Les funcions exponencials i logarítmiques

Les funcions exponencials i logarítmiques

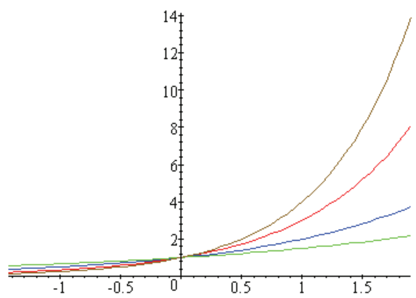
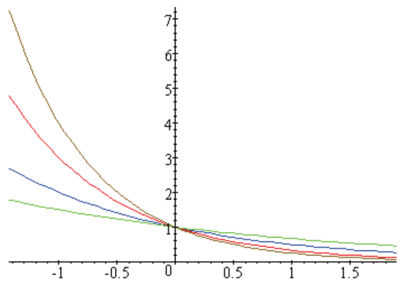
Les funcions exponencials

Una funció exponencial de base a és la que es defineix a partir de les potències dels nombres. La seva expressió és de la forma:

a^x , essent $a > 0$.

Les seves característiques són:

Domini: $(-\infty,+\infty)$.
Imatge: $(0, +\infty)$.
No tenen ni màxims ni mínims.
Passen pel punt (0,1).

<table>
<tr><th>$a > 1$</th><th>$a < 1$</th></tr>
<tr><td>Funció creixent
si x tendeix a $-\infty$, la funció tendeix a 0
si x tendeix a $+\infty$, la funció tendeix a $+\infty$

</td><td>Funció decreixent
si x tendeix a $-\infty$, la funció tendeix a $+\infty$
si x tendeix a $+\infty$, la funció tendeix a 0

</td></tr>
<tr><td colspan="2">a^x i $(1/a)^x$ són simètriques respecte de l'eix Y</td></tr>
<tr><td colspan="2">Una de les funcions exponencials més importants és e^x, és a dir, funció exponencial la base de la qual és el nombre $e = 2,71828182845904523...$</td></tr>
</table>

Equacions exponencials

Una equació exponencial és una equació que inclou funcions exponencials. Per resoldre una equació exponencial s'han d'agrupar al màxim les potències per substituir l'equació exponencial per una equació lineal o quadràtica. Per exemple, els passos per resoldre:

$$7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2} = 2793$$

són:

$$7^x + 7 \cdot 7^x + 7^2 \cdot 7^x = 2793$$
$$7^x\,(1 + 7 + 7^2) = 2793$$
$$7^x \cdot 57 = 2793$$
$$7^x = 2793/57 = 49$$

per tant: $x = 2$ resol $7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2} = 2793$.

El mateix procediment s'ha de seguir per resoldre un sistema d'equacions exponencial. Per resoldre:

$$\begin{cases} 5^x = 5^y \cdot 625 \\ 2^x \cdot 2^y = 256 \end{cases}$$

S'han de seguir aquests passos:

$5^x = 5^i \cdot 5^4 \quad \rightarrow \quad 5^{x-y} = 5^4$
$2^x \cdot 2^i = 2^8 \quad \rightarrow \quad 2^{x+y} = 2^8$

el sistema inicial es converteix en $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 8 \end{cases}$

la solució del qual és $x = 6$ i $y = 2$, que són també solucions del primer sistema.

Composició de funcions i funció inversa

La composició de la funció f amb la funció g és altra funció, designada gof, que compleix:

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

Dues funcions, f i g, es diu que són inverses una de l'altra, si

$$(gof)(x) = x, \text{ i } (fog)(x) = x$$

La funció inversa de f es denota f^{-1}.

El logaritme i les seves propietats

El logaritme sobre la base de ($a > 0$) d'un nombre real positiu, x, es calcula de la manera següent:

$$\log_a x = y \qquad \text{si} \qquad x = a^y$$

i té les propietats següents:

1. $\log_a a = 1 \qquad \log_a 1 = 0.$
2. El logaritme del producte és igual a la suma de logaritmes: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
3. El logaritme d'una potència és igual al producte de l'exponent pel logaritme de la base: $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$.
4. El logaritme d'un quocient és el logaritme del numerador menys el logaritme del denominador: $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.
5. És possible relacionar logaritmes de diferents bases, a i b, amb aquesta fórmula: $\log_b x = \frac{1}{\log_a b} \log_a x$.

Les funcions logarítmiques

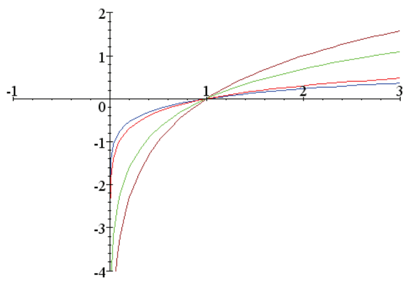
La funció logaritme de base a ($a > 0$, $a \neq 1$) és la funció inversa de la funció exponencial de base a

$$y = \log_a x \text{ si } \qquad x = a^y$$

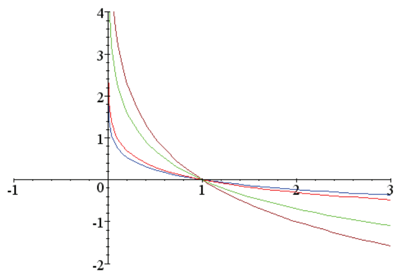
Les seves característiques són:

Domini: $(0, +\infty)$.
Imatge: $(-\infty, +\infty)$.
No tenen ni màxims ni mínims.
Passen pel punt (1,0).

<table>
<tr><th>$a > 1$</th><th>$a < 1$</th></tr>
<tr><td>Funció creixent
si x tendeix a 0, la funció tendeix a $-\infty$
si x tendeix a $+\infty$, la funció tendeix a $+\infty$

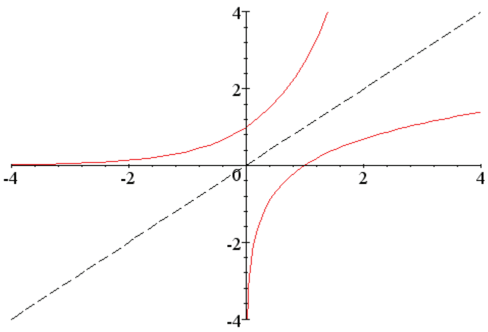
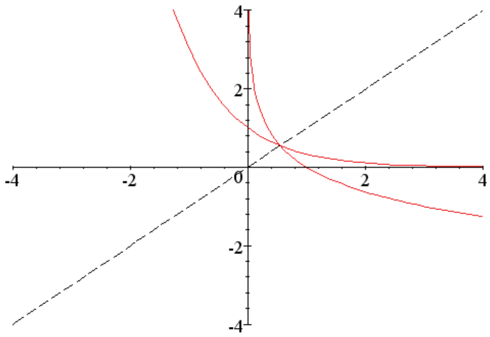


</td><td>Funció decreixent
si x tendeix a 0, la funció tendeix a $+\infty$
si x tendeix a $+\infty$, la funció tendeix a $-\infty$



</td></tr>
<tr><td colspan="2">les gràfiques de $\log_a x$ i $\log_{1/a} x$ són simètriques respecte de l'eix X</td></tr>
<tr><td colspan="2">Una de les funcions logarítmiques més importants és la x, funció logaritme neperià, és a dir, funció logarítmica la base de la qual és el nombre e = 2,71828182845904523...</td></tr>
</table>

Relació entre les gràfiques de les funcions exponencials i logarítmiques

Les gràfiques de les funcions exponencials i logarítmiques de la mateixa base són simètriques respecte de la recta $y = x$	
$a > 1$	$a < 1$
	

Les equacions logarítmiques

Una equació logarítmica és una equació amb funcions logarítmiques. Per resoldre una equació logarítmica s'han d'agrupar al màxim els logaritmes per substituir l'equació logarítmica per una equació lineal o quadràtica. Per exemple, els passos per resoldre:

$$2 \log x - \log (x - 16) = 2$$

són:

$$\log x^2 - \log (x - 16) = 2$$

$$\log x^2 - \log (x - 16) = \log \frac{x^2}{x-16}$$

$$\log \frac{x^2}{x-16} = \log 100$$

$$\frac{x^2}{x-16} = 100$$

$$x^2 - 100x + 1600 = 0$$

les solucions són $x = 20$ i $x = 80$

De la mateixa manera, es poden resoldre sistemes d'equacions logarítmics, convertint-los en sistemes d'equacions lineals, manipulant convenientment els logaritmes. Per exemple, els passos per resoldre:

$$\begin{cases} x + y = 65 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$$

són:

$$\log x + \log y = \log(x \cdot y) = 3 = \log 1000$$

així, doncs, s'ha de resoldre:

$$\begin{cases} x + y = 65 \\ x \cdot y = 1000 \end{cases}$$

les solucions de la qual són $x = 40$ i $y = 25$, o bé, $x = 25$ i $y = 40$.

Els orígens del logaritme

L'origen del concepte de *logaritme* es troba en un problema de matemàtica aplicada: es tracta de simplificar la pesada tasca dels calculadors, excessivament complicada quan es tracta de fer multiplicacions, divisions, fins i tot potències o extracció d'arrels, en problemes relacionats en principi amb l'agrimensura i l'astronomia, en particular en les seves aplicacions a la navegació.

Arquímedes ja té una idea fonamental que generaria els logaritmes, idea que trobem en la seva obra *Arenari*. Ara bé, no és fins a John Napier quan s'aprofita aquesta idea llançada per Arquímedes. John Napier (del nom del qual procedeix el qualificatiu *neperià*) va néixer el 1550. Procedent de la baixa noblesa escocesa, va mostrar tota la seva vida un esperit curiós i dinàmic, a pesar d'una vida allunyada dels centres culturals de l'època. La introducció dels logaritmes no és la seva única aportació, ja que va escriure també un text sobre les equacions i va imaginar a més un sistema de càlcul per mitjà de regletes graduades (rabdologia).

En 1614 va publicar el *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, en què posa en relació una progressió geomètrica amb una progressió aritmètica. La primera és la de les distàncies recorregudes amb velocitats proporcionals a elles mateixes; la segona, la de les distàncies recorregudes amb velocitat constant; aquestes són llavors els "logaritmes" de les primeres (el neologisme és del propi Napier). La unitat triada és 10^7, i l'obra comprèn una taula de logaritmes de sinus, amb els angles variant de minut en minut. En 1619 va aparèixer una segona obra, *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, on l'autor explica com calcular els logaritmes. Aquesta obra és pòstuma, ja que Napier va morir el 1617.

Mentrestant, un eminent matemàtic de Londres, Henry Briggs, havia descobert la importància d'aquests treballs i va viatjar a Escòcia per trobar-se amb l'autor. Reprenent la idea fonamental, però considerant una progressió geomètrica simple, la de les potències de 10, publica el 1617 una primera taula, amb 8 decimals. El logaritme d'un nombre x és, per tant, definit com l'exponent n de 10, tal que x sigui igual a 10 elevat a n.

Van seguir altres taules que van permetre la difusió del mètode, en particular en el continent. En realitat, la idea surava a l'aire; un col·laborador de Kepler, el suís Bürgi, proposava en la mateixa època, per simplificar els càlculs que havia de fer, fer correspondre una progressió aritmètica (en nombres vermells) i una progressió geomètrica (en nombres negres); tanmateix, els seus treballs no van ser publicats fins a 1620.

La difusió en el continent europeu d'aquesta nova noció es deu sobretot a les taules publicades pel flamenc Adrien Ulacq, el 1628, reprenent les taules de Griggs. L'objectiu era fer un tractat de càlcul pràctic, en particular per ús dels agrimensors. Les primeres taules van ser seguides per unes altres, cada cop més precises, i s'hi esmenta que la seva principal aplicació són els càlculs trigonomètrics.

Els logaritmes seran de gran ajuda per al naixement de la física matemàtica a les darreries del segle XVII. Així passa amb *el Discurs sobre la causa de la gravetat* de Huygens, i també amb els diferents treballs sobre la pressió atmosfèrica, en particular els de Mariotte.

L'ús dels logaritmes, sorgits d'una idea de fet molt simple, continuen sent un instrument tal vegada modest, però malgrat tot essencial pel coneixement científic.

John Napier

Què és una funció exponencial i quines en són les característiques?

> Una funció exponencial es defineix a partir de les potències dels números. La seva expressió és de la forma a^x , essent $a > 0$. El domini d'aquestes funcions són tots els nombres reals i la seva imatge són tots els nombres positius. La funció és sempre creixent si $a > 1$, i sempre decreixent si $a < 1$. Aquestes funcions no tenen màxims ni mínims. Les funcions exponencials resulten molt útils en l'estudi de processos de creixement/decreixement de poblacions, per exemple.

La funció exponencial de base *a* es defineix a partir de les potències de nombres. Així, per exemple, la funció exponencial de base 3 és igual a

$$g(x) = 3^x$$

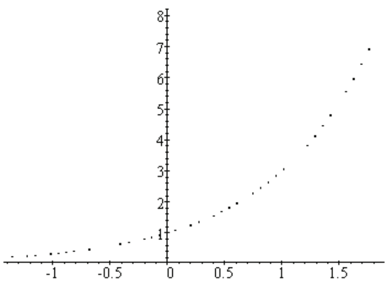
En aquest cas, doncs,

$g(0) = 3^0 = 1$, $g(1) = 3^1 = 3$, $g(2) = 3^2 = 9$, $g(-1) = 3^{-1} = 1/3$, $g(1/2) = 3^{1/2} = \sqrt{3}$, etc.

En general, si *a* és un nombre positiu, la funció exponencial de base *a* és igual a

$$a^x$$

Si representem alguns dels punts de la gràfica de la funció $g(x) = 3^x$ obtindrem una gráfica com aquesta:

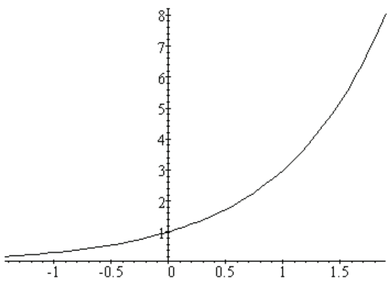


És evident que qualsevol valor de la funció és sempre positiu perquè la potència d'un nombre sempre és un nombre positiu. Així, doncs, la gràfica d'una funció exponencial sempre es representarà per sobre de l'eix X.

És a dir:

- El domini de qualsevol funció exponencial és $(-\infty,+\infty)$.
- La imatge de qualsevol funció exponencial ($a \neq 1$) és $(0,+\infty)$.

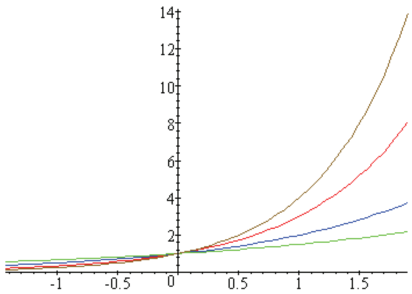
Observant la representació anterior, no és difícil deduir la gràfica de la funció exponencial de base 3:

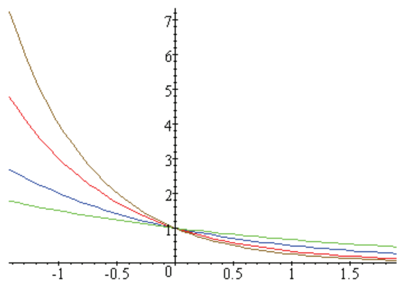


Podem observar que la gràfica d'una funció exponencial sempre conté el punt (0,1), i la funció sempre és positiva. A més, també es pot afirmar que:

- Si la base a és més gran que 1:
    - si $x < y$, llavors, $a^x < a^y$, és a dir, la funció creix en augmentar la variable; dit d'una altra manera, la funció és creixent. A més, el creixement és més gran com més gran sigui la base;
    - com més petita és la x, el valor de y més s'acosta a 0, encara que mai arriba a assolir-lo. Això es pot comprovar en les gràfiques de l'esquerra: més a l'esquerra de, posem per cas, $x = -1$, el valor de les funcions s'aproxima molt ràpidament a 0, però mai és 0.
- Si la base a és menor que 1:
    - si $x < y$, llavors, $a^x > a^y$, és a dir, la funció decreix en augmentar la variable; dit d'una altra manera, la funció és decreixent. A més, el decreixement és més gran com més petita sigui la base;
    - com més gran és la x, el valor de y més s'acosta a 0, sense arribar a assolir-lo a mai. Això es pot comprovar en les gràfiques de la dreta: més a la dreta de, posem per cas, $x = 1$, el valor de les funcions s'aproxima ràpidament a 0, però mai no és 0.
- Evidentment, si la base és 1, la funció és una constant ja que $1^x = 1$.

Es pode comprovar aquests fets en aquestes gràfiques: la gràfica de l'esquerra conté les gràfiques de 4^x, 3^x, 2^x i $(3/2)^x$; l'altra gràfica conté les gràfiques de $(1/4)^x$, $(1/3)^x$, $(1/2)^x$ i $(2/3)^x$.





Podem observar que les gràfiques de 4^x, 3^x, 2^x i $(3/2)^x$; són simètriques, respectivament de $(1/4)^x$, $(1/3)^x$, $(1/2)^x$ i $(2/3)^x$, cosa que és evident, ja que, $(1/a)^x = a^{-x}$

La funció exponencial és una de les funcions més importants per les seves aplicacions, ja que és capaç de descriure una gran varietat de fenòmens, especialment, els de creixement; de vegades, aquestes funcions també es denominen *funcions de creixement*, i s'apliquen a fets tan importants com el creixement d'una població de bacteris en un laboratori, el creixement demogràfic del nombre d'animals, la manera com decreix la matèria radioactiva (creixement negatiu), la raó amb la qual un obrer aprèn un cert procés, la velocitat amb què una malaltia contagiosa es dissemina amb el temps. Les funcions exponencials també són útils pel càlcul de l'interès obtingut en un compte bancari, és a dir, descriuen l'augment monetari a un interès compost, etc.

Una de les funcions exponencials essencials és la que té com base el nombre e, que, com sabem, és un nombre irracional els primers decimals del qual són: 2,71828182845904523... Quan no es diu el contrari, s'entén per funció exponencial la funció e^x.

Què és una equació exponencial i com es resol?

> Una equació exponencial és una equació amb funcions exponencials. Per resoldre una equació exponencial s'han d'agrupar al màxim les potències

per substituir l'equació exponencial per una equació lineal o quadràtica. De la mateixa manera, es poden resoldre sistemes d'equacions exponencials, convertint-los en sistemes d'equacions lineals, manipulant convenientment les potències.

Una equació exponencial és una equació amb funcions exponencials. Per exemple, una equació exponencial pot ser: $2^{x+1} = 2^2$. En aquest cas, la resolució és molt senzilla, observant que les bases són iguals i, per tant, que els exponents han de ser iguals; és a dir, $x + 1 = 2$, per la qual cosa $x = 1$. Efectivament, $2^{1+1} = 2^2$.

L'equació pot ser més complicada. Per exemple:

$$7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2} = 2793$$

En aquest cas, s'ha d'intentar treure 7^x com a factor comú, recordant les propietats de les potències:

$$7^x + 7 \cdot 7^x + 7^2 \cdot 7^x = 2793$$

$$7^x\,(1 + 7 + 7^2) = 2793$$

s'operen els elements entre parèntesis:

$$7^x \cdot 57 = 2793$$

per tant:

$$7^x = 2793/57 = 49$$

Es evident que $x = 2$.

Fins i tot es pot complicar més:

$$5^{x-1} = 2 + \frac{3}{5^{x-2}}$$

En aquest cas s'ha d'intentar, en primer lloc, eliminar el denominador, multiplicant-ho tot per 5^{x-2}:

$$5^{x-1} \cdot 5^{x-2} = 2 \cdot 5^{x-2} + 3$$

operant

$$5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} - 3 = 0$$

es pot reescriure de la manera següent:

$$5^{2x-4} \cdot 5 - 2 \cdot 5^{x-2} - 3 = 0$$

agrupant

$$5(5^{x-2})^2 - 2 \cdot 5^{x-2} - 3 = 0$$

Es tracta, doncs, d'una equació de segon grau, la incògnita del qual és $5^{x-2} = y$, és a dir:

$$5y^2 - 2y - 3 = 0$$

Les solucions són: $y = 1$, $y = -3/5$. Aquesta última és impossible, ja que 5^{x-2} no pot ser negatiu. Per l'altra solució obtenim que:

$$5^{x-2} = 1 = 5^0$$

per tant, $x - 2 = 0$; és a dir, $x = 2$.

Així, doncs, per resoldre una equació exponencial, s'han d'agrupar al màxim les potències per intentar substituir l'equació exponencial per una equació lineal o quadràtica.

De la mateixa manera, també es poden resoldre sistemes d'equacions exponencials, convertits en sistemes d'equacions lineals en manipular convenientment les potències. Per exemple, per resoldre el sistema:

$$\begin{cases} 5^x = 5^y \cdot 625 \\ 2^x \cdot 2^y = 256 \end{cases}$$

es pot reescriure's la primera equació:

$$5^x = 5^y \cdot 5^4 \quad \rightarrow \quad 5^{x-y} = 5^4$$

i també la segona equació:

$$2^x \cdot 2^y = 2^8 \quad \rightarrow \quad 2^{x+y} = 2^8$$

és fàcil substituir el primer sistema per aquest:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

la solució del qual és $x = 6$ i $y = 2$

Què és la composició de funcions i la inversa d'una funció?

> La composició de la funció f amb la funció g és una altra funció, designada gof, que a cada element del domini hi fa correspondre $g(f(x))$. Dues funcions, f i g, es diu que són inverses l'una de l'altra si $(gof)(x) = x$, i $(fog)(x) = x$. La funció inversa de f es denota f^{-1}.

Donades dues funcions f i g, es pot definir la funció f composta amb g, o composició de f amb g, gof, de la manera següent:

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

S'ha de tenir en compte que per perquè es pugui calcular la composició de f amb g en un punt $(a, f(a))$, ha de pertànyer al domini de g.

Per exemple, si $f(x) = x^2$ i $g(x) = 2x$, llavors:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 4x^2$$

Es pot observar en aquest exemple que la composició de funcions no és commutativa, és a dir, gof no sol ser igual a fog; dit d'una altra manera, no és el mateix la composició de f amb g que la composició de g amb f.

A partir del concepte de *composició de funcions* es pot definir el concepte de *funció inversa* d'una altra funció.

Si f és una funció, es diu que g és la funció inversa de f si

$(gof)(x) = x$ per x pertanyent al domini de f

i $(fog)(x) = x$ per x pertanyent al domini de g

S'ha de complir, per tant, que el domini de f sigui igual a la imatge de g.

Vegem què significa aquest fet. Si, per exemple, f és una funció tal que $f(3) = 5$, sabem que s'ha de complir:

$(gof)(3) = 3$ això és $(gof)(3) = g(f(3)) = g(5) = 3$

És a dir, si la imatge del 3 en la funció f és 5, llavors, la imatge del 5 en la funció g és el 3. I així per qualsevol valor de f. En definitiva, g és la inversa de f si es compleix el següent:

si $f(x) = y$ llavors $g(y) = x$

La funció inversa de f es denota f^{-1}. Finalment, es pot demostrar que si una funció té inversa, ambdues funcions han de ser bijectives.

Què és el logaritme i quines en són les propietats?

> El logaritme de base a d'un nombre és l'operació inversa de la potència de base a. Per això, el logaritme només es pot calcular per nombres positius i, a més, la base només pot ser positiva. Les propietats dels logaritmes es deriven de les propietats de les potències.

El logaritme de base a ($a > 0$) d'un nombre real positiu, x, es calcula de la manera següent:

$\log_a x = y$ si $x = a^y$

$\log_a$ indica precisament aquesta operació: el logaritme en base a. Per exemple, el logaritme de base 2 de 8 és igual a 3 perquè $2^3 = 8$; és a dir:

$\log_2 8 = 3$ perquè $2^3 = 8$.

Altres exemples, amb diferents bases:

$\log_3 81 = 4$ perquè $3^4 = 81$

$\log_5 25 = 2$ perquè $5^2 = 25$

$\log_7 49 = 2$ perquè $7^2 = 49$

Les propietats del logaritme es deriven de manera senzilla de les propietats de les potències, per la relació entre ambdues operacions, sigui quin sigui el valor de $a > 0$, i són les següents:

1. $\log_a a = 1$ $\log_a 1 = 0$
2. El logaritme del producte és igual a la suma de logaritmes:
   $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ ja que
   $a^{\log_a (x\cdot y)} = x\cdot y = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_b y} = a^{\log_a x + \log_a y}$
3. El logaritme d'una potència és igual al producte de l'exponent pel logaritme de la base:
   $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$ ja que
   $a^{\log_a (x^y)} = x^y = \left(a^{\log_a x}\right)^y = a^{y\cdot \log_a x}$
4. El logaritme d'un quocient és el logaritme del numerador menys el logaritme del denominador:
   $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ ja que
   $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a \left(x \cdot y^{-1}\right) = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y$
5. És possible relacionar logaritmes de diferents bases, a i b, amb aquesta fórmula:
   $\log_b x = \dfrac{1}{\log_a b} \log_a x$ ja que
   si denominem $y = \log_a x$, $z = \log_b x$, aleshores
   $x = a^y = b^z$
   a més, com $b = a^{\log_a b}$ podem dir que
   $x = \left(a^{\log_a b}\right)^z = a^{z\cdot \log_a b}$ és a dir
   $\log_a x = y = z \cdot \log_a b = \log_b x \cdot \log_a b$, i d'aquí es dedueix la propietat enunciada.

Què són les funciones logaritme i quines són les seves característiques?

La funció logaritme de base a és la funció inversa de la funció exponencial de base a. La seva expressió és de la forma $\log_a x$, essent $a > 0$. El domini d'aquestes funcions són tots els nombres reals positius, i la seva imatge són tots els nombre reals. La funció és sempre creixent si $a > 1$, i sempre decreixent si $a < 1$. Aquestes funcions no tenen màxims ni mínims. Les funcions logarítmiques són molt útils en l'estudi de processos de descomposició radioactiva, per exemple.

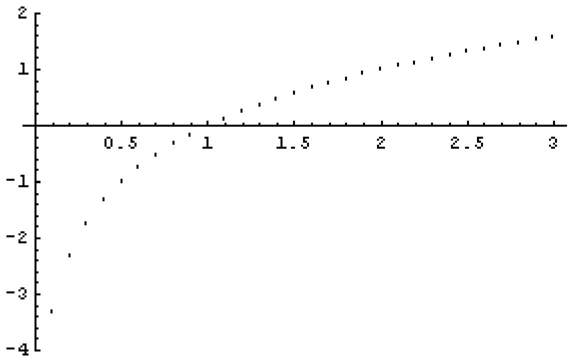
La funció logaritme de base a ($a > 0,\ a \neq 1$) és la funció inversa de la funció exponencial de base a. És a dir,

$$y = \log_a x \text{ si } \qquad x = a^y$$

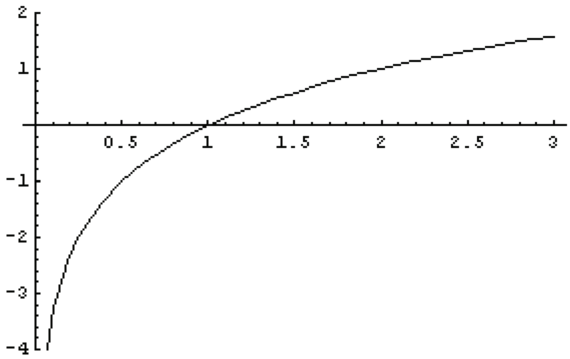
En altres paraules, la funció logaritme de base a és la funció inversa de la funció exponencial de base a. Així, doncs:

- El domini de la funció logaritme de base a és igual a $(0,+\infty)$, ja que correspon a la imatge de la funció exponencial de base a.
- La imatge de la funció logaritme de base a és igual a tots els nombres reals, és a dir, $(-\infty,+\infty)$, ja que aquest és el domini de la funció exponencial de base a.

Si es fa la gràfica d'una taula de la funció logaritme en base 2, s'obtindrà un conjunt de punts com aquest:



Així, doncs, la gràfica de la funció logaritme en base 2 en el domini [0,3] és:

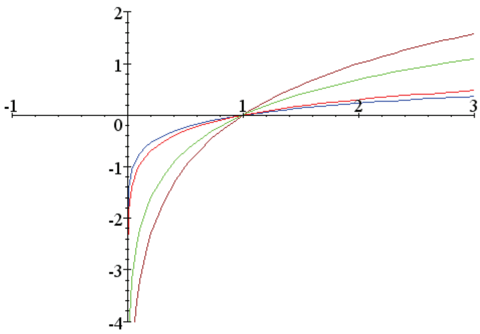


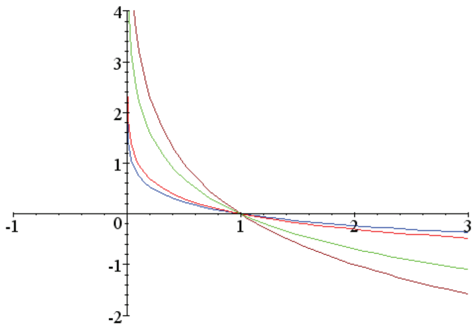
Podem observar que la gràfica d'una funció logarítmica sempre conté el punt (1,0). A més, també es pot afirmar:

- Si la base a és més gran que 1
    - si $x < y$, llavors, $\log_a x < \log_a y$, és a dir, la funció creix en augmentar la variable; dit d'una altra manera, la funció és creixent. A més, no hi ha límit per al creixement de la funció: quan x augmenta, la i també augmenta. Aquest creixement es més gran com més petita és la base;
    - com més a prop de 0 es troba la x, el valor de $\log_a x$ és menor; per això es diu que la funció $\log_a x$ tendeix a $-\infty$ quan la x tendeix a 0. Això es pot comprovar en les gràfiques de l'esquerra: més a l'esquerra de, posem per cas, $x = 1$, el valor de les funcions decreix molt ràpidament, sense límit.
- Si la base a és menor que 1:
    - si $x < y$, llavors, $\log_a x > \log_a y$, és a dir, la funció decreix en augmentar la variable; dit d'una altra manera, la funció és decreixent. A més, no hi ha límit per al decreixement de la funció. Aquest decreixement és més gran com més gran és la base;

- com més gran és la x, el valor de y més s'acosta a 0, sense arribar a assolir-lo mai. Això es pot comprovar en les gràfiques: més a la dreta de, posem per cas, $x = 1$, el valor de les funcions s'aproxima ràpidament a 0, però mai no és 0.

Es poden comprovar aquests fets en aquests gràfics: el gràfic de l'esquerra conté les gràfiques de $\log_2 x$, $\ln x$, $\log x$, $\log_{20} x$; l'altre gràfic conté les gràfiques dels logaritmes amb les bases inverses de les anteriors (és a dir, les bases són: ½, $1/e$, 1/10 i 1/20). Cal destacar que $\ln x$ és el logaritme la base del qual és el nombre e, i es denomina *logaritme neperià*, mentre que $\log x$ (sense indicar la base) significa que es tracta del logaritme de base 10.





Podem observar que les gràfiques de $\log_a x$ i $\log_{1/a} x$ són simètriques respecte de l'eix X; això és així perquè:

$$\log_{1/a} x = -\log_a x$$

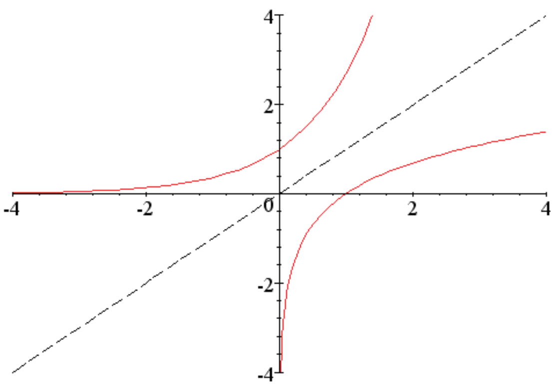
Les funcions logarítmiques són molt importants per l'estudi de molts fenòmens físics, per exemple, la descomposició radioactiva.

Quina és la relació entre les gràfiques de les funcions exponencials i logarítmiques?

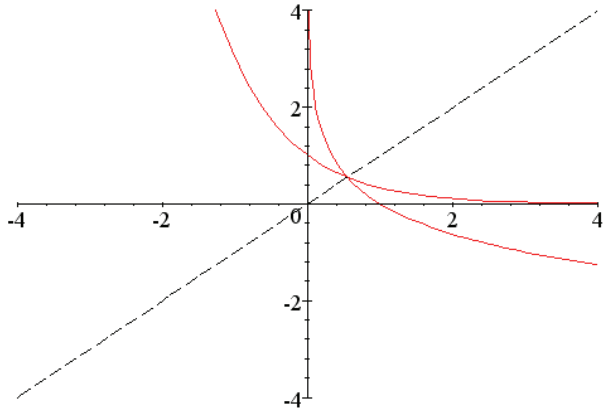
> Les gràfiques de la funció logarítmica de base a i la funció exponencial de la mateixa base són simètriques respecte de la recta $y = x$. De fet, si f i g són dues funcions qualssevol, inverses una de l'altra, llavors, les seves gràfiques són simètriques respecte de la recta $y = x$. Això és així perquè la funció inversa intercanvia els papers de la x i la y de la funció original.

Hi ha una íntima relació entre les gràfiques d'una funció exponencial i una funció logarítmica amb la mateixa base. Per exemple, si es considera la funció logaritme neperià, $\ln x$, i la funció e^x, les seves gràfiques són:

La gràfica d'una funció s'ha d'analitzar amb precaució perquè sempre és aproximada i, per això, és possible malinterpretar-la. En el cas de les funcions exponencials i logarítmiques, podria semblar que les gràfiques acaben unint-se als eixos, la primera a l'eix X, la segona a l'eix Y, cosa impossible per la mateixa definició d'aquestes funcions.



Es pot observar que ambdues funcions són simètriques respecte de la recta $y = x$. És a dir, si es doblega el paper amb les dues funcions per la recta $y = x$, llavors ambdues rectes coincidiran després de plegat. De la mateixa manera, si les funcions tenen la base menor que 1, passa exactament el mateix; per exemple, les funcions $(1/3)^x$ i $\log_{1/3}x$ tenen aquestes gràfiques:



Es pot observar que les funcions són també simètriques respecte de la recta $y = x$.

Aquest fet no és solament aplicable a aquestes funcions. Si dues funcions qualssevol són inverses una de l'altra, les seves gràfiques compleixen aquesta propietat: són simètriques respecte de la recta $y = x$. Això és fàcil d'explicar, ja que la inversa d'una funció intercanvia els papers de la x i la y. Per tant, la funció inversa ha de tenir la mateixa forma que la funció original, llevat que els eixos X i Y s'han d'intercanviar.

Què és una equació logarítmica i com es resol?

> Una equació logarítmica és una equació amb funcions logarítmiques. Per resoldre una equació logarítmica han d'agrupar-se al màxim els logaritmes, per substituir l'equació logarítmica per una equació lineal o quadràtica. De la mateixa manera, poden resoldre's sistemes d'equacions logarítmics, convertint-los en sistemes d'equacions lineals, manipulant convenientment els logaritmes.

Una equació logarítmica és una equació en la qual apareixen funcions logarítmiques. Per resoldre-la, s'han d'aplicar les propietats dels logaritmes convenientment, per agrupar les expressions i, així, poder substituir-la per una equació lineal o quadràtica. Per exemple, per resoldre:

$$2 \log x - \log (x - 16) = 2$$

s'han d'agrupar els termes de l'esquerra. Es compleix que $2 \log x = \log x^2$, per tant:

$$\log x^2 - \log (x - 16) = 2$$

aplicant la propietat del logaritme del quocient:

$$\log x^2 - \log (x - 16) = \log \frac{x^2}{x-16}$$

i ja que $2 = \log 100$, s'arriba a l'equació:

$$\log \frac{x^2}{x-16} = \log 100$$

és a dir:

$$\frac{x^2}{x-16} = 100$$

Per tant, es tracta de resoldre $x^2 - 100x + 1600 = 0$; les solucions són $x = 20$ i $x = 80$, i observem que ambdues són solució de l'equació inicial.

També es poden resoldre sistemes d'equacions logarítmiques intentant sempre agrupar els logaritmes per convertir les equacions inicials en equacions lineals o quadràtiques. Per exemple:

$$\begin{cases} x + y = 65 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$$

La primera equació ja és lineal; intentem transformar la segona en una equació lineal:

$$\log x + \log y = \log(x \cdot y) = 3 = \log 1000$$

per tant, s'ha de substituir l'equació logarítmica per:

$$x \cdot y = 1000$$

així, doncs, s'ha de resoldre:

$$\begin{cases} x + y = 65 \\ x \cdot y = 1000 \end{cases}$$

les solucions de la qual són $x = 40$ i $y = 25$, o bé, $x = 25$ i $y = 40$.

Exercicis

1. Troba una funció exponencial del tipus $f(x)=a^x$ que compleixi que $f(6)=64$.

2. Quines d'aquestes funcions són creixents i quines decreixents: $f(x)=11^x$, $g(x)=13^x$, $h(x)=0.1^x$ i $t(x)=0.3^x$? Ordena-les de major creixement a major decreixement.

3. Considera aquestes funcions: $f(x)=2x^2-3x+1$, $g(x)=3x+1$ i $f(x)=e^x$. Fes aquestes composicions:
   a. $fog(x)$
   b. $gof(x)$
   c. $foh(x)$
   d. $hogof(x)$

4. Calcula aquests logaritmes sense usar la calculadora: $\log_2 32$, $\log_9 81$, $\log_5 5^3$, $\log_3 \sqrt{243}$

5. Troba una funció logarítmica del tipus $f(x)=\log_a x$ que compleixi que $f(125)=3$.

6. Quines d'aquestes funcions són creixents i quines decreixents: $f(x)=\log_3 x$, $g(x)=\log_{0.2} x$, $h(x)=\log_{13} x$ i $t(x)=\log_{0.1} x$? Ordena-les de major creixement a major decreixement.

7. Troba la funció inversa de $f(x)=e^{3x}$ i $g(x)=\ln(4x+3)$.

8. Troba la x que compleix aquestes igualtats:
   $\log_4 x=4$, $\log_x 27=x$, $\log_{1/2} 4=x$, $\log_3 \sqrt{x}=\dfrac{3}{2}$

9. Resol aquestes equacions pas a pas:
   a. $3^{2x}-5\cdot 3^x=36$
   b. 2log 10x - log(12 – 4x) = 2

10. Resol aquestes equacions logarítmiques i exponencials:
    a. ln x + ln(x-1) = 0
    b. log x - log x^2 = log 7

Solucions

1. S'ha de complir que $f(6) = a^6 = 64$, per tant, $a = 2$.

2. $f(x) = 11^x$ i $g(x) = 13^x$ són creixents, perquè la seva base és major que 1. Les altres són decreixents. De major creixement a major decreixement l'ordre és aquest: $g(x) = 13^x$, $f(x) = 11^x$, $t(x) = 0.3^x$ i $h(x) = 0.1^x$.

3.
   a. $fog(x) = 18x^2 + 3x$
   b. $gof(x) = 6x^2 - 9x + 4$
   c. $foh(x) = 2(e^x)^2 - 3e^x + 1$
   d. $hogof(x) = e^{6x^2 - 9x + 4}$

4.

$$\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5\log_2 2 = 5$$
$$\log_9 81 = \log_9 9^2 = 2$$
$$\log_5 5^3 = 3$$
$$\log_3 \sqrt{243} = \log_3 243^{1/2} = \log_3 (3^5)^{1/2} = \log_3 3^{5/2} = \frac{5}{2}$$

5. $f(x) = \log_3 x$.

6. Només són creixents $f(x) = \log_3 x$ i $h(x) = \log_{13} x$. De major creixement a major decreixement: $f(x) = \log_3 x$, $h(x) = \log_{13} x$, $t(x) = \log_{0.1} x$ i $g(x) = \log_{0.2} x$.

7. $f^{-1}(x) = \ln x^{1/3}$ i $g^{-1}(x) = \dfrac{e^x - 3}{4}$.

8.

$\log_4 x = 4$	$x = 256$
$\log_x 27 = x$	$x^x = 27$ per tant $x = 3$
$\log_{1/2} 4 = x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$ per tant, $x = -2$
$\log_3 \sqrt{x} = \frac{3}{2}$	$\sqrt{x} = 3^{3/2}$ per tant, $x = 3^3$

9.

a. $3^{2x} - 5 \cdot 3^x = 36$

$$3^{2x} - 5 \cdot 3^x = 36$$
$$\left(3^x\right)^2 - 5 \cdot 3^x - 36 = 0$$

es tracta d'una equació de 2n grau amb incògnita 3^x, les solucions de la qual són 9 i –4. Aquesta darrera no és possible. Per tant, $3^x = 9 = 3^2$. Així, $x = 2$, com es pot comprovar fàcilment.

b. $2\log 10x - \log(12 - 4x) = 2$

Aplicant les diverses propietats dels logaritmes:

$\log 100x^2 - \log(12 - 4x) = \log 10^2$

$\log \dfrac{100x^2}{12-4x} = \log 10^2$

per tant,

$$\frac{100x^2}{12-4x} = 100$$

$$\frac{x^2}{12-4x} = 1$$

$x^2 = 12-4x$
$x^2 + 4x - 12 = 0$

les solucions de la qual són $x = 2$, $x = -6$. La solució $x=-6$ no és possible perquè
$\log 10x = \log -60$ que es una expressió errònia.

en canvi $x=2$, sí que es una solució correcta:

$2\log 10\cdot 2 - \log(12 - 4\cdot 2) = 2$
$2\log 20 - \log 4 = 2$

10.

a. $\ln x + \ln(x-1) = 0$
$\ln(x(x-1)) = 0$
$x(x-1)=1$
$x^2 - x - 1 = 0$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

b. $\log x - \log x^2 = \log 7$
$\log(x/x^2)=\log 7$
$x/x^2 = 7$
$x = 7x^2$
$x = 1/7$