funcions exponencials, logarítmiques, la funció sinus i la funció cosinus són contínues; només cal recordar les seves gràfiques, que es poden dibuixar amb un sol traç. En canvi, la funció tangent, cotangent, secant i cosecant no són funcions contínues. Tampoc no són contínues les funcions que tenen en la seva expressió un quocient: quan el denominador és 0, la funció no és contínua, entre altres coses perquè en aquest punt la funció no existeix.

Què és una discontinuïtat i quins en són els tipus?

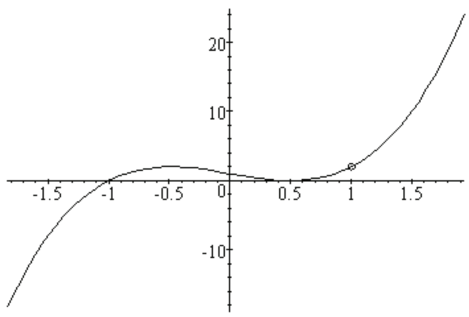
> Si una funció no és contínua en un punt, també es diu que aquesta funció té una discontinuïtat en aquest punt. Bàsicament, hi ha dos tipus de discontinuïtats: les evitables, quan existeix el límit de la funció en el punt de discontinuïtat; i les inevitables, en les quals els límits laterals en aquests punts són diferents. En aquest últim cas, si els límits són nombres, la discontinuïtat és de primera espècie o de salt finit, mentre que si els límits són infinits, la discontinuïtat és asimptòtica.

La funció tangent, en el punt $\pi/2$, no és contínua perquè ni existeix la funció en aquest punt, ni els seus límits laterals coincideixen. De fet, la gràfica d'aquesta funció mostra clarament els punts en els quals no és contínua (anomenats *punts de discontinuïtat* o, senzillament, *discontinuïtats*), és a dir, punts en els quals la gràfica "es trenca", de manera que no es podria dibuixar d'un sol traç sense aixecar el llapis; aquests punts són, en aquest cas, els punts que no pertanyen al domini de la funció, com mostra la gràfica de la funció tangent:



Altres funcions tenen discontinuïtats de diferent tipus: per exemple, la funció:

$$g(x) = \frac{4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{x - 1}$$



no és contínua quan en $x_0 = 1$, ja que el valor d'aquesta funció no existeix, ja que el denominador de la funció dóna 0 en aquest valor de x (i no es pot dividir mai entre 0). Ara bé, en aquest cas, es pot comprovar que el valor del límit en aquest punt (fent una taula, per exemple) és 2, com es pot veure a la gràfica.

És a dir, la gràfica només s'interromp en aquest punt; de fet, podríem modificar lleugerament la funció perquè fos contínua afegint-hi aquest únic punt que falta. D'aquesta manera, la gràfica es dibuixaria amb un sol traç sense aixecar el llapis del paper. Aquest tipus de discontinuïtats es denominen *evitables*, ja que és molt fàcil resoldre-les afegint un sol punt; en el cas anterior (de la funció tangent) es denominen *discontinuïtats asimptòtiques*. Així, doncs, hi ha dos tipus bàsics de discontinuïtats:

- Evitables

La funció f té una discontinuïtat evitable en el punt x_0 si existeix el límit de la funció en el punt x_0 però no coincideix amb el valor de la funció en aquest punt, o bé aquest no existeix, és a dir,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \neq f(x_0)$$

El cas de la funció

$$g(x) = \frac{4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{x - 1}$$

correspon a aquest tipus de discontinuïtats: en el punt $x = 1$, la funció no existeix, però el límit en aquest punt és 2. Per aconseguir que la funció sigui contínua, n'hi ha prou d'atorgar el valor del límit a la funció en aquest punt. És a dir, si es defineix la funció

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

només s'ha modificat la funció anterior en un punt, i amb aquest canvi ja s'evita la discontinuïtat.

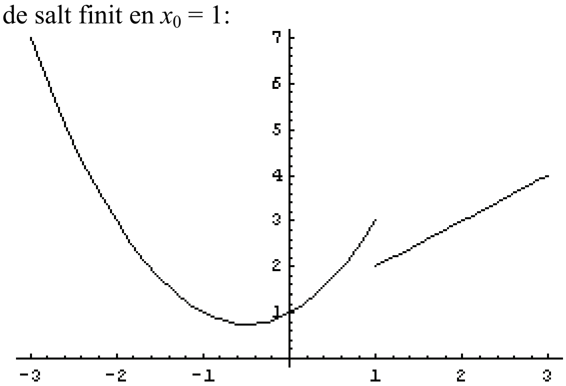
- Inevitables

Són inevitables les discontinuïtats en les quals els límits laterals no coincideixen. És a dir, $f(x)$ té una discontinuïtat inevitable en x_0 si:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

i són de dos tipus:

- De primera espècie o de salt finit, quan ambdós límits laterals són nombres reals. Per exemple, la funció següent té una discontinuïtat de salt finit en $x_0 = 1$:

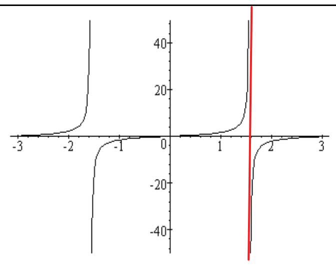
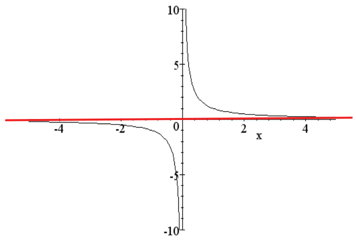
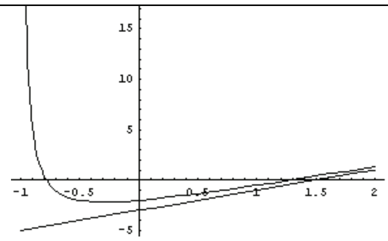
  

  ja que el límit per l'esquerra és 3, i el límit per la dreta, 2.
- Asimptòtica, quan els límits laterals són infinits. Per exemple, la funció tangent té discontinuïtats asimptòtiques en tots els punts que no són del seu domini, com es pot comprovar fàcilment a la seva gràfica.

Què és una asímptota i quants tipus d'asímptotes existeixen?

> Una asímptota a una funció és una recta que en tendir la x a un nombre, a $+\infty$, o a $-\infty$, s'acosta a la funció de manera constant fins a fer-se, per dir-ho d'alguna manera, tangent a l'infinit. Segons la seva inclinació, les asímptotes poden ser verticals, horitzontals i obliqües.

Una asímptota a una funció $f(x)$ és una recta que en tendir la x a un nombre, a $+\infty$, o a $-\infty$ s'acosta a la funció de manera constant fins a fer-se, per dir-ho d'alguna manera, tangent en l'infinit. En aquestes gràfiques es poden veure diferents tipus d'asímptotes:

 asímptota vertical	 asímptota horitzontal	 asímptota obliqua

En la gràfica de l'esquerra es pot veure que quan la x tendeix al punt on la recta talla l'eix X, la funció, per ambdós costats, tendeix a la recta vertical; en la gràfica del centre, quan la x tendeix a $+\infty$, la funció tendeix a l'asímptota. Finalment, en la gràfica de l'esquerra es pot observar que quan x tendeix a $-\infty$, la recta i la funció tendeixen a acostar-se.

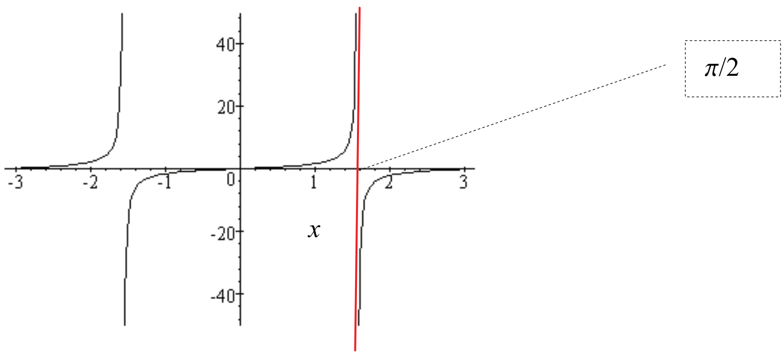
Aquestes gràfiques presenten els tres tipus bàsics d'asímptotes:

- Asímptotes verticals

La funció té una asímptota vertical quan la x tendeix a un valor, i la funció tendeix a $+\infty$ o $-\infty$, és a dir:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \text{ o bé } \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

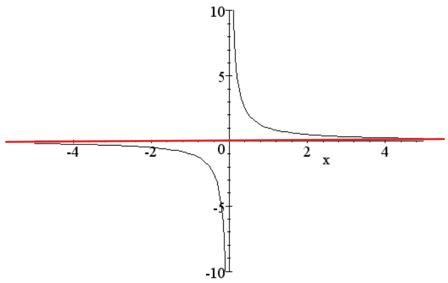
En aquest cas, la recta $x = a$ és una asímptota vertical. Per exemple, en el cas de la funció $f(x) = \text{tg } x$, sabem que en $x = \pi/2$ el límit de la funció és $+\infty$ per l'esquerra i $-\infty$ per la dreta. Per tant, la recta $x = \pi/2$ és doblement asímptota vertical.



- Asímptotes horitzontals

La funció té una asímptota horitzontal quan la x tendeix a $+\infty$ o a $-\infty$, i la funció tendeix a un valor concret, és a dir:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \text{ o bé } \lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$



En aquest cas, la recta $y = a$ és una asímptota horitzontal. Per exemple, per la funció $f(x) = 1/x$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Per tant, la recta $y = 0$ és una asímptota horitzontal, tal com es pot veure en la gràfica adjunta.

- Asímptotes obliqües

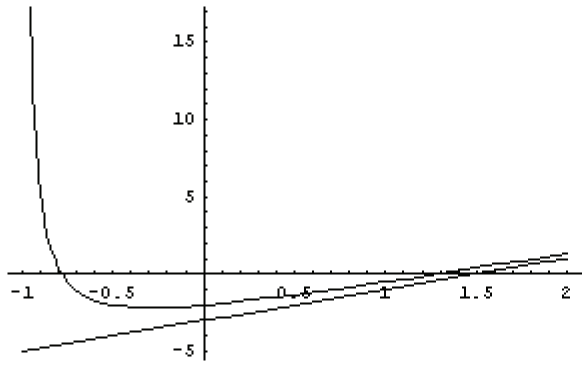
La funció té una asímptota obliqua en la recta $y = ax + b$ quan la x tendeix a $+\infty$ o a $-\infty$, i algun dels límits següents són 0:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-\left(ax+b\right)=0 \text{ o bé } \lim_{x\to-\infty} f(x)-\left(ax+b\right)=0$$

Per exemple, la funció $f(x)=\dfrac{2x^2-x+2}{x+1}$ té una asímptota obliqua en $y = 2x - 3$, ja que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-x+2}{x+1}-\left(2x-3\right)=0$$

La gràfica de la funció i l'asímptota pot il·lustrar aquest fet:



Exercicis

1. Troba el domini i els punts de tall amb els eixos (si n'hi ha), de les següents funcions:
    a. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
    b. $g(x) = 1/x$
    c. $h(x) = 3$
    d. $a(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$
    e. $b(x) = \sqrt{x+1}$
    f. $c(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
    g. $d(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 5}$

2. Indica els punts en què aquestes funcions no són contínues. Raona la resposta.
    a. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
    b. $f(x) = \dfrac{x+3}{x}$
    c. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
    d. $f(x) = \ln(\ln(\sin x))$ (un pèl difícil)

3. Considera la funció $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{8x^3 + 3x}$. Quin valor cal assignar a $f(0)$ perquè la funció f sigui contínua a $x = 0$? Explica-ho.

4. Considera la següent funció:
$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 + 3x^2 - 4}$$
Troba el límit de la funció quan x tendeix a aquests valors: 0, 1, -2, $+\infty$, $-\infty$. Estudia la continuïtat d'aquesta funció, dient si presenta discontinuïtats, i de quin tipus.

Solucions

1.

a. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
El domini és tota la recta real perquè és un polinomi.
Els punts de tall són:
Eix Y: Si $x = 0$, $f(x) = 1$, per tant, (0,1)
Eix X: $f(x) = 0$ --> $x = 1$, per tant, (1,0)

b. $g(x) = 1/x$
El domini es tota la recta real excepte els números que anul·len el denominador, és a dir, menys 0. Així R\{0}
Els punts de tall són:
Eix Y: Ja que x no pot ser 0, no existeixen.
Eix X: Si $g(x) = 0$ --> no existeix cap x que ho compleixi. Per tant, no hi ha punts de tall.

c. $h(x) = 3$
El domini és tota la recta real, perquè qualsevol número té la imatge igual a 3..
Els punts de tall són:
Eix Y: si $x = 0$ --> $h(x) = 3$, per tant (0,3)
Eix X: $h(x)$ no pot ser mai 0.

d. $a(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$
El domini es tota la recta real, excepte aquells nombres que anul·len el denominador. per tant, el domini és R\{-2}
Els punts de tall són:
Eix Y: si $x = 0$ --> $a(0) = -1/2$, per tant, (0,-1/2)
Eix X: si $a(x) = 0$ --> $x^2 - 1 = 0$ --> $x = 1$, o be, $x = -1$. Per tant, (1,0), (-1,0)

e. $b(x) = \sqrt{x + 1}$
L'interior de l'arrel ha de ser positiu, per tant, $x + 1 \geq 0$, és a dir, $x \geq -1$. Així, el domini és
$[-1, +\infty)$
Els punts de tall són:
Eix Y: Si $x = 0$ --> $b(0) = 1$, per tant, (0,1)
Eix X: Si $b(x) = 0$ --> $x+1=0$ --> $x = -1$, per tant, (-1,0)

f. $c(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
Com en el cas anterior, $x^2 - 1 \geq 0$, per tant, el domini és
$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
Els punts de tall són:
Eix Y: si $x = 0$ --> $c(0)$ no existeix, per tant, no hi ha punts de tall,

Eix X: si $c(x) = 0$ --> $x = 1$ ó $x = -1$, per tant, (-1,0) (1,0).

g. $d(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 5}$
En aquest cas s'ha d'acomplir: $x^2 - 4 \geq 0$, és a dir, x ha de pertànyer a $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.
a més, $x+5$ no ha de ser 0, d'aquí que x no pugui ser -5.
En definitiva, el domini és: $(-\infty, -5) \cup (-5, -2] \cup [2, \infty)$
Els punts de tall són:
Eix Y: si $x = 0$ --> no es possible.
Eix X: $d(x) = 0$ --> $x = -2$ ó $x = 2$. Per tant, (2,0), (-2,0)

2.

a. $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

Aquesta funció no és contínua (més concretament, no existeix) en els punts en que l'arrel és negativa, que corresponen als punts de l'interval (-2,2).

b. $f(x)=\dfrac{x+3}{x}$

La funció pot no ser contínua al punts on el denominador es fa 0, és a dir, quan x = 0. En aquest cas el límit és igual a infinit, tant per l'esquerra com per la dreta. Tampoc no hi existeix el valor de la funció en aquest punt.

c. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$

En aquest cas, els límits per l'esquerra i per la dreta de la funció quan x tendeix a 0 és igual a $+\infty$, si la x és positiva, i $-\infty$ si la x és negativa; en canvi, el valor de la funció en aquest punt és 1. Per tant, és una funció que no és contínua.

d. $f(x)$ = ln (ln (sin x)) (aquest, un pèl difícil)

L'única dificultat d'aquest exercici és comprovar que el domini d'aquesta és buit, és a dir, no hi ha cap nombre que pugui substituir-se en aquesta funció. per tant, ja no es pot parlar de continuïtat de la funció en cap punt, perquè la funció no existeix per a cap punt. Anem a veure-ho.

ln (ln (sin x))): el ln només es pot aplicar a nombres estrictament positius, per tant, ln (sin x) > 0. Per a que aquest ln sigui més gran que 0, la funció ha d'estar avaluada en punts que siguin més grans que 1. Per tant, sin x > 1. Però no és possible que el sinus sigui més gran que 1. En definitiva, el domini d'aquesta funció és el conjunt buit, com ja havíem avançat.

3.

Cal que el límit en el 0 sigui igual al valor de la funció; per tant, cal calcular, si existeix, aquest límit:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x^2+x}{8x^3+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x+1}{8x^2+3}=\frac{1}{3}$$

Per tant, el valor de la funció en 0 ha de ser 1/3, $f(0) = 1/3$

4.

$\lim_{x\to 0} f(x)=\dfrac{-3}{4}$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1} f(x)=\dfrac{-2}{9}$

$\lim_{x\to -2^+} f(x)=+\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to -2^-} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$ $\qquad$ $\lim_{x\to -\infty} f(x)=0$

És continua a tots els reals, excepte a x = 1, x = 2, perquè es tracta d'una funció racional.

Discontinuïtat evitable a $x = 1$

Discontinuïtat de asimptòtica a x = -2